Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Туров Михаил Михайлович

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич

ЧЕЛЯБИНСК — 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

В последнее время наблюдается заметный рост внимания исследователей к дробному исчислению. Это обусловлено многочисленными эффективными приложениями дробного интегро-дифференцирования, возникающими при описании широкого класса физических и химических процессов [29, 51, 100, 136], а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических явлений [82, 134, 137]. Получаемые при этом математические модели представляют собой дифференциальные уравнения с различными дробными производными. Поэтому развитие аналитического аппарата теории уравнений с дробными производными является актуальной и важной задачей. В монографиях [28, 29, 31, 39, 100, 105, 125] исследуются и систематизируются различные свойства уравнений с дробными производными и их решений, методы решений, классы начальных и краевых задач.

Уравнения с несколькими дробными производными вызывают большой интерес у исследователей [94, 103, 109]. При этом у уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля выявлены необычные свойства даже в скалярном случае [29, 33, 98, 105].

Все это свидетельствует об актуальности темы исследования данной диссертационной работы.

Степень разработанности темы исследования

История использования интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в математическом анализе начинается, по-видимому, в XVII веке. Первые упоминания о производных дробного порядка связаны с именами Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, в XVIII веке — с именами Лагранжа и Эйлера. В XIX и начале XX века появляются публикации на данную тему таких знаменитых исследователей, как Лаплас, Фурье, Абель, Лиувилль, Риман, Грюнвальд, Летников, Хэвисайд, Зигмунд, Курант и др. Во второй половине XX века интерес к дробному исчислению возрос, появились научно-технические конференции, посвященные вопросам дробного исчисления, начали появляться специализированные журналы.

На сегоднящний день существуют десятки целых классов определений дробной производной. Отметим посвященные изучению дробных производных работы K. B. Oldham, J. Spanier [114], С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева [39], А. А. Килбаса, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo [105], I. Podlubny [125], А. М. Нахушева [27–29], А. В. Псху [31–35], K. Diethelm [83], M. Kostić [106, 107], С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной [41, 131, 132] и др.

Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной, как правило, по времени, изучались в работах А. Пуанкаре [126], C. W. Oseen [116], J. Leray [108], E. Hopf [102], О. А. Ладыженской [24] в связи с исследованием системы уравнений Навье — Стокса, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости. Работы С. Л. Соболева [42–45] середины XX века, посвященные динамике идеальной равномерно вращающейся жидкости, привлекли повышенное внимание исследователей к не разрешенным относительно старшей производной по времени уравнениям, которые теперь часто называют уравнениями соболевского типа [13, 25]. В последние десятилетия отметим в этом направлении работы R. E. Showalter [133], Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева [46,47,54,130], Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой [3,12,13], Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. А. Щегловой [4–6,74], А. И. Кожанова [19–21], С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова и их учеников [14, 37, 129], А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [22, 23, 25] и их учеников (см. [75, 76] и др.), И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина [17, 18]. Методами теории полугрупп операторов вырожденные эволюционные уравнения (когда оператор при старшей производной по времени не обратим) в банаховых и локально выпуклых пространствах исследуются в работах различных авторов: A. Favini, A. Yagi [84–86], Г. А. Свиридюка [40], И. В. Мельниковой [113], М. В. Фалалеева [53, 54], В. Е. Федорова и его учеников [55, 57–59, 69]. Полученные абстрактные результаты используются при изучении начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных.

В последние десятилетия теория полугрупп операторов получила свое обобщение на случай уравнений дробного порядка [65, 79, 97]. При этом разрешающие семейства операторов уже не обладают полугрупповым свойством [71, 72]. Отметим в этом направлении работы А. В. Глушака и его соавторов (см. [7–10] и др.), теорию разрешающих семейств интегральных эволюционных уравнений Вольтерра, развитую в монографии J. Prüss [128]. Отдельные результаты об эволюционных уравнениях дробного порядка, не разрешенных относительно старшей дробной производной, получены в работах [65,80,110], однако, в этих работах используется условие непрерывной обратимости оператора при старшей дробной производной. Вопросы однозначной разрешимости существенно вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах исследуются в работах В. Е. Федорова и его учеников [65,71,72,79,87,90,92,97]. Также отметим работы М. В. Плехановой и ее учеников [2, 118–122, 124], в которых вырожденные уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах исследуются при условии относительной ограниченности пары операторов в уравнении, а также работы М. Костича [106, 107], в которых методами теории разрешающих операторов исследуются интегро-дифференциальные эволюционные уравнения, включая вырожденные [107].

Постановка начальной задачи для линейного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля неочевидна (см. [105, § 5.2], [33, § 1]), в одномерном случае такое уравнение исследовалось многими авторами. В работах [29, 98, 117] показана однозначная разрешимость задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k,\ \ k = 0, 1, \dots, m-1,$$

для уравнения

$$D^{\alpha}z(t) = \sum_{l=1}^{n} B_l D^{\alpha_l} z(t) \qquad (0.0.1)$$

где $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, при условии $\alpha_n<\alpha\leqslant 1$. В монографии [105] предложены m решений уравнения, которые при $\alpha_n<\alpha-m+1$ являются линейно независимыми (теорема 5.3 на с. 291) и ставится вопрос об их линейной независимости при $\alpha_n\geqslant\alpha-m+1$ (замечание 5.3 на с. 295). В работе [33] показано, что задача типа Коши для исходного уравнения однозначно разрешима при произвольных $z_k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\dots,m-1$, тогда и только тогда, когда $\alpha_n<\alpha-m+1$. Этот результат получен как следствие теоремы об однозначной разрешимости специальной начальной задачи [33]. В [111] исследована некоторая начальная задача для уравнения с многочленом от оператора производной Римана — Лиувилля, в [101] — начальная задача для уравнения с производной Хилфера, более общей, чем производная Римана — Лиувилля. Отметим также работы о разрешимости краевой задачи для системы уравнений с производными Римана — Лиувилля по разным переменным [26], специальных начальных задач для некоторых классов уравнений в банаховых пространствах с композицией производных Римана — Лиувилля [7].

Вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля или вырожденных, изучались в [1,61,70,88,89,95] при условиях на оператор при искомой функции (в вырожденном случае — на пару операторов, при старшей производной и искомой функции), необходимых и достаточных для существования аналитического разрешающего семейства операторов уравнения. В работах [81, 90, 91] изучались начальные задачи для линейных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто в случае ограниченности всех операторов при этих производных, либо в случае существования аналитического разрешающего семейства операторов уравнения. Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто исследовались в работах [73, 118, 123].

Задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами и условиями переопределения, называемые обратными или обратными коэффиентными задачами, играют важную роль во многих прикладных исследованиях, когда характер процесса известен (задан вид уравнения его динамики), некоторые его параметры недоступны для прямого измерения (неизвестные коэффициенты), но могут быть определены с помощью дополнительных измерений доступных параметров (задание условий переопределения) [127]. Среди обратных задач для уравнений первого порядка в банаховых пространствах помимо работ А. И. Прилепко отметим работы И. В. Тихонова, Ю. С. Эйдельмана [48], М. В. Фалалеева [52], М. Аль-Хорани, А. Фавини [78], С. Г. Пяткова [36]. В последние годы активно исследуются различные обратные задачи для уравнений с дробными производными [8, 66–68, 92, 95, 96, 115].

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является исследование вопросов однозначной разрешимости начальных и краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля.

При проведении диссертационного исследования стояла задача нахождения корректной постановки задачи типа Коши для исследуемого класса уравнений, разрешенных относительно старшей производной Римана — Лиувилля. Исследовались вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных однородных, неоднородных и квазилинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, в случае ограниченных линейных операторов при производных и неограниченных линейных замкнутых операторов, порождающих аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов. Эти результаты использованы при постановке и исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля, а также для некоторых обратных задач для таких уравнений. Абстрактные результаты нашли свои приложения при изучении начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Научная новизна

Результатом исследования задачи типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля стало введение в рассмотрение понятия *дефекта* задачи типа Коши — такой целочисленной неотрицательной величины $m^* \leqslant m-1$, что для существования конечных пределов

$$\lim_{t\to 0+} D_t^{\alpha-m+k}z(t) = z_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

а значит, и для существования решения задачи типа Коши, необходимо выполнение равенств $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m^* - 1$. Получаемая в итоге неполная задача типа Коши стала ответом на вопрос, возникший (явно или нет) в работах [29, 33, 98, 105, 117] о возможности корректной постановки задачи Коши для уравнения (0.0.1) при $\alpha_n \geqslant \alpha - m + 1$.

При изучении линейного уравнения с неограниченными операторами при дробных производных в данной работе вводится в рассмотрение класс $\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, наборов линейных замкнутых плотно определенных операторов, показано, что принадлежность ему необходима и достаточна для существования единственного классического решения неполной задачи типа Коши для линейного однородного уравнения, которое аналитически продолжимо в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2.\, t \neq 0\}$. Предложенный класс $\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$ обобщает класс операторов $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ (см. [38, 79]), в который он переходит, если все операторы нулевые, кроме оператора при искомой функции. Однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейных и нелинейных уравнений с производной Римана — Лиувилля и оператором из $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в правой части исследовались в работах [1, 61, 88, 89, 95].

Что касается квазилинейных уравнений, в настоящей работе с помощью понятия дефекта задачи типа Коши, которое в данном случае вводится с учетом наличия младших дробных производных в нелинейном операторе, удалось исследовать уравнения без дополнительных ограничений на порядки младших дробных производных, от которых зависит нелинейный оператор.

Полученные результаты о начальных задачах для уравнений в банаховых пространствах использованы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора высокого порядка по пространственным переменным и с несколькими производными Римана — Лиувилля по времени. Рассмотрены как невырожденный случай, когда многочлен при старшей производной по времени не имеет корней на спектре эллиптического оператора, так и вырожденный, когда корни на спектре у этого многочлена имеются.

Кроме того, путем редукции к уравнениям с несколькими дробными производными в банаховых пространствах удалось исследовать некоторые системы уравнений, описывающие динамику и термоконвекцию в вязкоупругих средах.

Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

В диссертационной работе получены результаты, которые с одной стороны являются обобщением соответствующих результатов в теории дифференциальных уравнений дробного порядка на случай уравнений с несколькими дробными производными, а с другой стороны — обобщают различные факты теории полугрупп операторов на случай дробных дифференциальных уравнений. Тем самым они вносят вклад в развитие теории уравнений с дробными производными и теории полугрупп операторов.

Математические модели, основанные на дробном дифференциальном исчислении, описывают широкий класс процессов и явлений. Поэтому результаты работы (условия однозначной разрешимости, вид решений линейных уравнений, методы доказательства существования нелинейных уравнений) могут быть использованы при исследовании конкретных прикладных задач, в частности, для корректной постановки возникающих при их решении начально-краевых задач, для разработки методов численного решения и др.

Методология и методы исследования

Исследование в диссертационной работе разбито на три части. Сначала изучаются уравнения с ограниченными операторными коэффициентами при производных Римана — Лиувилля в линейной части: линейные однородные и неоднородные уравнения, квазилинейные уравнения. Затем исследуются уравнения с неограниченными операторами в линейной части, предложено условие на набор этих операторов, необходимое и достаточное для существования аналитического разрешающего семейства операторов этого уравнения. В заключительной части рассматриваются вырожденные эволюционные уравнения. В предположении относительной спектральной ограниченности пары операторов при старшей и при второй по старшинству производной исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах, для которых рассмотрены соответствующие неполные задачи типа Коши. Существенно различаются случаи, когда дробная часть порядка второй производной равна, либо отличается от дробной части порядка старшей производной.

Линейные уравнения исследуются с использованием методов преобразования Лапласа и методов теории полугрупп операторов, адаптированных к теории разрешающих семейств операторов уравнений дробного порядка. Локальная однозначная разрешимость квазилинейных уравнений доказывается с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Для этого неполная задача типа Коши для исходного уравнения сводится к интегро-дифференциальному уравнению меньшего порядка и для применения теоремы Банаха выбирается специальное функциональное пространство, полнота и другие свойства которого исследуются предварительно.

Положения, выносимые на защиту

1. Исследована однозначная разрешимость неполной задачи типа Коши для линейных однородных и неоднородных уравнений в банаховых пространствах с несколькими производными Римана — Лиувилля, разрешенных относительно старшей производной, в случае ограниченных операторов при дробных производных, а также в случае набора неограниченных операторов, порождающего аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

2. Получены условия локального существования единственного решения неполной задачи типа Коши для разрешенных относительно старшей производной Римана — Лиувилля квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, линейная часть которых содержит ограниченные операторы при дробных производных, либо набор неограниченных операторов, порождающий аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости некоторых начальных задач для вырожденных линейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля и с ограниченными операторами при них. При этом предполагается выполнение условия относительной спектральной ограниченности пары операторов при двух старших производных.

4. Исследованы вопросы разрешимости и корректности обратных задач с интегральным условием переопределения для уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля в банаховых пространствах. Рассмотрены как разрешенные относительно старшей производной уравнения, так и вырожденные.

5. Полученные абстрактные результаты использованы для исследования однозначной разрешимости ряда начально-краевых задач для уравнений

и систем уравнений в частных производных с дробными производными Римана — Лиувилля по времени.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководители проф. А. И. Кожанов, проф. И. Е. Егоров, проф. С. В. Попов, проф. С. Г. Пятков, проф. А. П. Солдатов, проф. В. Е. Федоров); на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022; Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021; O. A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's. St. Petersburg, 2022; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2022; The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2022.

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах [138–150], из которых 7 статей [138–144] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задачи и общее руководство. Из работ, выполненных в соавторстве с W.-S. Du [140] и B. T. Kien [142, 143], в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

О содержании работы

Диссертационная работа посвящена исследованию вопросов однозначной разрешимости начальных задач для уравнений с дробной производной Римана — Лиувилля

$$D^{\alpha}z(t)=\sum_{j=-r}^{m-1}A_jD^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD^{\alpha_l}z(t)+$$
$$+F(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t),\dots,D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),D^{\gamma_2}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t)) \tag{1}$$

при $t\in(0,T)$, где $n,\varrho\in\mathbb{N}$, $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{Z}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_n<\alpha$, $n_i-1<\gamma_i\leqslant n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, операторы A_j, $j=1,2,\dots,m-1$, B_l, $l=1,2,\dots,n$, C_s, $s=1,2,\dots,r$, линейные. Вводится понятие дефекта m^* для неполной задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=z_k,\ \ k=m^*,m^*+1,\dots,m-1. \tag{2}$$

Первая глава посвящена задаче (1) для линейного уравнения (2) с ограниченными операторами в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. Исследуется однозначная разрешимость линейной однородной задачи и линейной неоднородной, при $F=f(t)$, при условии $f\in C((0,T);\mathcal{Z})\cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$. Затем рассматривается квазилинейное уравнение с нелинейным оператором $F\in C(Z;\mathcal{Z})$, где Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, зависящим от младших дробных производных произвольного порядка. Также получен критерий корректности обратной задачи для уравнения в банаховом пространстве, разрешенного относительно старшей производной Римана — Лиувилля, с ограниченными операторами при производных.

Полученные результаты использованы при постановке и исследовании однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора по пространственным переменным и с несколькими производными Римана — Лиувилля по времени. Кроме того, изучена разрешимость начально-краевых задач для некоторых систем уравнений, моделирующих динамику и термоконвекцию в вязкоупругих средах.

Вторая глава посвящена начальной задаче (1), (2) с линейными и замкнутыми операторами A_j, $j = 1, 2, \dots, m-1$, B_l, $l = 1, 2, \dots, n$, C_s, $s = 1, 2, \dots, r$, имеющими области определения в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, пересечение $\mathcal{D}$ которых плотно в $\mathcal{Z}$. Введено определение класса наборов операторов $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$, показано, что условие

$$(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in \mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$$

необходимо и достаточно для существования аналитического в секторе разрешающего семейства линейного однородного уравнения (1). Исследованы свойства таких семейств операторов. Решение задачи (2) для линейного неоднородного уравнения (1) при $f \in C((0,T); \mathcal{D}) \cap L_1(0,T; \mathcal{D})$ или $f \in C^{\gamma}([0,T]; \mathcal{Z})$ представлено в явном виде в терминах разрешающих семейств операторов. Получены условия локальной однозначной разрешимости неполной задачи типа Коши (2) для квазилинейного уравнения (1).

Во второй главе, в отличие от первой, абстрактные результаты данной главы позволили рассмотреть уравнения с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора по пространственным переменным, в которых степени многочленов при младших дробных производных по времени могут превосходить степень многочлена при старшей производной по времени. То же касается систем уравнений динамики и термоконвекции в вязкоупругих средах.

Третья глава посвящена исследованию разрешимости вырожденного уравнения

$$D^{\alpha}_t Lx(t) = \sum_{j=1}^{m-1} M_j D^{\alpha-m+j}_t x(t) + \sum_{l=1}^{n} N_l D^{\alpha_l}_t x(t) + \sum_{s=1}^{r} S_s J^{\beta_s}_t x(t) + g(t) \qquad (3)$$

при $t \in (0,T)$, где линейные и ограниченные операторы L, M_j, $j = 1, 2, \dots, m-1$, B_l, $l = 1, 2, \dots, n$, C_s, $s = 1, 2, \dots, r$, действуют из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $g \in C((0,T); \mathcal{Y}) \cap L_1(0,T; \mathcal{Y})$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение (3) называется вырожденным. При использовании обозначения $j_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ для индекса, такого, что $A_{j_0} \neq 0$, $A_j = 0$ при $j = j_0+1, j_0+2, \dots, m-1$, рассмотрены два возможных случая: $\alpha - m + j_0 > \alpha_n$ и $\alpha - m + j_0 < \alpha_n$, т. е. случаи, когда вторая по старшинству дробная производная имеет такую же дробную часть, что и старшая, или отличную от неё. В обоих случаях уравнение (3) редуцируется к системе двух уравнений на взаимно дополнительных пространствах при условии $(L, 0)$-ограниченности оператора M_{m-1} (или N_n, в зависимости от того, какая производная является второй по старшинству) и выполнении некоторых дополнительных условий на операторы. В случае $\alpha - m + j_0 > \alpha_n$ значения дефектов обоих уравнений в системе совпадают, а при $\alpha - m + j_0 > \alpha_n$ значения дефектов различны, в таком случае для системы начальные условия выглядят более сложным образом.

Также в третьей главе исследована обратная коэффициентная задача для уравнения с вырожденным оператором L при старшей производной. Она редуцирована к системе двух обратных задач на подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной, при условии, что оператор при второй по старшинству производной $(L, 0)$-ограничен. Получен критерий корректности обратной задачи.

Абстрактные результаты о вырожденных эволюционных уравнениях использованы при исследовании однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора по пространственным переменным в случае, когда многочлен при старшей производной Римана — Лиувилля имеет нули на спектре самосопряженного оператора. Рассмотрены как прямые, так и обратные задачи.

1 Уравнения с ограниченными операторами

Данная глава посвящена исследованию однозначной разрешимости в классическом смысле начальных задач для уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля вида

$$D_t^\alpha z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD_t^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD_t^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ_t^{\beta_s}z(t)+$$
$$+F(t,D_t^{\alpha-m-\varrho}z(t),\ldots,D_t^{\alpha-1}z(t),D_t^{\gamma_1}z(t),D_t^{\gamma_2}z(t),\ldots,D_t^{\gamma_q}z(t)).$$

1.1 Предварительные сведения

В этом параграфе определим используемые в данной работе пространства функций со значениями в банаховых пространствах и некоторые их свойства.

Обозначим $g_\delta(t):=t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta>0$, $t>0$, где $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция. Множество таких функций обладает полугрупповым свойством относительно операции свертки:

$$g_\beta*g_\delta:=\int\limits_0^t g_\beta(t-s)g_\delta(s)ds=g_{\beta+\delta}.$$

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha>0$ для функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathcal{Z}$ определяется как

$$J_t^\alpha f(t):=(g_\alpha*f)(t):=\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s)ds,\quad t>0.$$

Определим $J_t^0f(t):=f(t)$. Операторы дробного интегрирования подчиняются полугрупповому свойству относительно композиции:

$$J_t^\alpha J_t^\beta=J_t^{\alpha+\beta},\ \alpha,\beta\geqslant0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha>0$, где $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, для функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathcal{Z}$ имеет вид

$$D_t^\alpha f(t):=D_t^m(g_{m-\alpha}*f)(t)=D_t^mJ_t^{m-\alpha}f(t),$$

где $D_t^m = \frac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Как и в случае дифференцирования и интегрирования целого порядка, D_t^α является обращением J_t^α слева, но не справа:

$$D_t^\alpha J_t^\alpha f = f, \quad J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D_t^{\alpha-m+k} f(0) g_{\alpha-m+k+1}(t).$$

Под производной Римана — Лиувилля отрицательного порядка $-\alpha < 0$ здесь (первое слагаемое в сумме в правой части последнего равенства) и далее понимается дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ и наоборот:

$$D_t^{-\alpha} f := J_t^\alpha f, \quad J_t^{-\alpha} f := D_t^\alpha f, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Это согласуется со свойствами этих операторов.

Для $\alpha, \beta, t > 0$ имеем $J_t^\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}$, $D_t^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}$, $\beta > \alpha$. Отметим также, что $D_t^\alpha 1 = g_{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

Через $\mathfrak{L}[f]$ обозначим преобразование Лапласа функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, а через $\mathfrak{L}^{-1}[F]$ — обратное преобразование Лапласа функции $F : \Omega \to \mathcal{Z}$, $\Omega \supset \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > \omega\}$ при некотором $\omega \in \mathbb{R}$. Используя свойства преобразований Лапласа и равенство $\mathfrak{L}[g_\alpha](\lambda) = \lambda^{-\alpha}$, получим

$$\mathfrak{L}[J_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^{-\alpha} \mathfrak{L}[h](\lambda),$$

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha] f(\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[f](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} D_t^{\alpha-m+k} f(0) \lambda^{m-1-k}. \tag{1.1.1}$$

1.2 Дефект задачи типа Коши

В данном разделе вводится в рассмотрение оказавшееся ключевым во всей работе понятие *дефекта задачи типа Коши* для уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля и обосновывается необходимость его использования.

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2.1}$$

которое содержит некоторые операторы в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$: A_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, B_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, C_s, $s = 1, 2, \ldots, r$. Под решением уравнения (1.2.1) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l} z \in C^{m_l}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $J_t^{\beta_s} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, и выполняется равенство (1.2.1) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Предполагается исследовать это уравнение с помощью преобразования Лапласа, для этого с учетом формулы (1.1.1) для решения уравнения должны быть известны значения

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.2.2}$$

$$D_t^\gamma z(0) = y_\gamma, \quad \gamma \in \Lambda,$$

где $z_k, y_\gamma \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $\gamma \in \Lambda$. Здесь через Λ обозначено множество $\{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 2, \ldots, \alpha_1 - m_1, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 2, \ldots, \alpha_n - m_n\}$, из которого выброшены повторяющиеся числа (они присутствуют, если среди α_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, есть числа с одинаковой дробной частью). Выполнение начальных условий понимается в предельном смысле в норме пространства $\mathcal{Z}$. Установим, в каком случае указанные начальные условия совместны.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $T > 0$, $J_t^{m-\alpha} z \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{Z})$,

$$z_0 = \lim_{t \to 0+} J_t^{m-\alpha} z(t) \neq 0.$$

Тогда при $t \to 0+$

$$z(t) \sim \frac{t^{\alpha-m} z_0}{\Gamma(\alpha - m + 1)}.$$

Доказательство. Обозначим $J_t^{m-\alpha} z(t) = y(t)$. Тогда

$$z(t) = D_t^{m-\alpha} y(t) = D_t^1 J_t^{\alpha-m+1} y(t) = D_t^1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-m} y(s)}{\Gamma(\alpha - m + 1)} ds =$$

$$= D_t^1 \int\limits_0^t \frac{s^{\alpha-m}y(t-s)}{\Gamma(\alpha-m+1)}ds = \frac{t^{\alpha-m}z_0}{\Gamma(\alpha-m+1)} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-m}y'(s)}{\Gamma(\alpha-m+1)}ds.$$

При этом

$$\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-m}y'(s)}{\Gamma(\alpha-m+1)}ds = \frac{t^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-m}\frac{d}{d\tau}y(t\tau)d\tau =$$

$$= \frac{t^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \left(\int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m}\frac{d}{d\tau}y(t\tau)d\tau + \int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m}\frac{d}{d\tau}y(t\tau)d\tau \right),$$

$$\int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m}\frac{d}{d\tau}y(t\tau)d\tau = \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m}dy(t\tau) =$$

$$= 2^{m-\alpha}y(t/2) - z_0 + (\alpha-m)\int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m-1}y(t\tau)d\tau =$$

$$= 2^{m-\alpha}(y(t/2) - z_0) + (\alpha-m)\int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m-1}(y(t\tau)-z_0)d\tau \to 0$$

при $t \to 0+$.

По теореме о среднем и по определению производной имеем при некотором $\xi \in [t/2, t]$

$$\left\| \int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m}\frac{d}{d\tau}y(t\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant t\int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m}\|y'(t\tau)\|_{\mathcal{Z}}d\tau =$$

$$= \frac{2^{m-\alpha-1}t}{\alpha-m+1}\|y'(\xi)\|_{\mathcal{Z}} = \frac{2^{m-\alpha-1}t}{\alpha-m+1}\left(\left\| \frac{y(\xi+t)-y(\xi)}{t} \right\|_{\mathcal{Z}} + o(1) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{m-\alpha-1}}{\alpha-m+1}\left(\|y(\xi+t)-y(\xi)\|_{\mathcal{Z}} + to(1) \right) \to 0$$

при $t \to 0+$. Тем самым утверждение доказано. $\square$

Лемма 1.2.2. *Пусть $T > 0$, при некотором $k \in \mathbb{N}$ $D_t^{\alpha-m+k}z \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z})$, $z_k = \lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha-m+k}z(t) \neq 0$. Тогда при $t \to 0+$*

$$z(t) \sim \frac{t^{\alpha-m+p}z_p}{\Gamma(\alpha-m+p+1)}$$

для некоторых $p \in \{0, 1, \dots, k\}$, $z_p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Используя обозначение из предыдущего доказательства, получим $D_t^{\alpha-m+k} z = D_t^k J_t^{m-\alpha} z = D_t^k y \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z})$, поэтому по формуле Тейлора при $t \to 0+$

$$y(t) = z_0 + \frac{t}{1!} z_1 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} z_{k-1} + \frac{t^k}{k!} z_k + o(t^k)$$

при некоторых $z_0, z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathcal{Z}$. Обозначим

$$x(t) := y(t) - z_0 - \frac{t}{1!} z_1 - \dots - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} z_{k-1} - \frac{t^k}{k!} z_k = o(t^k) = t^k \zeta(t),$$

где $\lim\limits_{t \to 0+} \zeta(t) = 0$. Тогда $x(0) = 0$ и, рассуждая, как при доказательстве леммы 1.2.1, получим

$$D_t^{m-\alpha} x(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-m} x'(s)}{\Gamma(\alpha-m+1)} ds =$$

$$= \frac{t^{\alpha-m+1}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \left(\int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m} x'(t\tau) d\tau + \int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m} x'(t\tau) d\tau \right),$$

$$t \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m} x'(t\tau) d\tau = \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m} dx(t\tau) =$$

$$= 2^{m-\alpha} x(t/2) + (\alpha - m) \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m-1} x(t\tau) d\tau =$$

$$= 2^{m-\alpha-k} o(t^k) + (\alpha - m) t^k \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m-1} \tau^k \zeta(t\tau) d\tau,$$

$$\left\| \int\limits_0^{1/2} (1-\tau)^{\alpha-m-1} \tau^k \zeta(t\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{2^{-k-1}}{k+1} \max_{s \in [0,t/2]} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} \to 0$$

при $t \to 0+$. При этом для некоторого $\xi \in [t/2, t]$ по теореме о среднем

$$\left\| \int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m} \frac{d}{d\tau} x(t\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant t \int\limits_{1/2}^1 (1-\tau)^{\alpha-m} \|x'(t\tau)\|_{\mathcal{Z}} d\tau =$$

$$= \frac{2^{m-\alpha-1}t}{\alpha - m + 1}\|x'(\xi)\|_{\mathcal{Z}} = o(t^{k+1})$$

при $t \to 0+$.

Таким образом, $D_t^{m-\alpha}x(t) = o(t^{\alpha-m+k})$,

$$z(t) = D_t^{m-\alpha}y(t) = \frac{t^{\alpha-m}z_0}{\Gamma(\alpha-m+1)} + \cdots + \frac{t^{\alpha-m+k}z_k}{\Gamma(\alpha-m+k+1)} + o(t^{\alpha-m+k}).$$

Осталось выбрать $p := \min\{l \in \{0,1,\ldots,k\} : z_l \neq 0\}$. Понятно, что $p = k$, если $z_0 = z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0$. □

Следствие 1.2.1. *Если $\alpha > \alpha_l$, $\alpha_l - m_l > \alpha - m$ для какого-то $l \in \{1,2,\ldots,n\}$ и при некотором $k \in \{0,1,\ldots,m_l-1\}$ $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha_l-m_l+k}z(t) \neq 0$, то z не удовлетворяет условиям* (1.2.2).

Доказательство. В силу леммы 1.2.2 для некоторых $p \in \{0,1,\ldots,k\}$, $x_p \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}$

$$z(t) \sim \frac{t^{\alpha_l-m_l+p}x_p}{\Gamma(\alpha_l-m_l+p+1)} \tag{1.2.3}$$

при $t \to 0+$. Так как $\alpha_l - m_l > \alpha - m$ и $\alpha > \alpha_l$, то $m > m_l$. Тогда имеем $p \leqslant k \leqslant m_l - 1 \leqslant m-2$, $p+1 \leqslant m-1$, следовательно,

$$D_t^{\alpha-m+p+1}z(t) \sim \frac{t^{\alpha_l-m_l-\alpha+m-1}x_p}{\Gamma(\alpha_l-m_l-\alpha+m)} \to \infty$$

при $t \to 0+$, так как $\alpha_l - m_l - \alpha + m - 1 < 0$. □

Следствие 1.2.2. *Если $\alpha > \alpha_l$, $\alpha_l - m_l < \alpha - m$ для какого-то $l \in \{1,2,\ldots,n\}$ и при некотором $k \in \{0,1,\ldots,m_l-1\}$ $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha_l-m_l+k}z(t) \neq 0$, то z не удовлетворяет условиям* (1.2.2).

Доказательство. При некоторых $p \in \{0,1,\ldots,k\}$, $x_p \in \mathcal{Z}\setminus\{0\}$ и в силу (1.2.3)

$$D_t^{\alpha-m+p}z(t) \sim \frac{t^{\alpha_l-m_l-\alpha+m}x_p}{\Gamma(\alpha_l-m_l-\alpha+m+1)} \to \infty$$

при $t \to 0+$, так как $\alpha_l - m_l - \alpha + m < 0$. □

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\ldots,n$, введем обозначения

$$\underline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1,2,\ldots,n\},\ \alpha_l - m_l < \alpha - m\}, \quad \underline{m} = \lceil \underline{\alpha} \rceil,$$

$$\overline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\, \alpha_l - m_l > \alpha - m\}, \quad \overline{m} = \lceil \overline{\alpha} \rceil.$$

Если пусто множество $\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\, \alpha_l - m_l < \alpha - m\}$ или $\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\, \alpha_l - m_l > \alpha - m\}$, то считаем $\underline{m} = 0$ или $\overline{m} = 0$ соответственно.

Заметим, что для целых α_l имеем $\alpha_l = m_l$, поэтому они всегда попадают во вторую группу при условии, что α — не целое, иначе вообще вторая группа пуста; в первой группе — только дробные числа. Поэтому по построению всегда $\underline{\alpha} < \underline{m}$, $\overline{m} < m$ (иначе найдется α_l, большее α). Если какое-то из множеств, указанных при определении чисел $\overline{\alpha}$, $\underline{\alpha}$, пусто, считаем по определению соответствующую величину $\underline{m}$ или $\overline{m}$ равной нулю.

Следствие 1.2.3. *Если* $\underline{\alpha} > 1$ *и* $z_k \neq 0$ *при каком-либо* $k \in \{0, 1, \dots, \underline{m} - 2\}$, *то не существует решения задачи* (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство. Для $k \in \{0, 1, \dots, \underline{m} - 2\}$, $p \in \{0, 1, \dots, k\}$ имеем $\alpha - m + p \leqslant \alpha - m + k \leqslant \alpha - m + \underline{m} - 2 \leqslant \underline{m} - 2 < \underline{\alpha} - 1$. Для решения задачи (1.2.1), (1.2.2) в силу леммы 1.2.2 при некотором $x_p \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$

$$D_t^{\underline{\alpha}-1} z(t) \sim C t^{\alpha - m + p - \underline{\alpha} + 1} x_p \to \infty$$

при $t \to 0+$. $\square$

Следствие 1.2.4. *Если* $\overline{\alpha} > 0$ *и* $z_k \neq 0$ *при каком-либо* $k \in \{0, 1, \dots, \overline{m} - 1\}$, *то не существует решения задачи* (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство. При $k \in \{0, 1, \dots, \overline{m} - 1\}$, $p \in \{0, 1, \dots, k\}$ имеем $\alpha - m + p \leqslant \alpha - m + k \leqslant \alpha - m + \overline{m} - 1 < \overline{\alpha} - 1$, так как по построению $\overline{\alpha} - \overline{m} > \alpha - m$. Поэтому в силу леммы 1.2.2 для решения задачи (1.2.1), (1.2.2) имеем

$$D_t^{\overline{\alpha}-1} z(t) \sim C t^{\alpha - m + p - \overline{\alpha} + 1} x_p \to \infty$$

при $t \to 0+$. $\square$

Обозначим $m^* := \max\{\underline{m} - 1, \overline{m}\}$. Нетрудно увидеть, что минимально возможное значение этой величины есть 0, а максимально возможное — $m^* = m - 1$, когда $\underline{m} = m$ или $\overline{m} = m - 1$ (ситуация $\overline{m} = m$ невозможна, так как $\alpha > \alpha_l$, $l = 1, 2, \dots, n$).

В силу следствий 1.2.1–1.2.4 для функции, удовлетворяющей всем условиям (1.2.2), с необходимостью выполняются условия

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=0,\ k=0,1,\ldots,m^*-1,\quad D_t^{\gamma}z(0)=0,\ \gamma\in\Lambda.$$

Поэтому для уравнения (1.2.1) имеет смысл рассматривать только, вообще говоря, *неполную задачу типа Коши*

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=z_k,\ k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1. \tag{1.2.4}$$

Поскольку $m^*\leqslant m-1$, (1.2.4) содержит не менее одного условия.

Параметр m^*, определяемый набором чисел $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, назовем *дефектом задачи типа Коши* (1.2.2) для уравнения (1.2.1), поскольку он характеризует отклонение количества начальных условий в задаче от максимального их количества m.

1.3 Неполная задача типа Коши для однородного уравнения

Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\ldots,n$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_r\geqslant 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_t^{\alpha}z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD_t^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD_t^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ_t^{\beta_s}z(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1.3.5}$$

где $A_j\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $B_l\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\ldots,n$, $C_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\ldots,r$. Под решением уравнения (1.3.5) будем понимать такую функцию $z:\mathbb{R}_+\to\mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha}z\in C^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l}z\in C^{m_l}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $l=1,2,\ldots,n$, $J_t^{\beta_s}z\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $s=1,2,\ldots,r$, и выполняется равенство (1.3.5) при $t\in\mathbb{R}_+$.

Пусть m^* — дефект задачи типа Коши. Рассмотрим неполную задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=z_k,\ k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1, \tag{1.3.6}$$

для уравнения (1.3.5). Решением задачи (1.3.5), (1.3.6) называется решение $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ уравнения (1.3.5), для которого $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$ и условия (1.3.6) выполнены.

Замечание 1.3.1. В силу рассуждений из предыдущего раздела, рассматривая неполную задачу типа Коши (1.3.6), мы подразумеваем, что условия $D_t^{\alpha-m+k} z(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m^* - 1$, выполняются по умолчанию, поскольку они необходимы для разрешимости задачи.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \dots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1.3.5), (1.3.6), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p,$$

где

$$Z_p(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \cdot \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+\alpha-m} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right)^{-1},$$

контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$, $\Gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$, $r_0 > 0$ *— достаточно большое число.*

Доказательство. Покажем экспоненциальную ограниченность оператор-функций Z_p, $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$. Пусть $N = m - 1 + n + r$,

$$r_A = \max\left\{ \left(2N\|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\right)^{\frac{1}{m-j}}, j = 1, 2, \dots, m-1 \right\},$$

$$r_B = \max\left\{ \left(2N\|B_l\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\right)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_l}}, l = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$r_C := \max\left\{ \left(2N\|C_s\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta_s}}, s = 1, 2, \dots, r \right\}, \quad r_0 = \max\{r_A, r_B, r_C\},$$

тогда при $|\lambda| \geqslant r_0$ имеем, разложив обратный оператор в ряд Неймана,

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = |\lambda|^{-\alpha} \left\| \sum_{\rho=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} C_s \right)^{\rho} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant$$

$$\leqslant 2|\lambda|^{-\alpha}.$$

Рассмотрим интеграл, задающий Z_p, на части контура Γ_+, возьмём $\lambda = re^{i\pi}$ и получим для нормы этого интеграла при $p = 0$ (если $m^* = 0$) оценку сверху

$$2\int\limits_{r_0}^{+\infty} \left(r^{m-1-\alpha} + \sum_{j=1}^{m-1} r^{j-1-\alpha} \|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \right) e^{-rt} dr \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{tr_0}^{+\infty} \frac{\tau^{m-1-\alpha} e^{-\tau}}{t^{m-\alpha}} d\tau \leqslant \frac{c_1 \Gamma(m-\alpha)}{t^{m-\alpha}}$$

и при $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $p \geqslant m^*$,

$$2\int\limits_{r_0}^{+\infty} \left(r^{m-1-p-\alpha} + \sum_{j=p+1}^{m-1} r^{j-1-p-\alpha} \|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \right) e^{-rt} dr \leqslant c_2 r_0^{m-p-\alpha} e^{-r_0 t}.$$

На контуре Γ_- имеем аналогичные неравенства. Осталось получить аналогичную оценку для нормы интеграла на части контура Γ_0:

$$2\left(r_0^{m-1-p-\alpha} + \sum_{j=p+1}^{m-1} r_0^{j-1-p-\alpha} \|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \right) \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{tr_0 \cos\phi} d\phi \leqslant c_3 e^{r_0 t} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi = 2\pi c_3 e^{r_0 t}.$$

В итоге

$$\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ke^{r_0 t}}{t^{m-\alpha}}, \quad \|Z_p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ke^{r_0 t}, \quad p = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad (1.3.7)$$

и к функциям Z_p, $p = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$ можно применять преобразование Лапласа, так как справедливо неравенство $m - \alpha < 1$.

При $\mathrm{Re}\lambda > r_0$, где r_0 взято из определения контура Γ, имеем

$$\mathfrak{L}[Z_p](\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{R_\lambda}{\mu - \lambda} \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j \right) d\lambda =$$

$$= R_\mu \left(\mu^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-1-p} A_j \right),$$

так как при всех $p = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\left\| \frac{R_\lambda}{\mu - \lambda} \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{c_4}{|\lambda|^{\alpha-m+2}},$$

$\alpha - m + 2 > 1$.

Из полученного следует, что при $p = 0, 1, \ldots, m-1$, $p \geqslant m^*$

$$\mathfrak{L}\left[J_t^{m-\alpha} Z_p\right](\mu) = R_\mu \left(\mu^{\alpha-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j-1-p} A_j \right),$$

$$J_t^{m-\alpha} Z_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{\alpha+j-m} A_j \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} I +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha+j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}},$$

поэтому по теореме о вычетах $J_t^{m-\alpha} Z_0(0) := \lim\limits_{t \to 0+} J_t^{m-\alpha} Z_0(t) = I$, $J_t^{m-\alpha} Z_p(0) := \lim\limits_{t \to 0+} J_t^{m-\alpha} Z_p(t) = 0$ при $p = 1, 2, \ldots, m-1$. Здесь используются неравенства $p+1+m-p = m+1 > 1$, $p+1+\alpha-\alpha_l \geqslant 1+\alpha-\alpha_l > 1$, $p+1+\beta_s+\alpha > 1$.

Далее, пусть $m^* = 0$, т. е. $\underline{m} \leqslant 1$, $\overline{m} = 0$. Это означает, что $\alpha_l - m_l < \alpha - m$ и $\alpha_l < 1$ для всех $l = 1, 2, \ldots, n$. Тогда при $\alpha > 1$ имеем $\alpha - \alpha_l > 1$ и

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+1} Z_0\right](\mu) = R_\mu \left(\mu^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha+j-m} A_j \right) - I =$$

$$= R_\mu \left(\sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s \right),$$

$$D_t^{\alpha-m+1} Z_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

поэтому $D_t^{\alpha-m+1} Z_0(0) = 0$. Продолжая этот процесс, на $(m-1)$-м шаге получим

$$D_t^{\alpha-1} Z_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l+m-2} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s+m-2} C_s \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$D_t^{\alpha-1}Z_0(0)=0$, так как $\alpha_l-\alpha+m<m_l\leqslant 1$ (см. начало абзаца), следовательно, $\alpha_l-\alpha+m-2<-1$.

Пусть $m^*\leqslant p$, т. е. $\underline{m}\leqslant p+1$, $\overline{m}\leqslant p$, тогда $\alpha_l<p+1$ при $\alpha_l-m_l<\alpha-m$, а также $\alpha_l\leqslant p$ при $\alpha_l-m_l>\alpha-m$. Получаем при $p=2,3,\ldots,m-1$, $q=1,2,\ldots,p-1$

$$D_t^{\alpha-m+q}Z_p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}d\mu}{\lambda^{p-q+1}}I+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda^{\alpha+j-m}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)\frac{e^{\lambda t}d\lambda}{\lambda^{p-q+1}},$$

следовательно, $D_t^{\alpha-m+q}Z_p(0)=0$, так как $p-q+1\geqslant 2$. Отсюда же видно, что $D_t^{\alpha-m+p}Z_p(0)=I$ по теореме о вычетах.

При $p\leqslant m-2$ имеем

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+p+1}Z_p\right](\mu)=R_\mu\left(\mu^\alpha I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\mu^{\alpha+j-m}A_j\right)-I=$$

$$=R_\mu\left(\sum_{j=1}^{p}\mu^{\alpha+j-m}A_j+\sum_{l=1}^{n}\mu^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\mu^{-\beta_s}C_s\right),$$

$$D_t^{\alpha-m+p+1}Z_p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda^{\alpha+j-m}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)e^{\lambda t}d\lambda.$$

При этом $j-m\leqslant p-m\leqslant -2$, для $\alpha_l-m_l<\alpha-m$ выполняется

$$\alpha-\alpha_l>m-m_l\geqslant m-\underline{m}\geqslant m-(p+1)\geqslant m-(m-2)-1=1,$$

а для $\alpha_l-m_l>\alpha-m$ справедливы неравенства $\alpha-\alpha_l\geqslant\alpha-p\geqslant\alpha-m+2>1$. Потому и $\alpha>1$, следовательно, $D_t^{\alpha-m+p+1}Z_p(0)=0$. Продолжая процесс, получим при $p\leqslant m-3$, $q=p+2,p+3,\ldots,m-1$

$$D_t^{\alpha-m+q}Z_p(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{q-p-1}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda^{\alpha+j-m}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

$j-m+q-p-1\leqslant q-m-1\leqslant -2$, для $\alpha_l-m_l<\alpha-m$ имеем

$$p+1-q+\alpha-\alpha_l>p+2-m+m-m_l=p+2-m_l\geqslant 1,$$

а для $\alpha_l - m_l > \alpha - m$ выполняется

$$p + 1 - q + \alpha - \alpha_l \geqslant p + 2 - m + \alpha - p = 2 - m + \alpha > 1.$$

Так как $p + 1 - q < 0$, из полученного следует, что $\alpha > 1$ и, тем более, $\alpha + \beta_s > 1$ при всех $s = 1, 2, \dots, r$. Таким образом, $D_t^{\alpha-m+q} Z_p(0) = 0$.

Проверим выполнение условий $D_t^{\gamma} z(0) = 0$, $\gamma \in \Lambda$. Пусть $m^* \leqslant p$, т. е. $m_l \leqslant p+1$ при $\alpha_l - m_l < \alpha - m$, $\alpha_l \leqslant p$ при $\alpha_l - m_l > \alpha - m$. При $l = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, m_l - 1$

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha_l - m_l + k} Z_p\right](\mu) = \mu^{\alpha_l - m_l + k + m - 1 - p} R_\mu \left(I - \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{j-m} A_j\right),$$

$D_t^{\alpha_l - m_l + k} Z_p(0) = 0$, поскольку при $\alpha_l - m_l < \alpha - m$

$$-\alpha_l + m_l - k + \alpha - m + p + 1 > -k + p + 1 \geqslant -m_l + p + 2 \geqslant 1,$$

а при $\alpha_l - m_l > \alpha - m$

$$-\alpha_l + m_l - k + \alpha - m + p + 1 \geqslant \alpha - m - \alpha_l + p + 2 \geqslant \alpha - m + 2 > 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha} Z_p\right](\mu) &= \mu^{\alpha} \mathfrak{L}[Z_p](\mu) - \mu^{m-1-p} I = \\ &= \mu^{\alpha} R_\mu \left(\mu^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-1-p} A_j\right) - \mu^{m-1-p} I = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha+j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right) R_\mu \times \\ &\times \left(\mu^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-1-p} A_j\right) - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-1-p} A_j = \\ &= \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} Z_p + \sum_{l=1}^{n} B_l D_l^{\alpha_j} Z_p + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} Z_p\right](\mu). \end{aligned}$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа, получим, что Z_p является решением уравнения (1.3.5) при $t > 0$, $p = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1$.

Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — два решения задачи (1.3.5), (1.3.6) на $\mathbb{R}_+$. Зафиксируем $T > 0$, тогда $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ — решение задачи (1.3.5), (1.3.6) при

$z_p = 0$, $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$, на интервале $(0,T)$. Доопределим функцию y нулем при $t \in [T,+\infty)$. Такая функция ограничена и также является решением этой задачи при всех $t > 0$, кроме, может быть, $t = T$. Подействуем преобразованием Лапласа на обе части равенства

$$D_t^\alpha y(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} y(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} y(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_l} y(t)$$

и получим

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha y](\mu) = \mu^\alpha \mathfrak{L}[y](\mu) = \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} y + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} y + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} y\right](\mu) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right) \mathfrak{L}[y](\mu).$$

Поэтому

$$\left(\mu^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right) \mathfrak{L}[y](\mu) \equiv 0$$

и при достаточно больших $|\mu|$ имеем $\mathfrak{L}[y](\mu) \equiv 0$. Отсюда $z_1(t) - z_2(t) = y(t) \equiv 0$ при $t \in (0,T)$. Так как $T > 0$ можно выбрать сколь угодно большим, $z_1(t) = z_2(t)$ при всех $t > 0$. $\square$

1.4 Неоднородное уравнение

Пусть $T \in (0,\infty]$. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + f(t), \ t \in (0,T). \tag{1.4.8}$$

при заданной функции $f \in C((0,T);\mathcal{Z}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$.

Решением задачи

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = 0, \ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{1.4.9}$$

для уравнения (1.4.8) будем называть такую функцию $z : (0,T) \to \mathcal{Z}$, что выполняются следующие включения: $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((0,T);\mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([0,T);\mathcal{Z})$,

$J_t^{m_l-\alpha_l}z \in C^{m_l}((0,T);\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $J_t^{\beta_s}z \in C((0,T);\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, и выполняются равенства (1.4.8) при $t \in (0,T)$ и (1.4.9).

Обозначим

$$V_\kappa(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha+\kappa}R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda, \quad t > 0, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1.4.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, $f \in C((0,T);\mathcal{Z}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$. *Тогда функция*

$$z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds$$

является единственным решение задачи (1.4.8), (1.4.9).

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве неравенств (1.3.7), получим при $t \in [0,T]$, $\kappa > 1$

$$\|V_{-\kappa}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant 4\int\limits_{r_0}^{+\infty} r^{-\kappa}e^{-rt}dr + 2r_0^{-\kappa}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{tr_0\cos\phi}d\phi \leqslant \frac{4e^{-r_0t}}{(\kappa-1)r_0^{\kappa-1}} + \frac{4\pi e^{r_0t}}{r_0^\kappa} \leqslant C$$

для некоторого $C > 0$. Кроме того,

$$V_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha-1}R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda = I +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1}\sum_{\rho=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j + \sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l-\alpha}B_l + \sum_{s=1}^{r}\lambda^{\beta_s-\alpha}C_s\right)^\rho e^{\lambda t}d\lambda =$$

$$= I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha-1}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j + \sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l-\alpha}B_l + \sum_{s=1}^{r}\lambda^{\beta_s-\alpha}C_s\right)R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda,$$

при этом для $\lambda \in \Gamma$

$$\left\|\lambda^{\alpha-1}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j + \sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l-\alpha}B_l + \sum_{s=1}^{r}\lambda^{\beta_s-\alpha}C_s\right)R_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{c}{|\lambda|^{1+\delta}},$$

где $\delta = \min\{1, \alpha - \alpha_l : l = 1, 2, \ldots, n\}$. Следовательно, при $t \in [0, T]$

$$\|V_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant 1 + 2c \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{e^{-rt}}{r^{1+\delta}} dr + \frac{c}{r_0^{1+\delta}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{tr_0 \cos\phi} d\phi \leqslant 1 + \frac{2ce^{-r_0 t}}{\delta r_0^{\delta}} + \frac{2\pi c e^{r_0 t}}{r_0^{1+\delta}} \leqslant C,$$

$$\left\| \int\limits_0^t V_{-\kappa}(t-s) f(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C \int\limits_0^t \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} ds, \quad \kappa \geqslant 1. \tag{1.4.10}$$

Доопределим f нулем при $t \in [T, \infty)$ и получим следующие равенства:

$$\mathfrak{L}[z_f](\mu) = \mathfrak{L}[Z_{m-1}](\mu)\mathfrak{L}[f](\mu) = R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu), \quad \mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha} z_f](\mu) = \mu^{\alpha - m} R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$J_t^{m-\alpha} z_f(t) = \int\limits_0^t V_{-m}(t-s) f(s) ds,$$

поэтому $J_t^{m-\alpha} z_f(0) = 0$ в силу (1.4.10). При $k = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k} z_f](\lambda) = \mu^{\alpha+k-m} R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$D_t^{\alpha-m+k} z_f(t) = \int\limits_0^t V_{k-m}(t-s) f(s) ds, \quad D_t^{\alpha-m+k} z_f(0) = 0$$

с учетом неравенств (1.4.10) и включения $f \in L_1(0, T; \mathcal{Z})$.

Проверим, что $D_t^\gamma z_f(0) = 0$ при $\gamma = \alpha_l - m_l + k$, $k \in \{0, 1, \ldots, m_l - 1\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathfrak{L}[D_t^\gamma z_f](\mu) = \mu^{\alpha_l - m_l + k} R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$D_t^\gamma z_f(t) = \int\limits_0^t V_{\alpha_l - m_l + k - \alpha}(t-s) f(s) ds, \quad D_t^\gamma z_f(0) = 0$$

в силу (1.4.10), так как $\alpha + m_l - \alpha_l - k \geqslant \alpha - \alpha_l + 1 > 1$.

Наконец,

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha z_f](\mu) = \mu^\alpha R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) = \mathfrak{L}[f](\mu) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha+j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s \right) R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) =$$

$$= \mathfrak{L}[f](\mu) + \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z_f(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z_f(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z_f(t) \right].$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим равенство (1.4.8) при $t \in (0, T)$, так как $f \in C((0, T); \mathcal{Z})$.

Доказательство единственности решения ничем не отличается от доказательства единственности решения однородной задачи в теореме 1.3.1. $\square$

В силу линейности исследуемого уравнения (1.4.8) сразу получим следующий результат.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \dots, m-1$, $f \in C((0, T); \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1.3.6), (1.4.8), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds.$$

Замечание 1.4.1. Неравенство $\alpha_n < \alpha - m + 1$ равносильно совокупности двух соотношений $\underline{m} \leqslant 1$, $\overline{m} = 0$, а потому и равенству $m^* = 0$, при котором в силу теоремы 1.3.1 полная задача типа Коши (1.3.6) для уравнения (1.4.8) однозначно разрешима, что соответствует результатам работ [29, 98, 117], полученным при $\alpha_n < \alpha \leqslant 1$, и монографии [105, § 5.2] — при любых $\alpha > 0$. Кроме того, условие $m^* = 0$ является не только достаточным, но и необходимым для однозначной разрешимости задачи (1.3.6), (1.4.8) в силу следствий 1.2.3, 1.2.4, что соответствует утверждению следствия 1 из работы [33].

Замечание 1.4.2. С помощью формулы Ганкеля можно представить найденные операторы $Z_p(t)$ через функцию Миттаг-Леффлера нескольких переменных при условии, что все операторы A_j, B_l, C_s попарно коммутируют:

$$Z_p(t) = t^{\alpha - m + p} E_{\overline{\mu}, \alpha - m + 1 + p}(\overline{F}) - \sum_{j=p+1}^{m-1} t^{\alpha + p - j} E_{\overline{\mu}, \alpha - j + 1 + p}(\overline{F}) A_j,$$

где

$$E_{(\mu_1,\dots,\mu_N),\nu}(z_1,\dots,z_N) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_N=k \\ l_1\geqslant 0,\dots,l_N\geqslant 0}} \frac{k!}{l_1!l_2!\cdots l_N!} \frac{\prod\limits_{i=1}^{N} z_i^{l_i}}{\Gamma\left(\nu+\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i l_i\right)},$$

$$N = m+n+r-1,$$

$$\overline{\mu} = (m-1, m-2, \dots, 1, \alpha-\alpha_1, \dots, \alpha-\alpha_n, \alpha+\beta_1, \dots, \alpha+\beta_r),$$

$$\overline{F} = (A_1 t^{m-1}, \dots, A_{m-1}t, B_1 t^{\alpha-\alpha_1}, \dots, B_n t^{\alpha-\alpha_n}, C_1 t^{\alpha+\beta_1}, \dots, C_r t^{\alpha+\beta_r}).$$

См. по этому поводу также [98].

1.5 Один класс линейных обратных задач

Рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + \varphi(t)u, \quad (1.5.1)$$

при $t \in (0,T]$, где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, операторы A_j, $j = 1,2,\dots,m-1$, B_l, $l = 1,2,\dots,n$, C_s, $s = 1,2,\dots,r$, линейны и ограничены в $\mathcal{Z}$, кроме того, $\varphi \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$, m^* — дефект задачи типа Коши. Начальные условия типа Коши будут иметь вид

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \;\; k = m^*, m^*+1, \dots, m-1. \quad (1.5.2)$$

Условие переопределения для обратной задачи возьмем в виде

$$\int_0^T z(t)d\mu(t) = z_T, \quad (1.5.3)$$

где функция μ имеет на отрезке $[0,T]$ ограниченную вариацию, интеграл понимается в смысле интеграла Римана — Стилтьеса.

Решением задачи (1.5.1), (1.5.2), где элемент $u \in \mathcal{Z}$ известен, будем называть такое $z : (0,T] \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((0,T];\mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})$,

$J_t^{m_l-\alpha_l}z \in C^{m_l}((0,T];\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $J_t^{\beta_s}z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, и выполняются равенства (1.5.1) и (1.5.2) при $t \in (0,T]$.

Рассмотрим обратную задачу (1.5.1)–(1.5.3), где u — неизвестный элемент. Под решением этой задачи будет понимать пару (z,u), где решение $z : (0,T] \to \mathcal{Z}$ задачи (1.5.1), (1.5.2) с соответствующим $u \in \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (1.5.3). Для краткости решением задачи (1.5.1)–(1.5.3) будем также называть соответствующий элемент $u \in \mathcal{Z}$.

Назовем задачу (1.5.1)–(1.5.3) корректной, если для любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1,\dots,m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{Z}$, такое, что $\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C(\|z_{m^*}\|_{\mathcal{Z}} + \|z_{m^*+1}\|_{\mathcal{Z}} + \dots + \|z_{m-1}\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}})$, где $C > 0$ не зависит от z_k, $k = m^*, m^*+1,\dots,m-1$, и z_T.

При заданных $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1,\dots,m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ обозначим

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{m-1}(t-s)\varphi(s)ds.$$

Теорема 1.5.1. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, $\varphi \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию, при* $m^* = 0$ *существует такое* $\varepsilon \in (0,T]$, *что* $\mu \in C^1([0,\varepsilon];\mathbb{R})$. *Тогда для корректности задачи* (1.5.1)–(1.5.3) *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi^{-1}\psi$.

Доказательство. По теореме 1.4.1 решение задачи типа Коши (1.5.1), (1.5.2) существует при любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1,\dots,m-1$, $u \in \mathcal{Z}$ и имеет вид

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)\varphi(s)u ds. \tag{1.5.4}$$

Подставим решение (1.5.4) в условие (1.5.3) и получим равенство

$$\int_0^T d\mu(t) \left(\sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) u ds \right) = z_T.$$

Отсюда получим уравнение $\chi u = \psi$, которое равносильно задаче (1.5.1)–(1.5.3). Его однозначная разрешимость при любом $\psi \in \mathcal{Z}$ в точности означает существование обратного оператора $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Тогда

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \|\chi^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \left(\|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{p=m^*}^{m-1} \left\| \int_0^T Z_p(t) z_p d\mu(t) \right\|_{\mathcal{Z}} \right).$$

При доказательстве теоремы 1.3.1 были получены неравенства

$$\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ke^{r_0 t}}{t^{m-\alpha}}, \quad \|Z_p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ke^{r_0 t}, \quad p = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{1.5.5}$$

Поэтому при $p = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\left\| \int_0^T Z_p(t) z_p d\mu(t) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ke^{r_0 T} \|z_p\|_{\mathcal{Z}} V_0^T(\mu),$$

где $V_0^T(\mu)$ — вариация функции μ на отрезке $[0, T]$. Если же $m^* = 0$, то

$$\left\| \int_0^T Z_0(t) z_0 d\mu(t) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \left\| \int_0^\varepsilon Z_0(t) z_0 \mu'(t) dt \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \left\| \int_\varepsilon^T Z_0(t) z_0 d\mu(t) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant$$

$$\leqslant Ke^{r_0 \varepsilon} \|z_0\|_{\mathcal{Z}} \|\mu\|_{C^1([0,\varepsilon];\mathbb{R})} \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{m-\alpha}} + \max_{t \in [\varepsilon, T]} \frac{Ke^{r_0 t}}{t^{m-\alpha}} \|z_0\|_{\mathcal{Z}} V_0^T(\mu).$$

Таким образом, обратная задача корректна при $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. $\square$

1.6 Квазилинейные уравнения специального вида

В этом параграфе будем рассматривать дробные интегралы и дробные производные Римана — Лиувилля с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\alpha f(t) := \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > t_0,$$

где $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$.

Пусть Z открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m$, $F : Z \to \mathcal{Z}$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$,

$l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $z_k \in \mathcal{Z}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) +$$

$$+ F(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)). \qquad (1.6.1)$$

Решением неполной задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \ \ k = m^*, m^* + 1, \ldots, m-1, \qquad (1.6.2)$$

для уравнения (1.6.1) на $(t_0, t_1]$ будем называть $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такое что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l - \alpha_l} z \in C^{m_l}((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при $l = 1, 2, \ldots, n$ и $J_t^{\beta_s} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, выполнены условия (1.6.2), при $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)) \in Z$ и равенство (1.6.1) при $t \in (t_0, t_1]$.

Введем следующие обозначения $\overline{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathcal{Z}^m$, $S_\delta(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1} : \|y_k - x_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta, \, k = 0, 1, \ldots, m-1\}$.

Отображение $F : Z \to \mathcal{Z}$ назовем локально липшицевым по $\overline{x}$ если для всех $(t, \overline{x}) \in Z$ существует $\delta > 0$, $l > 0$, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\overline{x}) \subset Z$ и для всех $(s, \overline{y}), (s, \overline{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\overline{x})$ верно неравенство

$$\|F(s, \overline{y}) - F(s, \overline{v})\|_{\mathcal{Z}} \leqslant l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - v_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Лемма 1.6.1. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^* + 1, \ldots, m-1$, Z *открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{m^*}, z_{m^*+1}, \ldots, z_{m-1}) \in Z$, $F \in C(Z; \mathcal{Z})$. *Тогда функция* $z : (t_0, t_1] \to \mathcal{Z}$ *является решением задачи* (1.6.1), (1.6.2) *на* $(t_0, t_1]$ *в том и только том случае, когда* $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ *и для всех* $t \in (t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t - t_0) z_p + \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t - s) F(s, D_s^{\alpha-m} z(s), \ldots, D_s^{\alpha-1} z(s)) ds. \qquad (1.6.3)$$

Доказательство. Если z решение задачи (1.6.1), (1.6.2), то отображение

$$t \to F(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}z(t))$$

действует непрерывно из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$ в силу определения решения при достаточно малых $t_1 - t_0$. По теореме 1.4.1 решение удовлетворяет уравнению (1.6.3).

Пусть $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и для всех $t \in (t_0, t_1]$ z удовлетворяет уравнению (1.6.3), тогда можно проверить, что z является решением задачи (1.6.1), (1.6.2) в силу теоремы 1.4.1 и дословно повторяя доказательство леммы 1.4.1. $\square$

Теорема 1.6.1. *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{m^*}, z_{m^*+1}, \ldots, z_{m-1}) \in Z$, отображение $F \in C(Z; \mathcal{Z})$ является локально липшицевым по $\overline{x}$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (1.6.1), (1.6.2) имеет единственное решение на $(t_0, t_1]$.*

Доказательство. Возьмем $y := J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1], \mathcal{Z})$, следовательно, $y^{(k)} = D_t^{\alpha-m+k}z$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Тогда отображение

$$t \to F(t, y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$$

действует непрерывно из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$. По лемме 1.6.1 достаточно показать, что уравнение

$$y(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} J_t^{m-\alpha} Z_p(t-t_0)z_p + J_t^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F(s, y(s), \ldots, y^{(m-1)}(s))ds \tag{1.6.4}$$

имеет единственное решение $y \in C^{m-1}([t_0, t_1], \mathcal{Z})$ для некоторого $t_1 > t_0$.

В теореме 1.3.1 доказано, что $D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}(0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots, m-2$.

Для всех $p = 0, 1, \dots, m-1$

$$\left\| \frac{R_\lambda}{\mu - \lambda} \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|^{\alpha - m + 2}},$$

$\alpha - m + 2 > 1$, тогда, $\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+n} Z_{m-1} \right](\mu) = \mu^{\alpha+n-m} R_\mu$, при $t \in [t_0, t_1]$, $n = 0, 1, \dots, m-2$,

$$\|D_t^{\alpha-m+n} Z_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \|\lambda^{\alpha+n-m} R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} |e^{\lambda t}| ds \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_\delta^\infty r^{n-m} dr + C_3 \leqslant C_4. \tag{1.6.5}$$

При $n = m-1$ мы имеем

$$D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha-1} R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda =$$

$$= I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^{-1} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha+j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda,$$

для $\lambda \in \Gamma$

$$\left\| \lambda^{-1} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha+j-m} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) R_\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_5}{|\lambda|^{1+\delta}},$$

где $\delta = \min\{1, \alpha - \alpha_n\}$. Следовательно, при $t \in [t_0, t_1]$

$$\|D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_6. \tag{1.6.6}$$

Пусть $\tau > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что $[t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\overline{z}) \subset Z$, где $\overline{z} = (0, 0, \dots, 0, z_{m^*}, z_{m^*+1}, \dots, z_{m-1})$ строится по исходным данным (1.6.2). Обозначим через $\mathcal{S}$ множество функций $y \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, таких, что $\|y^{(q)}(t)\| \leqslant \delta$, $q = 0, 1, \dots, m^*-1$, $\|y^{(k)}(t) - z_k\| \leqslant \delta$, $k = m^*, m^*+1, \dots, m-1$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Определим метрику на $\mathcal{S}$

$$d(y, v) := \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}},$$

тогда $\mathcal{S}$ — полное метрическое пространство.

Заметим, что

$$J_t^{m-\alpha}\int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F(s,y(s),y^{(1)}(s),\ldots,y^{(m-1)}(s))\,ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} J_t^{m-\alpha}Z_{m-1}(t-s)F(s,y(s),y^{(1)}(s),\ldots,y^{(m-1)}(s))\,ds.$$

Это равенство можно доказать, изменив порядок интегрирования в его левой части.

Определим для $y \in \mathcal{S}$

$$G(y)(t) := \sum_{p=m^*}^{m-1} J_t^{m-\alpha}Z_p(t-t_0)z_p +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} J_t^{m-\alpha}Z_{m-1}(t-s)F(s,y(s),y^{(1)}(s),\ldots,y^{(m-1)}(s))\,ds$$

при $t \in [t_0, t_0+\tau]$. Докажем, что G отображает метрическое пространство $\mathcal{S}$ в себя и является оператором сжатия, если $\tau > 0$ достаточно мало.

Действительно, при $n = 0, 1, \ldots, m-1$

$$[G(y)]^{(n)}(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} D_t^{\alpha-m+n}Z_p(t-t_0)z_p +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}(t-s)F(s,y(s),y^{(1)}(s),\ldots,y^{(m-1)}(s))ds,$$

так как $D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}(0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots, m-2$. По теореме 1.4.1 имеем $G(y) \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, $[G(y)]^{(q)}(t_0) = 0$, $q = 0, 1, \ldots, m^*-1$, $[G(y)]^{(k)}(t_0) = z_k$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$. Следовательно, для $t \in [t_0, t_0+\tau]$ $\|[G(y)]^{(q)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta$, $q = 0, 1, \ldots, m^*-1$, $\|[G(y)]^{(k)}(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$ при достаточно малом $\tau > 0$. Итого, $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Обозначим для краткости $F^y(t) := F(t, y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$. При $n = 0, 1, \ldots, m-1$, $t \in [t_0, t_0+\tau]$ в силу (1.6.5), (1.6.6)

$$\|[G(y)]^{(n)}(t) - [G(v)]^{(n)}(t)\|_{\mathcal{Z}} =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} D_t^{\alpha-m+n} Z_{m-1}(t-s)\,(F^y(s) - F^v(s))\,ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \tau \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| D_t^{\alpha-m+n} Z_{m-1}(t) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} l \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}} ds \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \tau d(y,v) \leqslant \frac{d(y,v)}{2m}$$

при достаточно малом τ. Следовательно, $d(G(y),G(v)) \leqslant \frac{1}{2}d(y,v)$, оператор G имеет единственную неподвижную точку $y_0 \in \mathcal{S}$, которая является единсвенным локальным решением интегро-дифференциального уравнения (1.6.4). Таким образом, существует единственное решение задачи (1.6.1), (1.6.2) на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$, однозначно определяемое равенством $z = D_t^{m-\alpha} y_0$. $\square$

1.7 Квазилинейные уравнения общего вида

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $n, r, q \in \mathbb{N}$, Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\begin{gathered} D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + \\ +F(t, D_t^{\alpha-m-\varrho} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t), D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_q} z(t)) \end{gathered} \tag{1.7.7}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Некоторые γ_i могут быть отрицательными.

Определим $\mu^* := m^*(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma_1+1, \gamma_2+1, \ldots, \gamma_q+1) \in \mathbb{Z}$. Здесь приходится определять дефект μ^* не только по α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, а еще и по числам $\gamma_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, q$. На случай, когда $\mu^* < 0$ (это может произойти, если $B_l = 0$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma_i < \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$), введем в рассмотрение величину $\mu_0^* := \max\{\mu^*, 0\}$. В силу следствий 1.2.1–1.2.4 для решения задачи Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.7.8}$$

для уравнения (1.7.7) с необходимостью выполняются условия

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \mu_0^* - 1;$$

$$D_t^{\alpha_l - m_l + k} z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m_l - 1, \; l = 1, 2, \ldots, n;$$

$$D_t^{\gamma_i - n_i + k} z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_i, \; i = 1, 2, \ldots, q.$$

Для исследования уравнения (1.7.7) потребуется существование конечных пределов $\lim\limits_{t \to t_0} D_t^{\gamma_i} z(t) := D_t^{\gamma_i} z(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, являющихся аргументами нелинейного оператора в начальный момент времени, поэтому μ^* определяется не по числам γ_i, а по $\gamma_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Если $m - 1 < \gamma_q < \alpha$, то $\mu^* = m$, неполная задача Коши не содержит начальных условий и все z_k в условиях (1.7.8) с необходимостью равны нулю.

Введем обозначения $\overline{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $S_\delta(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : \|y_k - x_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \delta, \, k = 1, 2, \ldots, m + \varrho + q\}$. Пусть Z открытое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, отображение $F : Z \to \mathcal{Z}$ локально липшицево по переменным $\overline{x}$, т. е. для каждого набора $(t, \overline{x}) \in Z$ существуют $\delta > 0$, $C > 0$, такие, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\overline{x}) \subset Z$, для всех $(s, \overline{y})$, $(s, \overline{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\overline{x})$

$$\|F(s, y_1, y_2, \ldots, y_{m+\varrho+q}) - F(s, v_1, v_2, \ldots, v_{m+\varrho+q})\|_{\mathcal{D}} \leqslant C \sum_{k=1}^{m+\varrho+q} \|y_k - v_k\|_{\mathcal{Z}}. \tag{1.7.9}$$

Решением задачи

$$D^{\alpha - m + k} z(t_0) = 0, \quad k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \ldots, m - 1, \tag{1.7.10}$$

для уравнения (1.7.7) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть такое $z : (t_0, t_1] \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l - \alpha_l} z \in C^{m_l}((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $J_t^{\beta_s} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $J_t^{n_i - \gamma_i} z \in C^{n_i}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$, выполнены условия (1.7.10), включение

$$(t, D_t^{\alpha - m - \varrho} z(t), D_t^{\alpha - m - \varrho + 1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha - 1} z(t), D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_q} z(t)) \in Z$$

при $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (1.7.7) при $t \in (t_0, t_1]$.

Лемма 1.7.1. *Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$. Тогда линейное пространство*

$$C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha} x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}),$$
$$(t - t_0)^{m-\alpha} D_t^\alpha x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} := \|J_t^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \|(t-t_0)^{m-\alpha}D_t^\alpha x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ *является банаховым.*

Доказательство. Все аксиомы нормы проверяются непосредственно. В частности, если $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} = 0$, то $J_t^{m-\alpha}x(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv D_t^{m-\alpha}J_t^{m-\alpha}x(t) \equiv 0$, поскольку $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z}) \subset L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, тогда существуют $y := \lim\limits_{k\to\infty} J_t^{m-\alpha}x_k \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $y_1(t) := \lim\limits_{k\to\infty}(t-t_0)^{m-\alpha}D_t^\alpha x_k \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. В пространстве $C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}((t-t_0)D_t^{\alpha-1}x_k(t))' = \lim_{k\to\infty}(D_t^{\alpha-1}x_k(t) + (t-t_0)D_t^\alpha x_k(t)) =$$
$$= D_t^{m-1}y(t) + (t-t_0)^{1-m+\alpha}y_1(t).$$

Поэтому $(t-t_0)D_t^{\alpha-1}x_k(t)$ имеет предел в $C^1([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, равный $(t-t_0)D_t^{m-1}y(t)$, следовательно,

$$((t-t_0)D_t^{m-1}y(t))' = D_t^{m-1}y(t)+(t-t_0)D_t^m y(t) = D_t^{m-1}y(t)+(t-t_0)^{1-m+\alpha}y_1(t),$$

$$D_t^m y(t) = (t-t_0)^{\alpha-m}y_1(t) \in L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z}) \cap C((t_0,t_1];\mathcal{Z}).$$ Положим

$$x(t) := D_t^{m-\alpha}y(t) = (t-t_0)^{\alpha-m}y(t_0)/\Gamma(\alpha-m+1)+J_t^{\alpha-m+1}y'(t) \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z}),$$

тогда $J_t^{m-\alpha}x = y \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $(t-t_0)^{m-\alpha}D_t^\alpha x(t) = (t-t_0)^{m-\alpha}D_t^m y(t) = y_1(t) \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ в $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$. Таким образом, $C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ является банаховым пространством. $\square$

Следствие 1.7.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ *в условиях данного параграфа. Тогда при каждом* $k \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant m-1$ *существуют такие* $C_k > 0$, $\delta \in (0,1)$, *что для любых* $t,\tau \in [t_0,t_1]$

$$\|D_t^{\alpha-m+k}x(t) - D_t^{\alpha-m+k}x(\tau)\|_\mathcal{Z} \leqslant C_k\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|t-\tau|, \quad k < m-1,$$

$$\|D_t^{\alpha-1}x(t) - D_t^{\alpha-1}x(\tau)\|_\mathcal{Z} \leqslant C_{m-1}\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|t-\tau|^\delta.$$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{Z}$, $k < -1$ имеем в силу определения дробного интеграла и теоремы Лагранжа

$$D_t^{\alpha-m+k}x(t) - D_t^{\alpha-m+k}x(\tau) = (t-\tau)D_t^{\alpha-m+k+1}x(\xi) = (t-\tau)J_t^{-k-1}J_t^{m-\alpha}x(\xi) =$$

$$= (t-\tau)\int\limits_{t_0}^{\xi}\frac{(\xi-s)^{-k-2}}{\Gamma(-k-1)}J_t^{m-\alpha}x(s)ds,$$

следовательно,

$$\|D_t^{\alpha-m+k}x(t)-D_t^{\alpha-m+k}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\frac{(t_1-t_0)^{-k-1}}{\Gamma(-k)}(t-\tau).$$

При $k\in\{-1,0,\dots,m-2\}$

$$\|D_t^{\alpha-m+k}x(t)-D_t^{\alpha-m+k}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant(t-\tau)\max_{s\in[\tau,t]}\|D_t^{\alpha-m+k+1}x(s)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-\tau).$$

При $k=m-1$

$$D_t^{\alpha-1}x(t)-D_t^{\alpha-1}x(\tau)=\int\limits_0^1\frac{d}{d\phi}D_t^{\alpha-1}x(\phi t+(1-\phi)\tau)d\phi=$$

$$=(t-\tau)\int\limits_0^1 D_t^{\alpha}x(\phi t+(1-\phi)\tau)d\phi,$$

$$\|D_t^{\alpha-1}x(t)-D_t^{\alpha-1}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant(t-\tau)\int\limits_0^1\|D_t^{\alpha}x(\phi t+(1-\phi)\tau)\|_{\mathcal{Z}}d\phi\leqslant$$

$$\leqslant\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-\tau)\int\limits_0^1(\phi t+(1-\phi)\tau-t_0)^{\alpha-m}d\phi=$$

$$=\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\int\limits_\tau^t(s-t_0)^{\alpha-m}ds\leqslant\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\int\limits_\tau^t(s-\tau)^{\alpha-m}ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\alpha-m+1}(t-\tau)^{\alpha-m+1}.$$

$\square$

Лемма 1.7.2. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $x\in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $n-1<\beta\leqslant n\in\mathbb{Z}$, $\beta<\alpha$, $\alpha-m\neq\beta-n$. Тогда $D_t^{\beta}x\in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$.*

Доказательство. Если $\beta - n < \alpha - m$, то для $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ $J_t^{n-\beta} x = J_t^{n-\beta+\alpha-m} J_t^{m-\alpha} x$. Тогда при $k = 0, 1, \ldots, m$

$$D_t^k J_t^{n-\beta+\alpha-m} J_t^{m-\alpha} x(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l} D_t^{\alpha-m+l} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \\ + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1} D_t^{\alpha-m+k} x(s) ds, \tag{1.7.11}$$

при $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1} D_t^{\alpha-m+k} x(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} (t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}}{n-\beta+\alpha-m}.$$

Кроме того, поскольку $n \leqslant m$,

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1} \|D_t^\alpha x(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leqslant \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1} (s-t_0)^{\alpha-m} ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} (t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m} B(n-\beta+\alpha-m, \alpha-m+1),$$

где B — бета-функция Эйлера, то $D_t^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Если же $\beta - n > \alpha - m$, то $n \leqslant m-1$ в силу условия $\beta < \alpha$. Следовательно, при $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$D_t^k J_t^{n-\beta} x(t) = D_t^k J_t^{n-\beta} D_t^{m-\alpha} J_t^{m-\alpha} x(t) = D_t^k J_t^{n-\beta} D_t^1 J_t^{\alpha-m+1} J_t^{m-\alpha} x(t) =$$

$$= D_t^k J_t^{n-\beta} \left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} J_t^{m-\alpha} x(t_0) + J_t^{\alpha-m+1} D_t^{\alpha-m+1} x(t) \right) =$$

$$= \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+n-\beta-k} J_t^{m-\alpha} x(t_0)}{\Gamma(\alpha-m+n-\beta-k+1)} + D_t^k J_t^{\alpha-m+n-\beta+1} D_t^1 J_t^{m-\alpha} x(t) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l} D_t^{\alpha-m+l} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\beta+\alpha-m} D_t^{k+1} J_t^{m-\alpha} x(s) ds. \tag{1.7.12}$$

При получении последнего равенства использовано равенство (1.7.11) и сдвиг нумерации в сумме. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, получим сходимость последнего интеграла при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, поэтому $D_t^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. □

Введём в рассмотрение также пространство $C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z}) : D_t^{\alpha-m+k}x(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,\mu_0^*-1\}$. Заметим при этом, что $\mu_0^*-1 \leqslant m-1$, $D_t^{\alpha-1}x \in C([t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Замечание 1.7.1. По построению μ_0^* для $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ имеем равенства $D_t^{\alpha_l-m_l+k}x(t_0)=0$, $k=0,1,\dots,m_l-1$, $l=1,2,\dots,n$, $D_t^{\gamma_i-n_i+k}x(t_0)=0$, $k=0,1,\dots,n_i$, $i=1,2,\dots,q$.

Следствие 1.7.2. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда $D_t^{\gamma_i}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=1,2,\dots,q$, и существует такое $C_1>0$, что для всех $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$*

$$\|D_t^{\gamma_i}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \leqslant C_1\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}. \tag{1.7.13}$$

Доказательство. Из замечания 1.7.1 и леммы 1.7.2 следует, что для $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ выполняются включения $D_t^{\gamma_i}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=1,2,\dots,q$. Из доказательства леммы 1.7.2 в силу равенств (1.7.11) и $D_t^{\gamma_i-n_i+k}x(t_0)=0$, $k=0,1,\dots,n_i$, $i=1,2,\dots,q$, получаем при $\gamma_i-n_i<\alpha-m$

$$D_t^{\gamma_i}x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}D_t^{n_i}J_t^{m-\alpha}x(s)ds,$$

а при $\gamma_i-n_i>\alpha-m$ согласно (1.7.12)

$$D_t^{\gamma_i}x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}D_t^{n_i+1}J_t^{m-\alpha}x(s)ds,$$

и в обоих случаях выполняется неравенство (1.7.13). □

Следствие 1.7.3. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $x\in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда при каждом $i=1,2,\dots,q$ существуют такие $C_i>0$, $\delta_i\in(0,1)$, что для любых $t,\tau\in[t_0,t_1]$*

$$\|D_t^{\gamma_i}x(t)-D_t^{\gamma_i}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_i\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|t-\tau|^{\delta_i}.$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предыдущего следствия, при $\tau,t\in[t_0,t_1]$, $\tau<t$, $\gamma_i-n_i<\alpha-m$, имеем

$$D_t^{\gamma_i}x(t)-D_t^{\gamma_i}x(\tau)=\int\limits_{t_0}^{\tau}[(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}-(\tau-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}]D_t^{n_i}J_t^{m-\alpha}x(s)ds-$$

$$-\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}D_t^{n_i}J_t^{m-\alpha}x(s)ds,$$

поэтому

$$\|D_t^{\gamma_i}x(t)-D_t^{\gamma_i}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{n_i-\gamma_i+\alpha-m}\Big((t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}+$$

$$+\left|(n_i-\gamma_i+\alpha-m-1)\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\tau}^{t}(u-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-2}duds\right|\Bigg)=$$

$$=\frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{n_i-\gamma_i+\alpha-m}\Big((t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}+$$

$$+\left|\int\limits_{\tau}^{t}[(u-t_0)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}-(u-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}]du\right|\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{n_i-\gamma_i+\alpha-m}\left((t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}+2\int\limits_{\tau}^{t}(u-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}du\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{n_i-\gamma_i+\alpha-m}\left(1+\frac{2}{n_i-\gamma_i+\alpha-m}\right)(t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}=$$

$$=C_i\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-\tau)^{\delta_i}$$

с $\delta_i=n_i-\gamma_i+\alpha-m\in(0,1)$.

Аналогично при $\gamma_i-n_i>\alpha-m$ получим

$$\|D_t^{\gamma_i}x(t)-D_t^{\gamma_i}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant C_i\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-\tau)^{\delta_i}$$

при

$$C_i=\frac{1}{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}\left(1+\frac{2}{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}\right)>0,$$

$\delta_i=n_i-\gamma_i+\alpha-m-1\in(0,1)$. □

Замечание 1.7.2. Функция, удовлетворяющая условиям неполной задачи типа Коши (1.7.10), с точностью до $o(t-t_0)^{\alpha-1}$ ведёт себя как функция

$$\widetilde{z}(t)=\frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu_0^*}z_{\mu_0^*}}{\Gamma(\alpha-m+\mu_0^*+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu_0^*+1}z_{\mu_0^*+1}}{\Gamma(\alpha-m+\mu_0^*+2)}+\dots+\frac{(t-t_0)^{\alpha-1}z_{m-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

поэтому $D_t^{\alpha-m-\varrho}\widetilde{z}(t_0) = D_t^{\alpha-m-\varrho+1}\widetilde{z}(t_0) = \dots = D_t^{\alpha-m+\mu_0^*-1}\widetilde{z}(t_0) = 0$, $D_t^{\gamma_1}\widetilde{z}(t_0) = D_t^{\gamma_2}\widetilde{z}(t_0) = \dots = D_t^{\gamma_q}\widetilde{z}(t_0) = 0$ по построению μ_0^*. Поэтому в начальный момент времени аргумент нелинейного оператора в уравнении (1.7.7) имеет вид $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0)$.

Лемма 1.7.3. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, $F \in C(Z; \mathcal{Z})$. *Тогда функция* $z \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ *является решением задачи* (1.7.7), (1.7.10) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 > t_0$ *в том и только в том случае, когда при* $t \in [t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=\mu_0^*}^{m-1} Z_k(t - t_0) z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t - s) F^z(s) ds, \tag{1.7.14}$$

где $F^z(s) = F(s, D_t^{\alpha-m-\varrho} z(s), \dots, D_t^{\alpha-1} z(s), D_t^{\gamma_1} z(s), \dots, D_t^{\gamma_q} z(s))ds$.

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ — решение задачи (1.7.7), (1.7.10) на отрезке $[t_0, t_1]$, то в силу замечания 1.7.1, следствия 1.7.2 и условий на F отображение $t \to F^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$, а значит, удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1. Следовательно, выполняется равенство (1.7.14).

Пусть $z \in C_{\alpha;\mu^{**}}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ удовлетворяет равенству (1.7.14). Тогда в силу замечания 1.7.1, следствия 1.7.2 и условий на F отображение $t \to F^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 1.4.1, можно напрямую доказать, что z — решение задачи (1.7.7), (1.7.10) на отрезке $[t_0, t_1]$. $\square$

Теперь перейдём к основному утверждению.

Теорема 1.7.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $\gamma_1 <$

$\gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, *отображение* $F \in C(Z; \mathcal{Z})$ *локально липшицево по* $\overline{x}$. *Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (1.7.7), (1.7.10) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмём $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, такие, что в окрестности

$$V := \{(t, x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : t \in [t_0, t_1],$$
$$\|x_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, k = 1, 2, \dots, \varrho + \mu_0^*, \varrho + m + 1, \varrho + m + 2, \dots, \varrho + m + q,$$
$$\|x_l - z_{l-\varrho-1}\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ l = \varrho + \mu_0^* + 1, \varrho + \mu_0^* + 2, \dots, \varrho + m\}$$

точки $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0)$ неравенство (1.7.9) выполняется при некотором $C > 0$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_{t_1} := \{x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : \|D_t^{\alpha-m+k} x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ k = -\varrho, -\varrho + 1, \dots, \mu_0^* - 1,$$
$$\|D_t^{\alpha-m+k} x(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots, m-1,\ t \in [t_0, t_1]\},$$

которое в силу леммы 1.7.1 является метрическим пространством с метрикой, задаваемой как норма разности в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Определим в $\mathfrak{M}_{t_1}$ оператор

$$G(x)(t) = \sum_{k=\mu_0^*}^{m-1} Z_k(t - t_0) z_k + \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t - s) F^x(s) ds.$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 1.7.3, с учётом замечания 1.7.1, следствия 1.7.2 и теоремы 1.4.1 получим, что $G(x) \in \mathfrak{M}_{t_1}$ для любого $x \in \mathfrak{M}_{t_1}$ при $t_1 > t_0$, достаточно близком к t_0.

Как при доказательстве теоремы 1.6.1 получаем

$$D_t^{\alpha-m+k} \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t - s) F^x(s) ds = \int_{t_0}^{t} D_t^{\alpha-m+k} Z_{m-1}(t - s) F^x(s) ds,$$

поэтому для $x, y \in \mathfrak{M}_{t_1}$ в силу следствия 1.7.2 при $k = 0, 1, \dots, m-1$ с учетом (1.6.5), (1.6.6)

$$\|D_t^{\alpha-m+k} G(x)(t) - D_t^{\alpha-m+k} G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} D_t^{\alpha-m+k} Z_{m-1}(t-s)(F^x(s)-F^y(s))ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(t-t_0)\left(\sum_{k=-\varrho}^{m-1} \max_{t\in[t_0,t_1]} \|D_t^{\alpha-m+k}x(t)-D_t^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}} + \right.$$

$$\left. + \max_{t\in[t_0,t_1]} \sum_{i=1}^{q} \|D_t^{\gamma_i}x(t)-D_t^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}} \right) \leqslant C_2(t_1-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Таким образом, оператор G сжимающий в полном метрическом пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$ при достаточно малом t_1-t_0 и существует его единственная неподвижная точка $z\in\mathfrak{M}_{t_1}$. Согласно лемме 1.7.3 z — решение задачи (1.7.7), (1.7.10) на отрезке $[t_0,t_1]$.

Если существует два решения задачи (1.7.7), (1.7.10), то по лемме 1.7.3 каждое из них является неподвижной точкой оператора G в пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$. Но неподвижная точка единственна, поэтому решения совпадают. $\square$

1.8 Приложения к начально-краевым задачам

Применим полученные результаты к исследованию однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

1.8.1 Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора

Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda)=\sum\limits_{p=0}^{\nu} a_p\lambda^p$, $P_2^j(\lambda)=\sum\limits_{p=0}^{\nu} b_p^j\lambda^p$, $P_3^l(\lambda)=\sum\limits_{p=0}^{\nu} c_p^l\lambda^p$, $P_4^s(\lambda)=\sum\limits_{p=0}^{\nu} d_p^s\lambda^p$, $a_p,b_p^j,c_p^l,d_p^s\in\mathbb{C}$, $p=0,1,\dots,\nu\in\mathbb{N}$, $j=1,2,\dots,m-1$, $l=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,r$, $a_\nu\neq 0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\mathcal{A}w)(\xi)=\sum_{|q|\leqslant 2\rho} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}w(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}},\quad a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(\mathcal{B}_l w)(\xi) = \sum_{|q|\leqslant \rho_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|} w(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \, l = 1, 2, \dots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$, операторный пучок $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_\rho$ регулярно эллиптичен [49]. Пусть оператор $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ имеет область определения

$$D_{\mathcal{A}_1} = H^{2\rho}_{\{\mathcal{B}_l\}}(\Omega) := \{w \in H^{2\rho}(\Omega) : \mathcal{B}_l w(\xi) = 0, \, l = 1, 2, \dots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{A}_1 w := \mathcal{A} w$. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ оператора $\mathcal{A}_1$ действительный и дискретный [49]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора $\mathcal{A}_1$, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Возьмем $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Определим по набору чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дефект m^* и рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, 0) = v_k(\xi), \; k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1, \quad \xi \in \Omega, \tag{1.8.1}$$

$$\mathcal{B}_l \mathcal{A}^k v(\xi, t) = 0, \;\; k = 0, 1, \dots, \nu - 1, \;\; l = 1, 2, \dots, \rho, \;\; (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.8.2}$$

$$\begin{gathered} D_t^\alpha P_1(\mathcal{A}) v(\xi, t) = \sum_{j=1}^{m-1} P_2^j(\mathcal{A}) D_t^{\alpha-m+j} v(\xi, t) + \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A}) D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A}) J_t^{\beta_s} v(\xi, t) + h(\xi, t), \;\; (\xi, t) \in \Omega \times (0, T). \end{gathered} \tag{1.8.3}$$

Положим

$$\begin{gathered} \mathcal{X} = \{w \in H^{2\rho\nu}(\Omega) : \mathcal{B}_l \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, \, k = 0, 1, \dots, \nu - 1, \\ l = 1, 2, \dots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(\Omega), \end{gathered}$$

$L = P_1(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M_j = P_2^j(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $N_l = P_3^l(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $S_s = P_4^s(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Пусть $P_1(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (1.8.1)–(1.8.3) представима в виде задачи (1.3.6), (1.4.8), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_j = L^{-1}M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $B_l = L^{-1}N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $C_s = L^{-1}S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, $z_k = v_k(\cdot)$, $k = m^*, m^*+1,\dots,m-1$, $f(t) = L_1^{-1}h(\cdot,t)$, $t \in (0,T)$. По теореме 1.4.1 задача (1.8.1)–(1.8.3) однозначно разрешима при любых $v_k \in \mathcal{X}$, если $h \in C((0,T);L_2(\Omega)) \cap L_1(0,T;L_2(\Omega))$.

Пример. Возьмем $\alpha = 5/2$, $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/2$, $P_1(\lambda) = \lambda^2$, $P_2^1(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$, $P_2^2(\lambda) \equiv 0$, $P_3^1(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2$, $P_4^1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\rho = 1$, $\mathcal{A}w = \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}$, $\mathcal{B}_1 = I$. Тогда $\underline{m} = 0$, $\overline{m} = 1$, $m^* = 1$, задача (1.8.1)–(1.8.3) имеет вид

$$D_t^{5/2}\frac{\partial^4 v}{\partial\xi^4}(\xi,t) = \left(b_0 + b_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + b_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)D_t^{1/2}v(s,t) +$$
$$+\left(c_0 + c_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + c_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)D_t^{2/3}v(s,t) + \left(d_0 + d_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + d_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)J_t^{1/2}v(\xi,t),$$
$$(\xi,t) \in (0,\pi)\times\overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$
$$D^{1/2}v(\xi,0) = v_1(\xi), \quad D^{3/2}v(\xi,0) = v_2(\xi), \quad \xi \in (0,\pi).$$

Первое начальное условие $J^{1/2}v(\xi,0) = v_0(\xi)$ не используется в силу того, что дефект равен 1.

1.8.2 Обратная задача для уравнений с многочленами

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение в $\Omega \times (0,T]$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha}P_1(\mathcal{A})v(\xi,t) = \sum_{j=1}^{m-1} P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}v(\xi,t) + \\ + \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}v(\xi,t) + \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}v(\xi,t) + \varphi(t)w(\xi), \end{gathered} \tag{1.8.4}$$

с краевыми условиями при $(\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T]$

$$\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k v(\xi,t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,\nu-1, \quad l = 1,2,\dots,\rho, \tag{1.8.5}$$

и условием переопределения

$$\int\limits_0^T v(\xi,t)d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \qquad (1.8.6)$$

Определим по набору чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ дефект m^* и зададим условия типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} v(\xi,0) = v_k(\xi),\ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \quad \xi \in \Omega. \qquad (1.8.7)$$

Как и в предыдущем параграфе, положим

$$\mathcal{X} = \{w \in H^{2\rho\nu}(\Omega) : \mathcal{B}_l \mathcal{A}^k w(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \nu-1,$$
$$l = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(\Omega),$$

$L = P_1(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_j = P_2^j(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $N_l = P_3^l(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $S_s = P_4^s(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1, 2, \ldots, r$. В предположении, что $P_1(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, задача (1.8.4)–(1.8.7) представима в виде (1.5.1)–(1.5.3), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_j = L^{-1}M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l = L^{-1}N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s = L^{-1}S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $z_k = v_k(\cdot)$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $z_T = v_T(\cdot)$, $u = L^{-1}w(\cdot)$. В силу теоремы 1.5.1 задача (1.8.4)–(1.8.7) корректна тогда и только тогда, когда при некотором $c > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma R_{\lambda,k} P_1(\lambda_k) e^{\lambda(t-s)} d\lambda \varphi(s) ds d\mu(t) \right| \geqslant c, \qquad (1.8.8)$$

где

$$R_{\lambda,k} := \left(\lambda^\alpha P_1(\lambda_k) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha+j-m} P_2^j(\lambda_k) - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} P_3^l(\lambda_k) - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} P_4^s(\lambda_k) \right)^{-1}.$$

Это следует из равенства

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \int\limits_0^T \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma R_{\lambda,k} P_1(\lambda_k) e^{\lambda(t-s)} d\lambda \varphi(s) ds d\mu(t),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пример. Возьмем $\alpha = 5/2$, $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/2$, $P_1(\lambda) = \lambda^2$, $P_2^1(\lambda) = b_1\lambda + b_2\lambda^2$, $P_2^2(\lambda) \equiv 0$, $P_3^1(\lambda) = c_0 + c_2\lambda^2$, $P_4^1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho = 1$, $\mathcal{A}w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$, $\mathcal{B}_1 = I$, μ — функция единичного скачка в точке $t_0 \in (0, T]$. Тогда $\underline{m} = 0$, $\overline{m} = 1$, $m^* = 1$, $\lambda_k = -k^2$ при $k \in \mathbb{N}$, задача (1.8.4)–(1.8.7) имеет вид

$$D_t^{5/2}\tfrac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}(\xi, t) = \left(b_1\tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b_2\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4}\right) D_t^{1/2} v(s, t) + \left(c_0 + c_2\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4}\right) D_t^{2/3} v(s, t) +$$
$$+ \left(d_0 + d_1\tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) J_t^{1/2} v(\xi, t) + w(\xi),\ (\xi, t) \in (0, \pi) \times [0, T],$$
$$v(0, t) = v(\pi, t) = \tfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0, t) = \tfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi, t) = 0,\ \ t \in [0, T],$$
$$D^{1/2} v(\xi, 0) = v_1(\xi), \quad D^{3/2} v(\xi, 0) = v_2(\xi), \quad \xi \in (0, \pi),$$
$$v(\xi, T) = v_T(\xi), \quad \xi \in (0, \pi).$$

В данном случае $\varphi \equiv 1$, μ — функция единичного скачка в точке T, поэтому необходимое и достаточное условие (1.8.8) корректности данной задачи имеет вид

$$\exists c > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \left| \int\limits_\Gamma \left(k^4\lambda^{3/2} + (b_1 k^2 - b_2 k^4)\lambda^{-1/2} - (c_0 + c_2 k^4)\lambda^{-1/3} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -(d_0 - d_1 k^2)\lambda^{-3/2}\right)^{-1} (e^{\lambda T} - 1) d\lambda \right| \geqslant c.$$

1.8.3 Квазилинейное уравнение с многочленами

Пусть в условиях п. 1.8.1 $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^{m+q+1} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha - m + k} u(\xi, 0) = u_k(\xi),\ k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \ldots, m - 1, \quad \xi \in \Omega, \tag{1.8.9}$$

$$\mathcal{B}_l \mathcal{A}^k u(\xi, t) = 0,\ \ k = 0, 1, \ldots, \nu - 1,\ \ l = 1, 2, \ldots, \rho,\ \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (t_0, t_1], \tag{1.8.10}$$

$$P_1(\mathcal{A})D_t^{\alpha}u(\xi,t)=\sum_{j=1}^{m-1}P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}u(\xi,t)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}u(\xi,t)+\sum_{s=1}^{r}P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}u(\xi,t)+$$
$$+H(\xi,D_t^{\alpha-m}(\xi,t),\dots,D_t^{\alpha-1}(\xi,t),D_t^{\gamma_1}(\xi,t),\dots,D_t^{\gamma_q}(\xi,t)),\ \ (\xi,t)\in\Omega\times(t_0,t_1].\tag{1.8.11}$$

Положим $\rho_0\geqslant 0$, $\mathcal{X}:=\{v\in H^{2\rho\nu+\rho_0}(\Omega):\mathcal{B}_l\mathcal{A}^kv(\xi)=0,\ k=0,1,\dots,\nu-1,\ l=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}:=H^{\rho_0}(\Omega)$ — пространство Соболева $W_2^{\rho_0}(\Omega)$ при $\rho_0>0$ или пространство Лебега $L_2(\Omega)$, если $\rho_0=0$; $L:=P_1(\mathcal{A})\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_j:=P_2^j(\mathcal{A})\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $N_l:=P_3^l(\mathcal{A})\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l=1,2,\dots,n$, $S_s:=P_4^s(\mathcal{A})\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s=1,2,\dots,r$.

Если $P_1(\lambda_k)\neq 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (1.8.9)–(1.8.11) представима в виде (1.7.7), (1.7.10), где $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $A_j=L^{-1}M_j\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $B_l=L^{-1}N_l\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $C_s=L^{-1}S_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, $z_k=u_k(\cdot)$, $k=\mu_0^*,\dots,m-1$, $F(x_0,x_1,\dots,x_{m+q})=L^{-1}H(\cdot,x_0,x_1,\dots,x_{m+q})$.

Сформулируем многократно используемую в данной главе теорему.

Теорема 1.8.1. [99]. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, $g\in C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, $l>d/2$, отображение F действует по правилу $F(v_1,v_2,\dots,v_d)=g(\cdot,v_1(\cdot),v_2(\cdot),\dots,v_d(\cdot))$. Тогда $F\in C^{\infty}((H^l(\Omega))^d;H^l(\Omega))$.*

Теорема 1.8.2. *Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant 0$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha$, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ не содержит начало координат и нулей многочлена P_1, $4\rho\nu+2\rho_0>d$, $u_k\in\mathcal{X}$, $k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1$, $H\in C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{m+q+1};\mathbb{R})$. Тогда для некоторого $t_1>t_0$ существует единственное решение задачи* (1.8.9)–(1.8.11).

Доказательство. В этой задаче областью определения нелинейного оператора является $Z=\mathcal{X}^{m+q+1}$ и в силу неравенства $4\rho\nu+2\rho_0>d$ по теореме 1.8.1 имеем $H(\cdot,x_0(\cdot),x_1(\cdot),\dots,x_{m+q}(\cdot))\in C^{\infty}(\mathcal{X}^{m+q+1};H^{2\rho\nu+\rho_0}(\Omega))$, следовательно, $F(x_0(\cdot),\dots,x_{m+q}(\cdot)):=L^{-1}H(\cdot,x_0(\cdot),\dots,x_{m+q}(\cdot))\in C^{\infty}(\mathcal{X}^{m+q+1};\mathcal{X})$.

Тогда по теореме 1.7.1 получаем утверждение этой теоремы. □

Пример. Возьмем $\alpha = 5/2$, $m = 3$, $n = r = q = 1$, $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/2$, $\gamma_1 = 7/3$, $\nu = 2$, $P_1(\lambda) = \lambda^2$, $P_2^1(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$, $P_2^2(\lambda) \equiv 0$, $P_3^1(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2$, $P_4^1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho = 1$, $\mathcal{A}u = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$, $\mathcal{B}_1 = I$. Тогда $\underline{\alpha} := \max\emptyset := 0$, $\underline{m} := \lceil 0 \rceil = 0$, $\overline{\alpha} := 2/3$, $\overline{m} := \lceil 2/3 \rceil = 1$, $m^* = 1$, $\mu^* = \mu_0^* = 2$, задача (1.8.9)–(1.8.11) примет вид задачи без начальных условий (т. е. 3 начальных условия с необходимостью должны быть нулевыми)

$$D_t^{5/2}\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}(\xi,t) = \left(b_0 + b_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + b_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right) D_t^{1/2}u(\xi,t) +$$
$$+\left(c_0 + c_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + c_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right) D_t^{2/3}u(\xi,t) + \left(d_0 + d_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + d_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right) J_t^{1/2}u(\xi,t) +$$
$$+F(\xi, J_t^{1/2}u(\xi,t), D_t^{1/2}u(\xi,t), D_t^{3/2}u(\xi,t), D_t^{7/3}u(\xi,t)), \quad (\xi,t) \in (0,\pi) \times (t_0, t_1],$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1].$$

1.8.4 Некоторые системы уравнений теории вязкоупругости

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(\xi,0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \tag{1.8.12}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{1.8.13}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha}v(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1}\Delta v(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2}\Delta v(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3}\Delta v(\xi,t) - \\ -r(\xi,t) + g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{1.8.14}$$

$$\nabla \cdot v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{1.8.15}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\alpha, \chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $m - 1 < \max\{\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \leqslant m \in \mathbb{N}$, некоторые или все числа δ_i могут быть отрицательными. Здесь D_t^{β} — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\beta \geqslant 0$ (или дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta > 0$ в случае $\beta < 0$) по переменной t, m^* — дефект задачи типа Коши. Неизвестными являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d) = \nabla p$, вектор-функция $g : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ задана.

Если $\alpha = \delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 < 0$, то система (1.8.14), (1.8.15) представляет собой аналог линеаризации обобщенной системы уравнений Осколкова динамики вязкоупругой жидкости с ядром $h(s,t) = \kappa(t-s)^{-\delta_3-1}/\Gamma(-\delta_3)$ в интегральном операторе (см. систему (2.1.1), (2.1.2) в [15]). При $\alpha = 1$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$, $\nu \neq 0$, $\kappa = 0$ (1.8.14), (1.8.15) есть аналог линеаризованной системы динамики жидкости Кельвина — Фойгта [30, 112]; если при этом $\nu = 0$, то (1.8.14), (1.8.15) — линеаризованная система динамики жидкости Скотт-Блэра.

Положим $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^l := (H^l(\Omega))^n := (W_2^l(\Omega))^n$, $l \in \mathbb{N}$, замыкание линеала $\mathcal{L} := \{z \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot z = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Введем также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в пространстве $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $B := \Sigma\Delta$, расширенный до замкнутого в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [24].

Подействуем на уравнение (1.8.14) поочередно проекторами Σ и Π и получим, что система (1.8.14), (1.8.15) эквивалентна уравнению

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1} Bv(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2} Bv(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3} Bv(\xi,t) + \\ + \Sigma g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{1.8.16}$$

так как, решив его, найдем функцию

$$r(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1} \Pi\Delta v(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2} \Pi\Delta v(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3} \Pi\Delta v(\xi,t) + \Pi g(\xi,t),$$

$(\xi,t) \in \Omega \times (0,T]$. Поэтому рассмотрим начально-краевую задачу (1.8.12), (1.8.13), (1.8.16).

Теорема 1.8.3. *Пусть* $\delta_1 > \alpha > \delta_2 > \delta_3$, $m-1 < \delta_1 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\chi \neq 0$, $v_k \in \mathbb{L}_2$ *при* $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $B^{-1}\Sigma g \in C([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$. *Тогда задача* (1.8.12)–(1.8.15) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Перепишем уравнение (1.8.16) в виде

$$D_t^{\delta_1}v(\xi,t)=\chi^{-1}D_t^{\alpha}B^{-1}v(\xi,t)-\chi^{-1}\nu D_t^{\delta_2}v(\xi,t)-\chi^{-1}\kappa D_t^{\delta_3}v(\xi,t)- \\ -\chi^{-1}B^{-1}\Sigma g(\xi,t),\ \ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{1.8.17}$$

Возьмем $\mathcal{X}=\mathbb{H}_\sigma$, $B_1=\chi^{-1}D_t^{\alpha}B^{-1}$, $B_2=-\chi^{-1}\nu I$, $B_3=-\chi^{-1}\kappa I\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$, тогда по теореме 1.4.1 при любых $v_{m^*},\dots,v_{m-1}\in\mathbb{L}_2$, $B^{-1}\Sigma g\in C([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$ существует единственное решение начально-краевой задачи (1.8.12), (1.8.13), (1.8.17), а потому и задачи (1.8.12)–(1.8.15). $\square$

2 Уравнения с неограниченными операторами

В этом параграфе исследуются однородное и неоднородное уравнения с линейными замкнутыми операторами в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. Вводится в рассмотрение класс $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ наборов линейных замкнутых плотно определенных операторов, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, пересечение областей определения которых плотно в пространстве $\mathcal{Z}$ и снабжено нормой, представляющей собой сумму норм графиков этих операторов. Показано, что принадлежность набора операторов классу $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ необходима и достаточна для существования единственного классического решения однородного уравнения, при этом решение аналитически продолжимо в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$. Предложенный класс $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ обобщает класс операторов $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ (см. [38, 79]), в который он переходит, если все операторы равны нулю, кроме оператора при искомой функции. Однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейных и нелинейных уравнений с производной Римана — Лиувилля и оператором из $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ в правой части исследовались в работах [1, 61, 88, 89, 95].

2.1 Секториальные наборы операторов и аналитические разрешающие семейства операторов

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r$ — замкнутые линейные операторы с областями определения D_{A_1}, D_{A_2}, $\dots$, $D_{A_{m-1}}$, D_{B_1}, D_{B_2}, $\dots$, D_{B_n}, D_{C_1}, D_{C_2}, $\dots$, D_{C_r} соответственно. Обозначим

$$\mathcal{D} := \bigcap_{j=1}^{m-1} D_{A_j} \cap \bigcap_{l=1}^{n} D_{B_l} \cap \bigcap_{s=1}^{r} D_{C_s},$$

$$R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s\right)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{D}.$$

Снабдим множество $\mathcal{D}$ нормой

$$\|\cdot\|_{\mathcal{D}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{j=1}^{m-1} \|A_j \cdot\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{l=1}^{n} \|B_l \cdot\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{s=1}^{r} \|C_s \cdot\|_{\mathcal{Z}},$$

относительно которой $\mathcal{D}$ является банаховым пространством, так как представляет собой пересечение банаховых пространств $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_{m-1}}, D_{B_1}$, D_{B_2}, ..., D_{B_n}, $D_{C_1}, D_{C_2}, \dots, D_{C_r}$ с соответствующими нормами графиков.

Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$. Через $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов A_1, A_2, ..., A_{m-1}, B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., $C_r \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$;

(ii) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0\}$, $p = m^*, \dots, m-1$ существуют операторы

$$R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z});$$

(iii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a)$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$

$$\left\| R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|^{\alpha - m + p + 1} |\lambda|^{m-p-1}}.$$

Здесь m^* определяется по числам $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (см. уравнение (2.1.1)) так же, как и в §1.2, §1.3.

Замечание 2.1.1. Из условия (ii) сразу следует, что $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (при $p = m-1$) и $R_\lambda A_p \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при всех $p = m^*+1, m^*+2, \dots, m-1$, так как

$$R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) - R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) = \lambda^{p-m} R_\lambda A_p.$$

Замечание 2.1.2. При $\beta_r = 0$ выполняется условие $(0, \dots, 0, C_r) \in \mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $C_r \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ (см. работы [1, 38, 61, 88, 89, 95]), при $\alpha = 1$ такие операторы называются секториальными [16, 104].

Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$. Рассмотрим однородное уравнение

$$D^\alpha_t z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D^{\alpha-m+j}_t z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D^{\alpha_l}_t z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J^{\beta_s}_t z(t), \ t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.1)$$

с начальными условиями

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k,\ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1, \tag{2.1.2}$$

где операторы A_j, $j = 1, 2, \dots, m-1$, B_l, $l = 1, 2, \dots, n$, C_s, $s = 1, 2, \dots, r$, линейны и замкнуты в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, имеют плотные в $\mathcal{Z}$ области определения, m^* — дефект задачи Коши.

Под решением уравнения (2.1.1) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha}z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l}z \in C^{m_l}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $J_t^{\beta_s}z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, и выполняется равенство (2.1.1) при $t \in \mathbb{R}_+$. Решением задачи (2.1.2) для уравнения (2.1.1) называется такое решение $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ уравнения (2.1.1), что $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$ и выполняются равенства (2.1.2).

Замечание 2.1.3. Как и в первой главе, подразумевается, что решение задачи (2.1.1), (2.1.2) по умолчанию удовлетворяет начальным условиям

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = 0, \quad k = 0, 1 \dots, m^*-1.$$

Как показано в первой главе, это необходимые условия на решение задачи (2.1.1), (2.1.2).

Пусть $p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Семейство операторов $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *p-разрешающим* для уравнения (2.1.1), если выполняются следующие условия:

(i) $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ сильно непрерывно при $t > 0$;

(ii) при $t > 0$ $S_p(t)[D_{A_j}] \subset D_{A_j}$, $S_p(t)A_jx = A_jS_p(t)x$ для всех $x \in D_{A_j}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$; $S_p(t)[D_{B_l}] \subset D_{B_l}$, $S_p(t)B_lx = B_lS_p(t)x$ для всех $x \in D_{B_l}$, $l = 1, 2, \dots, n$; $S_p(t)[D_{C_s}] \subset D_{C_s}$, $S_p(t)C_sx = C_sS_p(t)x$ для всех $x \in D_{C_s}$, $s = 1, 2, \dots, r$;

(iii) при любом $z_p \in \mathcal{D}$ $S_p(t)z_p$ является решением задачи (2.1.1), (2.1.2) при $z_l = 0$ для всех $l \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{p\}$.

Замечание 2.1.4. Из понятия дефекта следует, что решением задачи (2.1.1), (2.1.2) при $z_l = 0$ для всех $l \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{p\}$, $p = 0, 1, \dots, m^*-1$

является нулевым, поэтому p-разрешающие семейства задачи (2.1.1), (2.1.2) тривиальны при $p = 0, 1, \dots, m^* - 1$, т. е. $S_p \equiv 0$.

p-Разрешающее семейство операторов при $p \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\psi_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi_0,\ t \neq 0\}$ при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое p-разрешающее семейство операторов $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0, β) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, если для любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что при всех $t \in \Sigma_\psi$ справедливо неравенство $\|S_p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C(\psi, a)|t|^\beta e^{a\mathrm{Re}\, t}$.

2.2 Преобразование Лапласа аналитической в секторе функции

Теорема 2.2.1. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, задано отображение $H : (a, \infty) \to \mathcal{X}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \to \mathcal{X}$, для которой при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_\mathcal{X} \leqslant C(\theta)|t|^\beta e^{a\mathrm{Re}\, t}$; $\mathfrak{L}[F](\lambda) = H(\lambda)$ при $\lambda > a$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо на $S_{\theta_0, a}$; при каждом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $K(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$*

$$\|H(\lambda)\|_\mathcal{X} \leqslant \frac{K(\theta)}{|\lambda - a|^{1+\beta}}.$$

Доказательство. Пусть справедливо утверждение (i), $\pi/2 < \theta < \theta_0 \leqslant \pi$, $\delta > 0$, $\gamma_\pm^\delta = (0, \delta] \cup \{\delta + re^{\pm i(\theta - \pi/2)} : r \in (0, \infty)\}$. По теореме Коши при всех $\lambda > a$

$$\mathfrak{L}[F](\lambda) = \int_0^\infty F(t)e^{-\lambda t}dt = \int_{\gamma_\pm^\delta} F(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \int_0^\delta F(t)e^{-\lambda t}dt + e^{\pm i(\theta - \pi/2)} \int_0^\infty F(\delta + re^{\pm i(\theta - \pi/2)})e^{-\lambda(\delta + re^{\pm i(\theta - \pi/2)})}dr.$$

Устремим $\delta \to 0+$, тогда

$$\mathfrak{L}[F](\lambda) = e^{\pm i(\theta-\pi/2)} \int\limits_0^\infty F(re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{\pm i(\theta-\pi/2)}}dr := H_\pm(\lambda),$$

поскольку $\|F(\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda(\delta+re^{\pm i(\theta-\pi/2)})}\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)C_1 r^\beta e^{(a-\lambda)r\cos(\theta-\pi/2)}$ при $\delta \in [0,1]$,

$$\left\|\int\limits_0^\delta F(t)e^{-\lambda t}dt\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant C_1\delta^{1+\beta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0+\,.$$

Возьмем такие $\varepsilon \in (0, \theta_0-\pi/2)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\arg(\lambda-a) \in (-\theta+\varepsilon, \pi-\theta-\varepsilon)$; тогда $\arg((\lambda-a)e^{i(\theta-\pi/2)}) \in (-\pi/2+\varepsilon, \pi/2-\varepsilon)$, следовательно, выполняются неравенства $\mathrm{Re}((\lambda-a)e^{i(\theta-\pi/2)}) \geqslant |\lambda-a|\sin\varepsilon$, $\|F(re^{i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{i(\theta-\pi/2)}}\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)r^\beta e^{-r|\lambda-a|\sin\varepsilon}$. Поэтому интеграл $H_+(\lambda)$ абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda-a) \in (-\theta+\varepsilon, \pi-\theta-\varepsilon),\ \lambda \neq a\}$, в котором

$$\|H_+(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)\int\limits_0^\infty r^\beta e^{-r|\lambda-a|\sin\varepsilon}dr = \frac{C(\theta)\sin^{-\beta-1}\varepsilon\,\Gamma(1+\beta)}{|\lambda-a|^{1+\beta}} := \frac{K(\theta)}{|\lambda-a|^{1+\beta}}.$$

Аналогично может быть показано, что $H_-(\lambda)$ определяет аналитическую функцию в $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda-a) \in (-\pi+\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon),\ \lambda \neq a\}$, в котором выполняется неравенство $\|H_-(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant K(\theta)|\lambda-a|^{-\beta-1}$. Так как H_+ и H_- являются аналитическими продолжениями функции $\mathfrak{L}[F]$, определенными на $(a,+\infty)$, по теореме об аналитическом продолжении они определяют аналитическую функцию H на $S_{\theta-\varepsilon,a}$, удовлетворяющую неравенству $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant K(\theta)|\lambda-a|^{-\beta-1}$. Так как $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $\varepsilon \in (0, \theta_0-\pi/2)$ произвольны, утверждение (ii) выполняется.

Пусть выполняется утверждение (ii). Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta > 0$ и ориентированный контур $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, где $\Gamma_\pm := \{a + re^{\pm i\theta} : r \in [\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{a + \delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\}$. При $\varepsilon \in (0, \theta-\pi/2)$, $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2-\varepsilon}$, $\lambda \in \Gamma_\pm$ имеем

$$\mathrm{Re}(\lambda t) = a\mathrm{Re}\,t + r|t|\cos(\arg t \pm \theta) \leqslant a\mathrm{Re}\,t - r|t|\sin\varepsilon.$$

Поэтому $\|H(\lambda)e^{\lambda t}\|_{\mathcal{X}} \leqslant K(\theta)r^{-\beta-1}e^{a\mathrm{Re}\,t}e^{-r|t|\sin\varepsilon}$, интеграл

$$F(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

абсолютно сходится, равномерно на компактных подмножествах множества $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$. Следовательно, интеграл определяет аналитическую функцию в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$, $\varepsilon \in (0, \theta - \pi/2 - |\arg t|)$, $\delta = |t|^{-1}$, тогда

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{K(\theta)|t|^{\beta}}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{a\mathrm{Re}t}e^{\cos(\arg t+\varphi)}d\varphi \leqslant K(\theta)|t|^{\beta}e^{1+a\mathrm{Re}t},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{K(\theta)}{2\pi}\int\limits_{1/|t|}^{\infty} r^{-\beta-1}e^{a\mathrm{Re}t}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K(\theta)e^{a\mathrm{Re}t}\sin^{1+\beta}\varepsilon|t|^{1+\beta}}{2\pi}\int\limits_{1/|t|}^{\infty} e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr = \frac{K(\theta)\sin^{\beta}\varepsilon}{2\pi}|t|^{\beta}e^{a\mathrm{Re}t},$$

поэтому $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta-\varepsilon)|t|^{\beta}e^{a\mathrm{Re}t}$ при всех $t \in \Sigma_{\theta-\varepsilon-\pi/2}$.

По теореме Фубини и теореме о вычетах при $\lambda > a$

$$\mathfrak{L}[F] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} = H(\lambda) -$$

$$-\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^+}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^-}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right),$$

где $\Gamma_R^0 := \{a + Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\}$, $\Gamma_R^{\pm} := \{a + re^{\pm i\theta} : r \in [R, \infty)\}$. При этом

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{R^{-\beta}K(\theta)d\varphi}{|a+Re^{i\varphi}-\lambda|} \to 0,$$

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^\pm}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{R}^{\infty}\frac{r^{-\beta-1}K(\theta)dr}{|a+re^{\pm i\theta}-\lambda|} \leqslant C_1\int\limits_{R}^{\infty} r^{-\beta-2}dr \to 0,$$

при $R \to \infty$, поскольку $\beta > -1$. Таким образом, $\mathfrak{L}[F] \equiv H$. $\square$

Замечание 2.2.1. При $\beta = 0$ это утверждение совпадает с теоремой 2.6.1 из [77] и с теоремой 0.1 из [128]. При $\beta \in (-1, 0)$ такая теорема была доказана в работе [93].

2.3 Критерий существования разрешающих семейств операторов

Теорема 2.3.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, $\mathcal{D}$ *плотно* $\mathcal{Z}$. *Тогда существуют* p*-разрешающие семейства операторов* $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (2.1.1) *типа* $(\theta_0, a_0, \alpha - m + p)$, $p = m^*, \dots, m-1$, *если и только если* $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in \mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$. *При этом для* $p = m^*, m^* + 1, \dots, m-1$

$$S_p(t) = Z_p(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{m-1-p} R_\lambda \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

где $\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0$, $\Gamma^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| = r_0 > 0, \arg \lambda \in (-\theta, \theta)\}$, $\Gamma^{\pm} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\theta, |\lambda - a| \in [r_0, \infty)\}$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $r_0 > 0$.

Если $z_p \in \mathcal{D}$, $p = m^*, m^* + 1, \dots, m-1$, *то существует единственное решение задачи* (2.1.1), (2.1.2), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p.$$

Решение аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$.

Доказательство. Если существует аналитическое p-разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0, a_0, \alpha - m + p)$ уравнения (2.1.1), $z_p \in \mathcal{D}$, то $S_p(t) z_p$ является решением задачи (2.1.1), (2.1.2) с начальными данными $z_k = 0$, $k \in \{m^*, m^* + 1, \dots, m-1\} \setminus \{p\}$, следовательно, в силу равенства (2.1.1)

$$\lambda^{\alpha} \widehat{S}_p(\lambda) z_p - \lambda^{m-1-p} z_p = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j \widehat{S}_p(\lambda) z_p - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j z_p +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l\widehat{S}_p(\lambda)z_p+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\widehat{S}_p(\lambda)z_p.$$

Отсюда следует, что при соответствующих λ

$$R_\lambda^{-1}\widehat{S}_p(\lambda)z_p=\widehat{S}_p(\lambda)R_\lambda^{-1}z_p=\left(\lambda^{m-1-p}I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{j-1-p}A_j\right)z_p. \tag{2.3.3}$$

Аналогично получим по определению q-разрешающего семейства при $q=p+1,p+2,\dots,m-1$ равенства

$$\widehat{S}_q(\lambda)z_q=R_\lambda\left(\lambda^{m-1-q}I-\sum_{j=q+1}^{m-1}\lambda^{j-1-q}A_j\right)z_q=$$

$$=\lambda^{p-q}\widehat{S}_p(\lambda)z_q+R_\lambda\sum_{j=p+1}^{q}\lambda^{j-1-q}A_jz_q. \tag{2.3.4}$$

Поэтому по теореме 2.2.1 $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0,a_0)$.

Докажем обратное утверждение. Заметим, что в силу определения при $\lambda\in\Gamma$

$$\left\|\lambda^{m-\alpha}R_\lambda\left(\lambda^{\alpha-1-p}I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{\alpha-m-1+j-p}A_j\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a|^{\alpha-m+p+1}}.$$

Рассмотрим интеграл, задающий $Z_p(t)$ при $t>0$, на части контура Γ^+, возьмём $\lambda=a+re^{i\theta}$ и получим для нормы этого интеграла при $p=0$ оценку сверху

$$c_1e^{at}\int_{r_0}^{+\infty}r^{m-\alpha-1}e^{rt\cos\theta}dr\leqslant c_1e^{at}\int_{tr_0c_2}^{+\infty}\frac{\tau^{m-\alpha-1}e^{-\tau}}{t^{m-\alpha}c_2^{m-\alpha}}d\tau\leqslant\frac{c_1c_2^{\alpha-m}\Gamma(m-\alpha)e^{at}}{t^{m-\alpha}},$$

где $c_2=|\cos\theta|$, и при $p=1,2,\dots,m-1$

$$c_1e^{at}\int_{r_0}^{+\infty}r^{m-\alpha-1-p}e^{-c_2rt}dr=-\frac{c_1e^{at}r_0^{m-\alpha-p}e^{-c_2r_0t}}{m-\alpha-p}-$$

$$-\frac{c_1e^{at}r_0^{m-\alpha-p-1}c_2te^{-c_2r_0t}}{(m-\alpha-p)(m-\alpha-p-1)}-\dots-$$

$$-\frac{c_1 e^{at} r_0^{m-\alpha-1}(c_2 t)^{p-1} e^{-c_2 r_0 t}}{(m-\alpha-p)(m-\alpha-p-1)\dots(m-\alpha-1)}+$$

$$+\frac{c_1 e^{at}(c_2 t)^p}{(m-\alpha-p)(m-\alpha-p-1)\dots(m-\alpha-1)}\int\limits_{r_0}^{+\infty} e^{-c_2 r t} r^{m-\alpha-1} dr \leqslant c_3 t^{\alpha-m+p} e^{at}.$$

На контуре Γ^- имеем аналогичные неравенства. Такая оценка для нормы интеграла на части контура Γ^0 получится после подстановки $\lambda = a + r_0 e^{i\varphi}$ и будет иметь вид при $p = 0, 1, \dots, m-1$

$$c_1 r_0^{m-\alpha-1-p} e^{at} \int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{t r_0 \cos\varphi} d\varphi \leqslant 2\pi c_1 r_0^{m-\alpha-1-p} e^{(a+r_0)t}.$$

В итоге

$$\|Z_p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C t^{\alpha-m+p} e^{(a+r_0)t} \tag{2.3.5}$$

при $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$, и к функциям Z_p можно применять преобразование Лапласа. Кроме того, из оценок (2.3.5) следует, что семейства операторов $\{Z_p(t) : t > 0\}$, $p = 0, 1, \dots, m-1$, могут быть аналитически продолжены в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0,\ t \neq 0\}$, учитывая произвольность $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

При $\mu \in \mathbb{C}$, взятом правее контура Γ,

$$\left\|\frac{\lambda^{m-\alpha} R_\lambda}{\mu-\lambda} \cdot \left(\lambda^{\alpha-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m-1+j-p} A_j\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|^{\alpha-m+p+1}|\mu-\lambda|},$$

при этом $2 + p + \alpha - m > 1$, поэтому функции

$$\mathfrak{L}[Z_p](\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda^{m-\alpha} R_\lambda}{\mu-\lambda} \cdot \left(\lambda^{\alpha-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m-1+j-p} A_j\right) d\lambda =$$

$$= \mu^{m-1-p} R_\mu \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-m} A_j\right)$$

являются аналитическими в части плоскости $\mathbb{C}$, ограниченной слева контуром Γ. Поскольку θ и a можно взять сколь угодно близкими к θ_0 и a_0 соответственно, то $\mathfrak{L}[Z_p](\mu)$ аналитичны в S_{θ_0, a_0} при $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$. Используя этот факт, нетрудно показать, что значение $Z_p(t)$ не зависит от выбора параметров $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$.

Зададим контуры $\Gamma_R^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\theta, |\lambda - a| \in [r_0, R]\}$, $\Gamma_R^2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| = R > 0, \arg\lambda \in (-\theta, \theta)\}$, $\Gamma_R^3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\theta, |\lambda - a| \in (R, \infty)\}$, $\Gamma_R^4 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\theta, |\lambda - a| \in (-R, -\infty)\}$, $\Gamma_R = \Gamma_0 \cup \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2$ — замкнутый положительно ориентированный контур. Тогда $\Gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_R^3 \cup \Gamma_R^4 \setminus \Gamma_R^2$. При $p = m^*, m^* + 1, \dots, m-1$, $z_p \in \mathcal{D}$

$$\mathfrak{L}\left[J_t^{m-\alpha} Z_p\right](\mu) = \mu^{\alpha-1-p} R_\mu \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-m} A_j \right),$$

$$J_t^{m-\alpha} Z_p(t) z_p = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^3 \cup \Gamma_R^4} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^2} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p,$$

$$\left\| \int_{\Gamma_R^s} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) \frac{d\lambda}{\lambda^{p+1}} z_p \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_{\Gamma_R^s} \left(\sum_{j=1}^{p} |\lambda|^{-m+j} \|A_j z_p\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{l=1}^{n} |\lambda|^{\alpha_l - \alpha} \|B_l z_p\|_{\mathcal{Z}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{r} |\lambda|^{-\beta_s - \alpha} \|C_s z_p\|_{\mathcal{Z}} \right) \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{p+1}} \to 0$$

при $R \to \infty$, так как $p+1+m-p = m+1 > 1$, $p+1+\alpha-\alpha_l \geqslant 1+\alpha-\alpha_l > 1$, $p+1+\alpha+\beta_s > 1$. Поэтому по теореме о вычетах $J_t^{m-\alpha} Z_0(0) z_0 = z_0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $J_t^{m-\alpha} Z_p(0) z_p = 0$, $z_p \in \mathcal{D}$, $p = 1, 2, \dots, m-1$.

Далее, пусть $m^* = 0$, т. е. $\underline{m} \leqslant 1$, $\overline{m} = 0$. Это означает, что $\alpha_l - m_l < \alpha - m$ и $\alpha_l < 1$ для всех $l = 1, 2, \dots, n$. Тогда при $\alpha > 1$ имеем $\alpha - \alpha_l > 1$ и при $z_0 \in \mathcal{D}$ с учетом равенства (1.1.1)

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+1} Z_0(t)z_0\right](\mu) = \mu^\alpha R_\mu \left(z_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{j-m} A_j z_0\right) - z_0 =$$

$$= R_\mu \left(\sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right) z_0,$$

$$D_t^{\alpha-m+1} Z_0(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_\lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s\right) e^{\lambda t} z_0 d\lambda,$$

поэтому $D_t^{\alpha-m+1} Z_0(0)z_0 = 0$. Продолжая этот процесс, на m-м шаге получим

$$D_t^{\alpha-1} Z_0(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_\lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l+m-2} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s+m-2} C_s\right) e^{\lambda t} z_0 d\lambda,$$

$D_t^{\alpha-1} Z_0(0)z_0 = 0$, так как $m_l \leqslant 1$, $\alpha_l + m - 2 - \alpha < m_l - 2 \leqslant -1$.

Пусть $m^* \leqslant p$, т. е. $\underline{m} \leqslant p+1$, $\overline{m} \leqslant p$, тогда $\alpha_l < p+1$ при $\alpha_l - m_l < \alpha - m$, а также $\alpha_l \leqslant p$ при $\alpha_l - m_l > \alpha - m$. Получаем при $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $q = 1, 2, \ldots, p$, $z_p \in \mathcal{D}$

$$D_t^{\alpha-m+q} Z_p(t)z_p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\mu}{\lambda^{p-q+1}} z_p +$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s\right) \frac{e^{\lambda t} z_p d\lambda}{\lambda^{p-q+1}},$$

следовательно, при $q < p$ $D_t^{\alpha-m+q} Z_p(0)z_p = 0$, так как $p - q + 1 \geqslant 2$. Отсюда же видно, что $D_t^{\alpha-m+p} Z_p(0)z_p = z_p$ по теореме о вычетах и в силу неравенств $m - p + 1 > 1$, $\alpha - \alpha_l + 1 > 1$, $\alpha + \beta_s + 1 > 1$.

При $p \leqslant m-2$, $z_p \in \mathcal{D}$ имеем

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+p+1} Z_p(t)z_p\right](\mu) = \mu^\alpha R_\mu \left(z_p - \sum_{j=p+1}^{m-1} \mu^{j-m} A_j z_p\right) - z_p =$$

$$= R_\mu \left(\sum_{j=1}^{p} \mu^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right) z_p,$$

$$D_t^{\alpha-m+p+1} Z_p(t)z_p =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)e^{\lambda t}z_p d\lambda.$$

При этом $j-m\leqslant p-m\leqslant -2$, для $\alpha_l-m_l<\alpha-m$ выполняется

$$\alpha-\alpha_l>m-m_l\geqslant m-\underline{m}\geqslant m-(p+1)\geqslant m-(m-2)-1=1,$$

а для $\alpha_l-m_l>\alpha-m$ справедливы неравенства $\alpha-\alpha_l\geqslant\alpha-p\geqslant\alpha-m+2>1$. Следовательно, $\alpha>1$, $D_t^{\alpha-m+p+1}Z_p(0)z_p=0$. Продолжая процесс, получим при $p\leqslant m-3$, $q=p+2,p+3,\ldots,m-1$

$$D_t^{\alpha-m+q}Z_p(t)z_p=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{q-p-1}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)e^{\lambda t}z_p d\lambda,$$

$j-m+q-p-1\leqslant q-m-1\leqslant -2$, для $\alpha_l-m_l<\alpha-m$ имеем

$$p+1-q+\alpha-\alpha_l>p+2-m+m-m_l=p+2-m_l\geqslant 1,$$

а для $\alpha_l-m_l>\alpha-m$ выполняется

$$p+1-q+\alpha-\alpha_l\geqslant p+2-m+\alpha-p=2-m+\alpha>1.$$

Так как $p+1-q<0$, из полученного следует, что $\alpha>1$, $D_t^{\alpha-m+q}Z_p(0)z_p=0$.

Далее, в силу следствий 1.2.1, 1.2.2 $\lim\limits_{t\to 0+}D_t^{\alpha_l-m_l+k}Z_p(t)z_p=0$ при $z_p\in\mathcal{D}$, $l=1,2,\ldots,n$, поэтому

$$\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha}Z_p(t)z_p\right](\mu)=\mu^{\alpha}\mathfrak{L}[Z_p(t)z_p](\mu)-\mu^{m-1-p}z_p=$$

$$=\mu^{\alpha}R_\mu\left(\mu^{m-1-p}z_p-\sum_{j=p+1}^{m-1}\mu^{j-1-p}A_jz_p\right)-\mu^{m-1-p}z_p=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m-1}\mu^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\mu^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\mu^{-\beta_s}C_s\right)\mu^{m-1-p}\times$$

$$\times R_\mu\left(z_p-\sum_{j=p+1}^{m-1}\mu^{j-m}A_jz_p\right)-\sum_{j=p+1}^{m-1}\mu^{j-1-p}A_jz_p=$$

$$= \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} Z_p(t)z_p + \sum_{l=1}^{n} B_l D_l^{\alpha_l} Z_p(t)z_p + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} Z_p(t)z_p\right](\mu).$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на данное равенство, получим, что $Z_p(t)z_p$ при $z_p \in \mathcal{D}$ является решением уравнения (2.1.1) при $t > 0$, $p = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$.

Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — два решения задачи (2.1.1), (2.1.2) на $\mathbb{R}_+$. Зафиксируем $T > 0$, тогда $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ — решение задачи (2.1.1), (2.1.2) при $z_p = 0$, $p = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, на интервале $(0, T)$. Доопределим функцию y нулем при $t \in [T, +\infty)$. Такая функция ограничена и также является решением этой задачи при всех $t > 0$, кроме, может быть, $t = T$. Заметим, что в силу следствий 1.2.1, 1.2.2 $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha_l - m_l + k} y(t) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Подействуем преобразованием Лапласа на обе части равенства

$$D_t^{\alpha} y(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} y(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} y(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_l} y(t)$$

и получим

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha} y](\mu) = \mu^{\alpha}\mathfrak{L}[y](\mu) = \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} y + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} y + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} y\right](\mu) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right)\mathfrak{L}[y](\mu).$$

Поэтому

$$\left(\mu^{\alpha} I - \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s\right)\mathfrak{L}[y](\mu) \equiv 0$$

и при $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $\mathfrak{L}[y](\mu) \equiv 0$. Отсюда $z_1(t) - z_2(t) = y(t) \equiv 0$ при $t \in (0, T)$. Так как $T > 0$ можно выбрать сколь угодно большим, $z_1(t) = z_2(t)$ при всех $t > 0$. $\square$

Следствие 2.3.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $\mathcal{D}$

плотно $\mathcal{Z}$. *Если при* $p \in \{m^*, m^*+1, \dots, m-1\}$ *существует аналитическое* p*-разрешающее семейство операторов уравнения* (2.1.1) *типа* $(\theta_0, a_0, \alpha-m+p)$, *то для* $q \in \{p+1, p+1, \dots, m-1\}$, $z_q \in \mathcal{D}$

$$S_q(t)z_q = J_t^{q-p}S_p(t)z_q + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_\lambda \sum_{j=p+1}^{q} \lambda^{j-1-q}A_j z_q e^{\lambda t}d\lambda. \tag{2.3.6}$$

Если существует аналитическое m^**-разрешающее семейство операторов уравнения* (2.1.1) *типа* $(\theta_0, a_0, \alpha - m + m^*)$, *то при каждом* $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$ *существует единственное аналитическое* p*-разрешающее семейство операторов уравнения* (2.1.1) *типа* $(\theta_0, a_0, \alpha - m + p)$.

Доказательство. Из существования p-разрешающего семейства операторов уравнения (2.1.1) и равенства (2.3.4) следует (2.3.6). Интеграл из этого равенства сходится, так как при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\left\| R_\lambda \sum_{j=p+1}^{q} \lambda^{j-1-q}A_j \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{2C}{|\lambda - a|^{\alpha-m+p+1}|\lambda|^{m-p}}, \quad \alpha + 1 > 1.$$

Поэтому существование m^*-разрешающего семейства операторов уравнения (2.1.1) влечет существование аналитических p-разрешающих семейств операторов уравнения (2.1.1) типа $(\theta_0, a_0, \alpha-m+p)$ при всех $p = m^*+1, m^*+2, \dots, m-1$. Отсюда по теореме 2.3.1 следует единственность решения задачи (2.1.1), (2.1.2) при любых $z_p \in \mathcal{D}$, $p = m^*, m^*+1, \dots, m-1$. Тогда по определению два p-разрешающих семейства ограниченных операторов, задающих единственное решение задачи (2.1.1), (2.1.2), совпадают на плотном множестве $\mathcal{D}$, а потому совпадают и на всем пространстве. $\square$

Замечание 2.3.1. Таким образом, p-разрешающие семейства $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ при $p > m^*$ с помощью формулы (2.3.6) можно определить по m^*-разрешающему семейству $\{S_{m^*}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ и операторам A_j, $j = m^*+1, m^*+2, \dots, p$ (или наоборот, если известно о существовании искомого семейства операторов).

2.4 Одна теорема о непрерывности в нуле разрешающих семейств

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $A_j\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $B_l\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant 0$, $C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$. *Тогда семейство операторов* $\{D^{\alpha-1}_t S_{m-1}(t)\}$ *непрерывно в точке* $t=0$ *в операторной норме из* $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, *если и только если* $A_1,A_2,\dots,A_n,B_1,B_2,\dots,B_r,C_1,C_2,\dots,C_r\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Из равенства (2.3.3) при $p=m-1$ следует, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(D^{\alpha-1}_t S_{m-1}(t)-I)dt=\lambda^{\alpha-1}R_\lambda-\frac{I}{\lambda}$$

при $\mathrm{Re}\lambda>a_0$. Пусть функция $\eta(t):=\|D^{\alpha-1}_t S_{m-1}(t)-I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $\eta(0)=0$. Для $\varepsilon>0$ возьмем такое $\delta>0$, что $\eta(t)\leqslant\varepsilon$ при всех $t\in[0,\delta]$.

По определению класса $\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$

$$\|\lambda^{\alpha-1}R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{K(\theta,a)|\lambda|^{\alpha-1}}{|\lambda-a|^\alpha}\leqslant\frac{C}{|\lambda|},$$

следовательно, $\|D^{\alpha-1}_t S_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}=\|\mathfrak{L}^{-1}[\lambda^{\alpha-1}R_\lambda]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant Ke^{at}$. Поэтому выполняется неравенство $\eta(t)\leqslant Ke^{at}+1$, $a>a_0$, при $t\geqslant 0$, следовательно,

$$\left\|\lambda^{\alpha-1}R_\lambda-\frac{I}{\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\int\limits_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)dt+\int\limits_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)dt\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda}+o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

при $\mathrm{Re}\lambda\to+\infty$. Поэтому при достаточно больших $\mathrm{Re}\lambda>N$ выполняется неравенство $\|\lambda^\alpha R_\lambda-I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}<1$, и оператор R_λ непрерывно обратим, т. е.,

$$\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}).$$

Возьмем последовательность $\{x_n\}\subset\mathcal{Z}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_k^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda_k^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda_k^{-\beta_s}C_s\right)x_n=0,\ k=1,\dots,m-1+n+r, \tag{2.4.7}$$

где $\mathrm{Re}\lambda_k > N$, $k = 1, 2, \ldots, m-1+n+r$. Зафиксируем $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{m-1+n+r}$, тогда в полученном наборе равенств определитель матрицы коэффициентов при векторе $(A_1 x_n, A_2 x_n, \ldots, C_r x_n)$ как функция от λ_1 имеет вид

$$D(\lambda_1) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_1^{\alpha-m+j} a_j + \sum_{l=1}^{n} \lambda_1^{\alpha_l} b_l + \sum_{s=1}^{r} \lambda_1^{-\beta_s} c_s,$$

где $a_1, a_2, \ldots, c_r$ зависят от $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{m-1+n+r}$. Функция $D(\lambda_1)$ аналитична в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\lambda_1 > n\}$, поэтому ее нули изолированы. Выберем в этой полуплоскости точку λ_1, не являющуюся нулем, тогда матрица коэффициентов системы (2.4.7) невырождена. Подействуем обратной матрицей на систему равенств (2.4.7), занесем ее как непрерывный оператор в $\mathbb{R}^{m-1+n+r}$ под знак предела и получим равенства

$$\lim_{n\to\infty} A_j x_n = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\lim_{n\to\infty} B_l x_n = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad \lim_{n\to\infty} C_s x_n = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, r.$$

Это означает непрерывность в нуле линейных операторов

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_r \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}),$$

а значит, и их ограниченность.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_r \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, то, как показано в §1.3, $\lim\limits_{t\to 0+} \|D_t^{\alpha-m+p} S_p(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = 0$ для всех $p = m^*, \ldots, m-1$. $\square$

2.5 Неоднородное уравнение в секториальном случае

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + f(t), \ t \in (0, T). \tag{2.5.8}$$

Решением задачи

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = 0, \ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \tag{2.5.9}$$

для уравнения (2.5.8) будем называть такую функцию $z : (0,T) \to \mathcal{Z}$, что выполняются включения $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((0,T);\mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([0,T);\mathcal{Z})$, $J_t^{m-\alpha} z \in C^j((0,T);D_{A_j})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $J_t^{m_l-\alpha_l} z \in C^{m_l}((0,T);D_{B_l})$, $l = 1,2,\dots,n$, $J_t^{\beta_s} z \in C((0,T);D_{C_s})$, $s = 1,2,\dots,r$, выполняются условия (2.5.9) и равенство (2.5.8) при $t \in (0,T)$.

Введем в рассмотрение операторы

$$V_\kappa(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^\kappa R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

заметим, что $V_0(t) = Z_{m-1}(t)$. Нетрудно показать также равенства

$$D_t^{\alpha-m+j} Z_{m-1}(t) = V_{\alpha-m+j}(t), \quad D_t^{\alpha_l} Z_{m-1}(t) = V_{\alpha_l}(t), \quad J_t^{\beta_s} Z_{m-1}(t) = V_{-\beta_s}(t) \tag{2.5.10}$$

при $j = 1,2,\dots,m-1$, $l = 1,2,\dots,n$, $s = 1,2,\dots,r$.

Лемма 2.5.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,n$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s = 1,2,\dots,r$, $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $f \in C((0,T);\mathcal{D}) \cap L_1(0,T;\mathcal{D})$. *Тогда функция*

$$z_f(t) := \int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (2.5.8), (2.5.9).

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве неравенств (2.3.5), получим при $t \in [0,T]$, $\kappa < \alpha - 1$

$$\|V_\kappa(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant 2c_1 e^{at} \int\limits_{r_0}^{+\infty} r^{\kappa-\alpha} e^{-rc_2 t} dr + c_1 r_0^{\kappa-\alpha} e^{at} \int\limits_{-\theta_0+\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} e^{tr_0 \cos\varphi} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1 e^{(a-r_0c_2)t} r_0^{\kappa-\alpha+1}}{\alpha-\kappa-1} + 2\pi c_1 e^{(a+r_0)t} r_0^{\kappa-\alpha} \leqslant Ce^{(a+r_0)t}$$

для некоторого $C > 0$,

$$\left\| \int_0^t V_\kappa(t-s) f(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C e^{(a+r_0)t} \int_0^t \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} ds. \qquad (2.5.11)$$

Кроме того, при $\kappa = \alpha - 1$, $z_0 \in \mathcal{D}$

$$V_{\alpha-1}(t) z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{\alpha-1} R_\lambda e^{\lambda t} z_0 d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda} z_0 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-1} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^n \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^r \lambda^{-\beta_s} C_s \right) z_0 e^{\lambda t} d\lambda =$$

$$= z_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-1} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^n \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^r \lambda^{-\beta_s} C_s \right) z_0 e^{\lambda t} d\lambda,$$

при этом для $\lambda \in \Gamma$

$$\left\| \lambda^{-1} R_\lambda \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^n \lambda^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^r \lambda^{-\beta_s} C_s \right) z_0 \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{c_1 \|z_0\|_{\mathcal{D}}}{|\lambda|^{1+\delta}},$$

где $\delta = \min\{1, \alpha - \alpha_l : l = 1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, при $t \in [0, T]$

$$\|V_{\alpha-1}(t) z_0\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C e^{(a+r_0)t} \|z_0\|_{\mathcal{D}},$$

$$\left\| \int_0^t V_{\alpha-1}(t-s) f(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C e^{(a+r_0)t} \int_0^t \|f(s)\|_{\mathcal{D}} ds. \qquad (2.5.12)$$

В силу замкнутости операторов $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, получим равенство

$$\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} + \sum_{l=1}^n B_l D_t^{\alpha_l} + \sum_{s=1}^r C_s J_t^{\beta_s} \right) \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds =$$

$$= \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} + \sum_{l=1}^n B_l D_t^{\alpha_l} + \sum_{s=1}^r C_s J_t^{\beta_s} \right) Z_{m-1}(t-s) f(s) ds =$$

$$= \int_0^t \sum_{j=1}^{m-1} D_t^{\alpha-m+j} Z_{m-1}(t-s) A_j f(s) ds + \int_0^t \sum_{l=1}^n D_t^{\alpha_l} Z_{m-1}(t-s) B_l f(s) ds +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{s=1}^r J_t^{\beta_s} Z_{m-1}(t-s) C_s f(s) ds.$$

Интегралы в последних двух строках сходятся в силу свойств разрешающих операторов $Z_{m-1}(t)$ (см. определение p-разрешающего семейства операторов и теорему 2.3.1) и того, что $f \in C((0,T);\mathcal{D}) \cap L_1(0,T;\mathcal{D})$.

Далее доопределим f нулем при $t \in [T,\infty)$ и получим равенства

$$\mathfrak{L}[z_f](\mu) = \mathfrak{L}[Z_{m-1}](\mu)\mathfrak{L}[f](\mu) = R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),\ \mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha} z_f](\mu) = \mu^{\alpha-m} R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$J_t^{m-\alpha} z_f(t) = \int\limits_0^t V_{\alpha-m}(t-s) f(s) ds,$$

поэтому $J_t^{m-\alpha} z_f(0) = 0$ в силу (2.5.12) при $m = 1$ или (2.5.11) в противном случае. При $k = 1, 2, \dots, m-1$ последовательно получаем

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k} z_f](\lambda) = \mu^{\alpha-m+k} R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$D_t^{\alpha-m+k} z_f(t) = \int\limits_0^t V_{\alpha-m+k}(t-s) f(s) ds, \quad D_t^{\alpha-m+k} z_f(0) = 0,$$

с учетом неравенств (2.5.11) при $k = 1, 2, \dots, m-2$ и (2.5.12) при $k = m-1$.

Заметим, что согласно следствиям 1.2.1, 1.2.2 $D_t^\gamma z_f(0) = 0$ при $\gamma = \alpha_l - m_l + k$, $k \in \{0, 1, \dots, m_l - 1\}$, $l = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha z_f](\mu) = \mu^\alpha R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) = \mathfrak{L}[f](\mu) +$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^n \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^r \mu^{-\beta_s} C_s\right) R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) = \mathfrak{L}[f](\mu) +$$
$$+\mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} Z_{m-1}(t) + \sum_{l=1}^n B_l D_t^{\alpha_l} Z_{m-1}(t) + \sum_{s=1}^r C_s J_t^{\beta_s} Z_{m-1}(t)\right] \mathfrak{L}[f](\mu) =$$
$$= \mathfrak{L}[f](\mu) + \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z_f(t) + \sum_{l=1}^n B_l D_t^{\alpha_l} z_f(t) + \sum_{s=1}^r C_s J_t^{\beta_s} z_f(t)\right].$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим равенство (2.5.8) при $t \in (0,T)$, так как $f \in C((0,T);\mathcal{D})$.

Доказательство единственности решения такое же, как для однородного уравнения. $\square$

Функция $f:[0,T]\to\mathcal{Z}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\gamma\in(0,1]$, если

$$\exists C>0 \quad \forall s,t\in[0,T] \quad \|f(s)-f(t)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant C|s-t|^{\gamma}.$$

При этом используется обозначение $f\in C^{\gamma}([0,T];\mathcal{Z})$.

Лемма 2.5.2. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant 0$, $A_j\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $B_l\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0,a_0)$, $f\in C^{\gamma}([0,T];\mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma\in(0,1]$. *Тогда функция* z_f *является единственным решением задачи* (2.5.8), (2.5.9).

Доказательство. Как и прежде, для $\kappa<\alpha-1$ существует такое $C>0$, что при всех $t\in[0,T]$ $\|V_\kappa(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant Ce^{(a+r_0)t}$,

$$\left\|\int\limits_0^t V_\kappa(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant Ce^{(a+r_0)t}\int\limits_0^t\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}ds. \tag{2.5.13}$$

Возьмем $r_0\geqslant 1$ в определении контура Γ (см. формулировку теоремы 2.3.1), тогда при $\kappa=\alpha-1$, $\delta\in(0,1)$

$$\|V_{\alpha-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant 2c_1e^{at}\int\limits_{r_0}^{+\infty}r^{-1}e^{-rc_2t}dr+c_1r_0^{-1}e^{at}\int\limits_{-\theta_0+\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}e^{tr_0\cos\varphi}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1e^{at}\int\limits_{r_0}^{+\infty}r^{\delta-1}e^{-rc_2t}dr+2\pi c_1e^{(a+r_0)t}r_0^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c_1e^{at}}{c_2^{\delta}t^{\delta}}\int\limits_{c_2r_0t}^{+\infty}\tau^{\delta-1}e^{-\tau}d\tau+c_3e^{(a+r_0)t}\leqslant\frac{2c_1\Gamma(\delta)e^{at}}{c_2^{\delta}t^{\delta}}+c_3e^{(a+r_0)t}\leqslant Ct^{-\delta}e^{(a+r_0)t},$$

$$\left\|\int\limits_0^t V_{\alpha-1}(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\frac{Ct^{1-\delta}}{1-\delta}e^{(a+r_0)t}\|f\|_{C([0,t];\mathcal{Z})}. \tag{2.5.14}$$

Доопределим f нулем при $t\in[T,\infty)$ и получим

$$\mathfrak{L}[z_f](\mu)=R_\mu\mathfrak{L}[f](\mu),\quad \mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}z_f](\mu)=\mu^{\alpha-m}R_\mu\mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$J_t^{m-\alpha}z_f(t)=\int\limits_0^t V_{\alpha-m}(t-s)f(s)ds,$$

поэтому $J_t^{m-\alpha}z_f(0)=0$ в силу (2.5.13) при $m>1$ или согласно (2.5.14) при $m=1$. Последовательно получаем

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k}z_f](\lambda)=\mu^{\alpha-m+k}R_\mu\mathfrak{L}[f](\mu),$$

$$D_t^{\alpha-m+k}z_f(t)=\int\limits_0^t V_{\alpha-m+k}(t-s)f(s)ds,\quad D_t^{\alpha-m+k}z_f(0)=0,$$

с учетом (2.5.13) при $k=1,2,\ldots,m-2$ и в силу (2.5.14) при $k=m-1$. В итоге имеем

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha Z_{m-1}](\lambda)=\mu^\alpha R_\mu,\quad D_t^\alpha Z_{m-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^\alpha R_\mu e^{\mu t}d\mu,$$

$$\|D_t^\alpha Z_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant 2c_1e^{at}\int\limits_{r_0}^{+\infty}e^{-rc_2t}dr+c_1e^{at}\int\limits_{-\theta_0+\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}e^{tr_0\cos\varphi}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c_1e^{(a-r_0c_2)t}}{c_2t}+2\pi c_1e^{(a+r_0)t}\leqslant Ct^{-1}e^{(a+r_0)t}.$$

Покажем, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^t\left(\sum_{j=1}^{m-1}A_jD_t^{\alpha-m+j}+\sum_{l=1}^{n}B_lD_t^{\alpha_l}+\sum_{s=1}^{r}C_sJ_t^{\beta_s}\right)Z_{m-1}(t-s)f(s)ds=$$

$$=\int\limits_0^t D_t^\alpha Z_{m-1}(t-s)f(s)ds$$

с особенностью в точке $s=t$. (Равенство здесь выполняется в силу свойств операторов $Z_{m-1}(t)$). Действительно,

$$\left\|\int\limits_0^{t-\varepsilon}D_t^\alpha Z_{m-1}(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^{t-\varepsilon}D_t^\alpha Z_{m-1}(t-s)(f(s)-f(t))ds\right\|_{\mathcal{Z}}+\left\|\int\limits_0^{t-\varepsilon}D_t^\alpha Z_{m-1}(t-s)f(t)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 e^{(a+r_0)t} \int\limits_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{\gamma-1} ds + \left\| D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(\varepsilon) f(t) - D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(t) f(t) \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \gamma^{-1} e^{(a+r_0)t} (t^\gamma - \varepsilon^\gamma) + \left\| D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(\varepsilon) f(t) - D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(t) f(t) \right\|_{\mathcal{Z}}.$$

Последнее выражение при $\varepsilon \to 0+$ стремится к

$$C_1 \gamma^{-1} e^{(a+r_0)t} t^\gamma + \left\| f(t) - D_t^{\alpha-1} Z_{m-1}(t) f(t) \right\|_{\mathcal{Z}}.$$

Учитывая замкнутость операторов $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, получим

$$\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} \right) \int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} \right) Z_{m-1}(t-s) f(s) ds.$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha z_f](\mu) = \mu^\alpha R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) = \mathfrak{L}[f](\mu) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu^{\alpha-m+j} A_j + \sum_{l=1}^{n} \mu^{\alpha_l} B_l + \sum_{s=1}^{r} \mu^{-\beta_s} C_s \right) R_\mu \mathfrak{L}[f](\mu) = \mathfrak{L}[f](\mu) +$$

$$+ \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} Z_{m-1}(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} Z_{m-1}(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} Z_{m-1}(t) \right] \mathfrak{L}[f](\mu) =$$

$$= \mathfrak{L}[f](\mu) + \mathfrak{L}\left[\sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z_f(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z_f(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z_f(t) \right].$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим равенство (2.5.8) при $t \in (0, T)$, так как $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. $\square$

В силу линейности исследуемого уравнения (2.5.8) леммы 2.5.1 и 2.5.2 сразу влекут следующий результат.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $A_j \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$,

$s=1,2,\dots,r$, $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=m^*,m^*{+}1,\dots,m{-}1$, $f\in[C((0,T);\mathcal{D})\cap L_1(0,T;\mathcal{D})]\cup C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma\in(0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.5.8), (2.5.9), *при этом оно имеет вид*

$$z(t)=\sum_{p=m^*}^{m-1}Z_p(t)z_p+\int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds. \tag{2.5.15}$$

2.6 Квазилинейное уравнение специального вида

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $F:Z\to\mathcal{Z}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D^\alpha_t z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD^{\alpha-m+j}_t z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD^{\alpha_l}_t z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ^{\beta_s}_t z(t)+$$

$$+F(t,D^{\alpha-m}_t z(t),D^{\alpha-m+1}_t z(t),\dots,D^{\alpha-1}_t z(t)). \tag{2.6.16}$$

Решением неполной задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}_t z(t_0)=z_k,\ \ k=m^*,m^*+1,\dots,m-1, \tag{2.6.17}$$

для уравнения (2.6.16) на $(t_0,t_1]$ будем называть такую функцию $z:(t_0,t_1]\to\mathcal{Z}$, что $J^{m-\alpha}_t z\in C^m((t_0,t_1];\mathcal{Z})\cap C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $J^{m-\alpha}_t z\in C^j((t_0,t_1];D_{A_j})$, $j=1,2,\dots,m{-}1$, $J^{m_l-\alpha_l}_t z\in C^{m_l}((t_0,t_1];D_{B_l})$, $l=1,2,\dots,n$, $J^{\beta_s}_t z\in C((t_0,t_1];D_{C_s})$, $s=1,2,\dots,r$, выполняются условия (2.6.17), включение $(t,\ D^{\alpha-m}_t z(t),\ \dots,\ D^{\alpha-1}_t z(t))\in Z$ для $t\in[t_0,t_1]$ и равенство (2.6.16) при $t\in(t_0,t_1]$.

Лемма 2.6.1. *Пусть* $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant0$, $A_j\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $B_l\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, $(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{m-1},\ B_1,\ B_2,\dots,\ B_n,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D$, $k=m^*,m^*{+}1,\dots,m{-}1$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $(t_0,0,0,\dots,0,z_{m^*},z_{m^*+1},\dots,z_{m-1})\in Z$, $F\in C(Z;\mathcal{D})$. *Тогда функция* $z:[t_0,t_1]\to\mathcal{Z}$ *является решением задачи* (2.6.16), (2.6.17), *тогда и только* *тогда, когда* $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}((t_0,t_1];\mathcal{Z})$ *и для всех* $t \in (t_0,t_1]$

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t)z_p + \int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F(s, D_s^{\alpha-m}z(s),\ldots,D_s^{\alpha-1}z(s))ds. \quad (2.6.18)$$

Доказательство. Доказательство данной леммы дословно повторяет доказательство леммы 1.6.1. □

Пусть Z — открытое подмножество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $B : Z \to \mathcal{Z}$ — локально липшицево по $\overline{x}$ отображение в норме $\mathcal{D}$, т. е. для каждого $(t,\overline{x}) \in Z$ существуют $\delta > 0$, $C > 0$, такие, что $[t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\overline{x}) \subset Z$, для всех $(s,\overline{y})$, $(s,\overline{v}) \in [t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\overline{x})$

$$\|F(s,y_1,y_2,\ldots,y_m) - F(s,v_1,v_2,\ldots,v_m)\|_{\mathcal{D}} \leqslant C\sum_{k=1}^{m}\|y_k - v_k\|_{\mathcal{Z}}. \quad (2.6.19)$$

Теорема 2.6.1. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_r\geqslant 0$, $A_j\in\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $B_l\in\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\ldots,n$, $C_s\in\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\ldots,r$, $(A_1,A_2,\ldots,A_{m-1},B_1,B_2,\ldots,B_n,C_1,C_2,\ldots,C_r)\in\mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0,a_0)$, $z_k\in\mathcal{D}$, $k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1$, Z *открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $(t_0,0,0,\ldots,0,z_{m^*},z_{m^*+1},\ldots,z_{m-1})\in Z$, *отображение* $F\in C(Z;\mathcal{D})$ *является локально липшицевым по* $\overline{x}$ *в норме* $\mathcal{D}$. *Тогда существует такое* $t_1>t_0$, *что задача* (2.6.16), (2.6.17) *имеет единственное решение на* $(t_0,t_1]$.

Доказательство. Сделаем замену $y := J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0,t_1],\mathcal{Z})$, тогда $y^{(k)} = D_t^{\alpha-m+k}z$, $k=1,2,\ldots,m-1$. Следовательно, отображение

$$t \to F(t,y(t),y^{(1)}(t),\ldots,y^{(m-1)}(t))$$

действует непрерывно из $[t_0,t_1]$ в $\mathcal{D}$. По лемме 2.6.1 достаточно показать, что уравнение

$$y(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} J_t^{m-\alpha}Z_p(t-t_0)z_p + J_t^{m-\alpha}\int_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F(s,y(s),\ldots,y^{(m-1)}(s))ds$$

имеет единственное решение $y\in C^{m-1}([t_0,t_1],\mathcal{Z})$ для некоторого $t_1>t_0$.

В теореме 1.3.1 доказано, что $D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}(0)=0$, $n=0,1,\dots,m-2$. Возьмём $\mu\in\mathbb{C}$ справа от контура Γ, тогда

$$\left\|\frac{\lambda^{\alpha-m}R_\lambda}{\mu-\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a||\mu-\lambda||\lambda|^{m-1}}.$$

Таким образом, $\mathfrak{L}\left[D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}\right](\mu)=\mu^{\alpha-m+n}R_\mu$. Для $t\in[t_0,t_1]$, $n=0,\ 1,\ \dots,\ m-2$,

$$\|D_t^{\alpha-m+n}Z_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\|\lambda^{\alpha-m+n}R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|e^{\lambda t}||d\lambda|\leqslant C_1e^{(a+r_0)t_1}\leqslant C_2.$$

Для $n=m-1$, $z_0\in\mathcal{D}$

$$D_t^{\alpha-1}Z_{m-1}(t)z_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\lambda^{\alpha-1}R_\lambda e^{\lambda t}z_0d\lambda=$$

$$=z_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\lambda^{-1}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)z_0e^{\lambda t}d\lambda,$$

а при $\lambda\in\Gamma$

$$\left\|\lambda^{-1}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{\alpha-m+j}A_j+\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l+\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)z_0\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\frac{C_3\|z_0\|_{\mathcal{D}}}{|\lambda|^{1+\delta}},$$

где $\delta=\min\{1,\alpha-\alpha_n\}$. Следовательно, для $t\in[t_0,t_1]$

$$\|D_t^{\alpha-1}Z_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant C_4.$$

Далее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.6.1.

$\square$

2.7 Вспомогательные функциональные пространства

Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $n,r,q\in\mathbb{N}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D^\alpha z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ^{\beta_s}z(t)+$$
$$+F(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),\dots,D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),D^{\gamma_2}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t)),\tag{2.7.20}$$

где $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{Z}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha$, $n_i-1<\gamma_i\leqslant n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$. Некоторые γ_i могут быть отрицательными.

Как и в разделе 1.7, определим $\mu^* := m^*(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1, \dots, \gamma_q + 1)$, $\mu_0^* := \max\{\mu^*, 0\}$, поэтому для для решения задачи Коши

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.7.21}$$

для уравнения (2.7.20) с необходимостью выполняются условия

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = 0, \quad k = -r, -r+1, \dots, \mu_0^* - 1;$$

$$D^{\alpha_l-m_l+k}z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m_l - 1, \ l = 1, 2, \dots, n;$$

$$D^{\gamma_i-n_i+k}z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_i, \ i = 1, 2, \dots, q.$$

Пусть Z — открытое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $B : Z \to \mathcal{Z}$ — локально липшицево по $\overline{x}$ отображение в норме $\mathcal{D}$ (см. предыдущий раздел).

Решением задачи (2.7.20), (2.7.21) на $(t_0, t_1]$ будем называть такую функцию $z : (t_0, t_1] \to \mathcal{D}$, что $J^{m-\alpha}z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha-m+j}z \in C((t_0, t_1]; D_{A_j})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $D^{\alpha_l}z \in C((t_0, t_1]; D_{B_l})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $D^{\gamma_i}z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, q$, выполнены условия (2.7.21), включение $(t, D^{\alpha-m-\varrho}z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t), \dots, D^{\alpha-1}z(t), D^{\gamma_1}z(t), D^{\gamma_2}z(t), \dots, D^{\gamma_q}z(t)) \in Z$ при $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (2.7.20) при $t \in (t_0, t_1]$.

Для пространства Гельдера $C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, определим норму

$$\|x\|_{C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})} := \|x\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} + \sup_{s,t \in [0,T], s \neq t} \frac{\|x(s) - x(t)\|_\mathcal{Z}}{|s-t|^\gamma}.$$

При $l \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$C^{l,\gamma}([0, T]; \mathcal{Z}) := \{x \in C^l([0, T]; \mathcal{Z}) : D^l x \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C^{l,\gamma}([0,T];\mathcal{Z})} := \|x\|_{C^{l-1}([0,T];\mathcal{Z})} + \|D^l x\|_{C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})}$.

Лемма 2.7.1. *Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда линейное пространство*

$$C_{\alpha,\gamma}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : (t - t_0)^{m-\alpha}x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}),$$
$$J^{m-\alpha}x \in C^{m-1,\gamma}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})} := \|(t - t_0)^{m-\alpha}x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1,\gamma}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.

Доказательство. Аксиомы нормы легко проверяются непосредственно. Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, тогда существуют пределы $y := \lim\limits_{k\to\infty}(t-t_0)^{m-\alpha}x_k \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $y_1(t) := \lim\limits_{k\to\infty} J^{m-\alpha}x_k \in C^{m-1,\gamma}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Положим $x(t) := (t-t_0)^{\alpha-m}y(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$ в $\mathcal{Z}$ при $t \in (t_0,t_1]$. Ограниченность $\{x_k\}$ в $C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ влечет неравенство $\|x_k(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C(t-t_0)^{\alpha-m}$ при $t \in (t_0,t_1]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}x_k(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}(s-t_0)^{\alpha-m}ds = C\Gamma(\alpha-m+1),$$

поэтому по теореме Лебега существует $J^{m-\alpha}x = J^{m-\alpha}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} J^{m-\alpha}x_k = y_1 \in C^{m-1,\gamma}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Таким образом, $C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ — банахово пространство. $\square$

Лемма 2.7.2. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\ldots,n$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_r\geqslant 0$, $A_j,B_l,C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $l=1,2,\ldots,n$, $s=1,2,\ldots,r$,

$$(A_1,A_2,\ldots,A_{m-1},B_1,B_2,\ldots,B_n,C_1,C_2,\ldots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0,a_0),$$

$z_k\in\mathcal{D}$, $k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1$, $f\in C([0,T];\mathcal{D})\cup C^{\gamma}([0,T];\mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma\in(0,1]$. *Тогда решение задачи* (2.5.8), (2.5.9) *лежит в пространстве*

$$C_{\alpha,\gamma_0}(0,T;\mathcal{Z}) := \{x\in C((0,T];\mathcal{Z}) : t^{m-\alpha}x(t)\in C([0,T];\mathcal{Z}),$$
$$J^{m-\alpha}x\in C^{m-1,\gamma_0}([0,T];\mathcal{Z})\},$$

где $\gamma_0 := \min\{1,\alpha-\alpha_n\}\in(0,1]$.

Доказательство. Согласно теореме 2.5.1 необходимо доказать, что функция (2.5.15) лежит в пространстве $C_{\alpha,\gamma_0}(0,T;\mathcal{Z})$. Из неравенств $\|Z_p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant Ce^{at}t^{\alpha-m+p}$ при $p=m^*,m^*+1,\ldots,m-1$ следует, что Z_0 имеет сингулярность вида $t^{\alpha-m}$ в нуле, а Z_k непрерывны в нуле при $k=1,2,\ldots,m-1$. Поэтому $t^{m-\alpha}z(t)\in C([0,T];\mathcal{Z})$ для z, определенного равенством (2.5.15). Остается показать, что $J^{m-\alpha}z\in C^{m-1,\gamma_0}([0,T];\mathcal{Z})$.

Так как при $k=m^*,m^*+1,\ldots,m-2$ $D^{m-1}J^{m-\alpha}Z_k(t)z_k$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, то $J^{m-\alpha}Z_k(t)z_k\in C^{m-1,\gamma_0}([0,T];\mathcal{Z})$. Функция

$J^{m-\alpha}Z_{m-1}(t)z_{m-1}$ лежит в $C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})$, при этом $D^mJ^{m-\alpha}Z_{m-1}(t)z_{m-1} = D^\alpha Z_{m-1}(t)z_{m-1}$ непрерывно на $(0,T]$. Рассмотрим $D^{m-1}J^{m-\alpha}Z_{m-1}(t)z_{m-1} = D^{\alpha-1}Z_{m-1}(t)z_{m-1} = V_{\alpha-1}(t)z_{m-1}$ в нуле:

$$V_{\alpha-1}(t)z_{m-1} - V_{\alpha-1}(0)z_{m-1} = V_{\alpha-1}(t)z_{m-1} - z_{m-1} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1}R_\lambda\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{\alpha-m+j}A_j - \sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}B_l - \sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}C_s\right)e^{\lambda t}z_{m-1}d\lambda.$$

Поэтому

$$\|V_{\alpha-1}(t)z_{m-1} - z_{m-1}\|_\mathcal{Z} \leqslant C_1\int\limits_\Gamma \frac{e^{t\mathrm{Re}\lambda}|d\lambda|}{|\lambda|^{1+\gamma_0}}\|z_{m-1}\|_\mathcal{D} \leqslant C_2t^{\gamma_0}\|z_{m-1}\|_\mathcal{D},$$

где $\gamma_0 = \min\{1, \alpha - \alpha_n\} \in (0,1]$. Поэтому $V_{\alpha-1}(t)z_{m-1}$ локально гельдерово в нуле со степенью γ_0, а значит, гельдерово на $[0,T]$ и $J^{m-\alpha}Z_{m-1}(t)z_{m-1} \in C^{m-1,\gamma_0}([0,T];\mathcal{Z})$.

При доказательстве теоремы 2.5.1 было показано, что выполняется включение $J^{m-\alpha}z_f \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})$ и $D^{m-1}J^{m-\alpha}z_f = D^{\alpha-1}z_f$ непрерывно дифференцируема на $(0,T]$. Имеем также, что

$$\|D^{\alpha-1}z_f(t) - D^{\alpha-1}z_f(0)\|_\mathcal{Z} = \left\|\int\limits_0^t V_{\alpha-1}(t-s)f(s)ds\right\|_\mathcal{Z} \leqslant C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}t$$

при некотором $C > 0$ в силу (2.5.11). Таким образом, показано, что $J^{m-\alpha}z_f \in C^{m-1,\gamma_0}([0,T];\mathcal{Z})$ и $z_f \in C_{\alpha,\gamma_0}(0,T;\mathcal{Z})$. □

Лемма 2.7.3. *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k < m-1$ существует такое $C > 0$, что при всех $x \in C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $s,t \in [t_0,t_1]$ $\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_\mathcal{Z} \leqslant C\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|s-t|$.*

Доказательство. Для $k \in \mathbb{Z}$, $k < -1$, $s,t \in [t_0,t_1]$, $s < t$ по определению дробного интеграла Римана — Лиувилля и в силу теоремы Лагранжа

$$D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t) = (s-t)D^{\alpha-m+k+1}x(\xi) = (s-t)J^{-k-1}J^{m-\alpha}x(\xi) =$$
$$= (s-t)\int\limits_{t_0}^{\xi}\frac{(\xi-\tau)^{-k-2}}{\Gamma(-k-1)}J^{m-\alpha}x(\tau)d\tau,$$

где ξ — некоторое число между s и t. Следовательно,

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant (s-t)\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}\frac{(t_1-t_0)^{-k-1}}{\Gamma(-k)}.$$

При $k \in \{-1, 0, \ldots, m-2\}$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant (s-t)\max_{\tau\in[s,t]}\|D^{\alpha-m+k+1}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(s-t).$$

$\square$

Замечание 2.7.1. В условиях леммы 2.7.3 легко показать, что для всех $x \in C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$

$$\|D^{\alpha-m+k}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-k)}\|J^{m-\alpha}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{-k}.$$

Лемма 2.7.4. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$*,* $\gamma \in (0,1]$*,* $x \in C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$*,* $n-1 < \beta \leqslant n \in \mathbb{Z}$*,* $\beta < \alpha-1$*,* $\alpha - m \neq \beta - n$*. Тогда* $D^\beta x \in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})$*.*

Доказательство. Если $\beta - n < \alpha - m$, то $n \leqslant m-1$, при $x \in C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ $J^{n-\beta}x = J^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x$. Поэтому для $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$D^kJ^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x(t) = \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l}D^{\alpha-m+l}x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)}+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)}D^{\alpha-m+k}x(s)ds, \tag{2.7.22}$$

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)}D^{\alpha-m+k}x(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)}.$$

В случае $\beta - n > \alpha - m$ имеем $n \leqslant m-2$ в силу условия $\beta < \alpha - 1$. Следовательно, при $k = 0, 1, \ldots, m-2$

$$D^kJ^{n-\beta}x(t) = D^kJ^{n-\beta}D^{m-\alpha}J^{m-\alpha}x(t) = D^kJ^{n-\beta}D^1J^{\alpha-m+1}J^{m-\alpha}x(t) =$$

$$= D^kJ^{n-\beta}\left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}J^{m-\alpha}x(t_0) + J^{\alpha-m+1}D^{\alpha-m+1}x(t)\right) =$$

$$= \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+n-\beta-k}J^{m-\alpha}x(t_0)}{\Gamma(\alpha-m+n-\beta-k+1)} + D^k J^{\alpha-m+n-\beta+1}D^1 J^{m-\alpha}x(t) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l}D^{\alpha-m+l}x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)} D^{\alpha-m+k+1}x(s)ds. \qquad (2.7.23)$$

При получении последнего равенства использованы формула (2.7.22) и сдвиг нумерации в сумме. Повторяя рассуждения предыдущего шага в доказательстве, получим сходимость последнего интеграла при $k = 0, 1, \ldots, m-2$, поэтому $D^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. $\square$

Определим пространство

$$C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C_{\alpha,\gamma}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k}x(t_0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \mu_0^* - 1\}.$$

Замечание 2.7.2. По построению μ_0^* при $x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ имеем равенства $D^{\alpha_l - m_l + k}x(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m_l - 1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $D^{\gamma_i - n_i + k}x(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$.

Лемма 2.7.5. *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$, $\gamma_q < \alpha - 1$. Тогда $D^{\gamma_i}x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и существует такое $C > 0$, что для всех $x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$*

$$\|D^{\gamma_i}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \leqslant C\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}. \qquad (2.7.24)$$

Доказательство. Из замечания 2.7.2 и леммы 2.7.4 следует, что при $x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ выполняются включения $D^{\gamma_i}x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Из (2.7.22) и равенств $D^{\alpha-m+k}x(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$, получим при $\gamma_i - n_i < \alpha - m$

$$D^{\gamma_i}x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i}J^{m-\alpha}x(s)ds, \qquad (2.7.25)$$

для $\gamma_i - n_i > \alpha - m$ в силу (2.7.23)

$$D^{\gamma_i}x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)} D^{n_i+1}J^{m-\alpha}x(s)ds,$$

и в обоих случаях выполняется неравенство (2.7.24). □

Возьмем $\underline{\gamma} \in (0,1)$, равное минимуму из положительных чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m$, и минимум $\overline{\gamma} \in (0,1)$ из чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1$, таких, что $n_i - \gamma_i + \alpha - m < 0$. Определим $\gamma^* := \min\{\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\} \in (0,1)$.

Замечание 2.7.3. Рассуждая, как в последнем доказательстве, можно получить, что в условиях леммы 2.7.5 существует $C > 0$, такое, что при всех $x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $i = 1,2,\ldots,q$

$$\|D^{\gamma_i}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \leqslant C\|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\gamma^*}.$$

Лемма 2.7.6. *Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1]$, $x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $\gamma_q < \alpha - 1$. Тогда существует такое $C > 0$, что при каждом $i = 1,2,\ldots,q$ для всех $s,t \in [t_0,t_1]$ $\|D^{\gamma_i}x(s) - D^{\gamma_i}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}|s-t|^{\gamma^*}$.*

Доказательство. При $s,t \in [t_0,t_1]$, $s < t$, $\gamma_i - n_i < \alpha - m$, в силу (2.7.25) имеем

$$D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}x(s) = \int\limits_s^t \frac{(t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i}J^{m-\alpha}x(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^s \frac{(t-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1} - (s-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} D^{n_i}J^{m-\alpha}x(\tau)d\tau,$$

поэтому

$$\|D^{\gamma_i}x(t) - D^{\gamma_i}x(s)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \frac{\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}\Big((t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m} +$$

$$+ \left|\int\limits_{t_0}^s \int\limits_s^t \frac{(u-\tau)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-2}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m-1)} du d\tau\right|\Big) =$$

$$= \frac{\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}\Big((t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m} +$$

$$+ \left|\int\limits_s^t \frac{(u-t_0)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1} - (u-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)} du\right|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}\left((t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}+2\int\limits_s^t \frac{(u-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m-1}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m)}du\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}\left(1+\frac{2}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+1)}\right)(t-s)^{n_i-\gamma_i+\alpha-m}=$$

$$=C_i\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{\delta_i},\quad \delta_i=n_i-\gamma_i+\alpha-m\in(0,1).$$

Аналогично при $\gamma_i-n_i>\alpha-m$ получаем

$$\|D^{\gamma_i}x(t)-D^{\gamma_i}x(s)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant C_i\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}(t-s)^{\delta_i}$$

с $\delta_i=n_i-\gamma_i+\alpha-m+1\in(0,1)$,

$$C_i=\frac{1}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+2)}\left(1+\frac{2}{\Gamma(n_i-\gamma_i+\alpha-m+2)}\right)>0.$$

Выбирая максимальное из C_i и минимальное из δ_i, $i=1,2,\dots,q$, завершаем доказательство. $\square$

2.8 Квазилинейное уравнение общего вида

Лемма 2.8.1. *Пусть* $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\leqslant n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, $A_j,B_l,C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $l=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,r$,

$$(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0),$$

$z_k\in\mathcal{D}$, $k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1$, *$Z$ открыто в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $F\in C(Z;\mathcal{Z})$ *локально липшицево,* $(t_0,0,0,\dots,0,z_{\mu_0^*},z_{\mu_0^*+1},\dots,z_{m-1},0,0,\dots,0)\in Z$, $\gamma\in(0,1]$. *Тогда* $z\in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ *является решением задачи* (2.7.20), (2.7.21) *на* $(t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1>t_0$, *если и только если при всех* $t\in[t_0,t_1]$

$$z(t)=\sum_{k=\mu_0^*}^{m-1}Z_k(t-t_0)z_k+\int\limits_{t_0}^t Z_{m-1}(t-s)F^z(s)ds,\qquad(2.8.26)$$

где $F^z(s)=F(s,D^{\alpha-m-\varrho}z(s),\dots,D^{\alpha-1}z(s),D^{\gamma_1}z(s),\dots,D^{\gamma_q}z(s))$.

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, то для любых $s, t \in [t_0, t_1]$ в силу лемм 2.7.3 и 2.7.6

$$\|F^z(s) - F^z(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant l \sum_{k=-\varrho}^{m-1} \|D^{\alpha-m+k} z(s) - D^{\alpha-m+k} z(t)\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ l \sum_{i=1}^{q} \|D^{\gamma_i} z(s) - D^{\gamma_i} z(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C \|z\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})} |s - t|^{\widetilde{\gamma}}$$

при некотором $C > 0$, не зависящем от s, t. Здесь $\widetilde{\gamma} := \min\{\gamma, \gamma^*\}$. Следовательно, F^z — гельдерова по t функция. По теореме 2.5.1 получим, что z удовлетворяет равенству (2.8.26) на $[t_0, t_1]$, если и только если она является решением задачи (2.7.20), (2.7.21) на $(t_0, t_1]$. □

Теорема 2.8.1. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_r) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in \mathcal{D}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^*+1, \ldots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in Z$, *отображение* $F \in C(Z; \mathcal{Z})$ *локально липшицево. Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (2.7.20), (2.7.21) *имеет единственное решение на* $(t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмем $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, для которых в окрестности

$$V := \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : t \in [t_0, t_1],$$
$$\|x_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, \varrho + \mu_0^*, \varrho + m + 1, \varrho + m + 2, \ldots, \varrho + m + q,$$
$$\|x_l - z_{l-\varrho-1}\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ l = \varrho + \mu_0^* + 1, \varrho + \mu_0^* + 2, \ldots, \varrho + m\}$$

точки $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0)$ выполняется неравенство (1.7.9) при некотором $l > 0$. Для некоторого $\gamma \leqslant \min\{1, \alpha - \alpha_n, \gamma^*\} \in (0, 1]$ рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_{t_1} := \{x \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : \|D^{\alpha-m+k} x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ k = 0, 1, \ldots, \mu_0^* - 1,$$
$$\|D^{\alpha-m+k} x(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,\ k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \ldots, m-1,\ t \in [t_0, t_1]\},$$

которое в силу леммы 2.7.1 и нестрогости неравенств в его определении является полным метрическим пространством с метрикой, определенной нормой разности в $C_{\alpha,\gamma}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Заметим, что для всех $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathfrak{M}_{t_1}$

$$(t, D^{\alpha-m-\varrho}x(t), D^{\alpha-m-\varrho+1}x(t), \ldots, D^{\alpha-1}x(t), D^{\gamma_1}x(t), \ldots, D^{\gamma_q}x(t)) \in V,$$

если $t_1 - t_0$ достаточно мало, в силу замечаний 2.7.1 и 2.7.3. Действительно, при $k = -\varrho, -\varrho+1, \ldots, -1$ $\|D^{\alpha-m-k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C(\varepsilon)(t-t_0)^k$, для $k = 0, 1, \ldots, \mu_0^* - 1$

$$\|D^{\alpha-m-k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} = \|D^{\alpha-m-k}x(t) - D^{\alpha-m-k}x(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C(\varepsilon)(t-t_0),$$

при $k = \mu_0^*, \mu_0^*+1, \ldots, m-1$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} = \|D^{\alpha-m-k}x(t) - D^{\alpha-m-k}x(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C(\varepsilon)(t-t_0)^{\gamma},$$

где $C(\varepsilon) = C_1(m\varepsilon + \|z_{\mu_0^*}\|_{\mathcal{Z}} + \|z_{\mu_0^*+1}\|_{\mathcal{Z}} + \cdots + \|z_{m-1}\|_{\mathcal{Z}})$ — константа, ограничивающая норму $\|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$.

Определим на $\mathfrak{M}_{t_1}$ оператор

$$G(x)(t) = \sum_{k=\mu_0^*}^{m-1} Z_k(t-t_0)z_k + \int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds.$$

Так как для $x \in \mathfrak{M}_{t_1}$ F^x гельдерова по t порядка $\min\{\gamma, \gamma^*\} = \gamma$ (см. доказательство леммы 2.8.1), то в силу теоремы 2.5.1 и леммы 2.7.2 $G(x) \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$.

В доказательстве теоремы 2.5.2 было показано, что $\beta < \alpha$

$$D^{\beta} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} V_{\beta}(t-s)F^x(s)ds,$$

и согласно (2.5.11) для $p = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\left\| D^{\alpha-m+p} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_1\|F^x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{m-p}.$$

Обозначим $F(t_0,0,0,\dots,0,z_{\mu_0^*},z_{\mu_0^*+1},\dots,z_{m-1},0,0,\dots,0):=F_0$, тогда

$$\left\|D^{\alpha-m+p}\int\limits_{t_0}^{t}Z_{m-1}(t-s)F^x(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(\|F^x-F_0\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}+\|F_0\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})})(t-t_0)^{m-p}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 l\left(\sum_{k=\mu_0^*}^{m-1}\|D^{\alpha-m+k}x-z_k\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}+\sum_{k=-\varrho}^{\mu_0^*-1}\|D^{\alpha-m+k}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{q}\|D^{\gamma_i}x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}\right)(t-t_0)^{m-p}+C_1\|F_0\|_{\mathcal{Z}}(t-t_0)^{m-p}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(l\varepsilon(m+\varrho+q)+\|F_0\|_{\mathcal{Z}})(t-t_0)^{m-p}\to 0$$

при $t\to t_0+$. Поэтому $G(x)\in\mathfrak{M}_{t_1}$ при всех $x\in\mathfrak{M}_{t_1}$, если $t_1>t_0$ достаточно близко к t_0.

Для $x,y\in\mathfrak{M}_{t_1}$, $p=0,1,\dots,m-1$ в силу замечания 2.7.1 и леммы 2.7.5

$$\|(t-t_0)^{m-\alpha}(G(x)(t)-G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}}=$$

$$=\left\|(t-t_0)^{m-\alpha}\int\limits_{t_0}^{t}Z_{m-1}(t-s)(F^x(s)-F^y(s))ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 l(t-t_0)^m\left(\sum_{k=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\alpha-m+k}x(t)-D^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{q}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\gamma_i}x(t)-D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right)\leqslant C_2(t_1-t_0)^m\|x-y\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})},$$

$$\|D^{\alpha-m+p}(G(x)(t)-G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}}=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}V_{\alpha-m+p}(t-s)(F^x(s)-F^y(s))ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 l(t-t_0)^{m-p}\left(\sum_{k=-\varrho}^{m-1}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\alpha-m+k}x(t)-D^{\alpha-m+k}y(t)\|_{\mathcal{Z}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{q}\max_{t\in[t_0,t_1]}\|D^{\gamma_i}x(t)-D^{\gamma_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}}\right)\leqslant C_2(t_1-t_0)^{m-p}\|x-y\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})},$$

при каком-либо $\delta \in (0, t_1 - t_0)$, $s, t \in [t_0 + \delta, t_1]$, $s < t$

$$\|D^{\alpha-1}(G(x)(t) - G(y)(t) - G(x)(s) + G(y)(s))\|_{\mathcal{Z}} =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} V_{\alpha-1}(t-\tau)(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{s} V_{\alpha-1}(s-\tau)(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{s}^{t} V_{\alpha-1}(t-\tau)(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ \left\| \int_{t_0}^{s} (V_{\alpha-1}(t-\tau) - V_{\alpha-1}(s-\tau))(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2(t-s)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} + \left\| \int_{t_0}^{s} \int_{s}^{t} V_\alpha(\varsigma - \tau)(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\varsigma d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2(t-s)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} + C_2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} \int_{t_0}^{s} \int_{s}^{t} \frac{d\varsigma d\tau}{\varsigma - \tau} =$$

$$= C_2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} \left((t-s) + \int_{s}^{t} (\ln(\varsigma - t_0) - \ln(\varsigma - s))d\varsigma \right) =$$

$$= C_2\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}((t-s) + (t-s)\max\{|\ln(t_1-t_0)|, |\ln\delta|\} - (t-s)(\ln(t-s)-1)) \leqslant$$

$$\leqslant C_3(\delta)(t-s)^\gamma \|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Поэтому $D^{\alpha-1}(G(x)(t) - G(y)(t))$ локально гельдерово на $(t_0, t_1]$. Рассмотрим эту функцию в точке t_0, принимая во внимание, что $D^{\alpha-1}G(x)(t_0) = D^{\alpha-1}G(y)(t_0) = z_{m-1}$: при $t \in (t_0, t_1]$

$$\|D^{\alpha-1}(G(x)(t) - G(y)(t) - G(x)(t_0) + G(y)(t_0))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} V_{\alpha-1}(t-\tau)(F^x(\tau) - F^y(\tau))d\tau \right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_2(t-t_0)\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}.$$

Используя принцип конечного подпокрытия получим существование такого $C > 0$, что при всех $s, t \in [t_0, t_1]$ выполняется $\|D^{\alpha-1}(G(x)(t) - G(y)(t) - G(x)(s) + G(y)(s))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C|t-s|^\gamma \|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}$. Таким образом,

$$\|G(x) - G(y)\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} \leqslant q\|x-y\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})},$$

где $q \in (0,1)$ при достаточно малом $t_1 - t_0$, оператор G является сжатием на полном метрическом пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$, и существует его единственная неподвижная точка $z \in \mathfrak{M}_{t_1}$. По лемме 2.8.1 z — решение задачи (2.7.20), (2.7.21) на $(t_0, t_1]$.

Если существует два решения (2.7.20), (2.7.21), то по лемме 2.8.1 каждое из них является неподвижной точкой оператора G в пространстве $\mathfrak{M}_{t_1}$. Но неподвижная точка единственна, поэтому решения совпадают. $\square$

Можно доказать аналогичный результат, используя непрерывность F в норме $\mathcal{D}$.

Лемма 2.8.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$,

$$(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0),$$

$z_k \in \mathcal{D}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots, m-1$, Z *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $F \in C(Z; \mathcal{D})$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, $\gamma \in (0, 1]$. *Тогда функция* $z \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ *является решением задачи* (2.7.20), (2.7.21) *на* $(t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 > t_0$, *если и только если при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *справедливо равенство* (2.8.26).

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, то в силу лемм 2.7.3, 2.7.6 и условий на F отображение $t \to F^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{D}$ и удовлетворяет условиям теоремы 2.5.1. По этой теоерме равенство (2.8.26) выполняется, если и только если z — решение задачи (2.7.20), (2.7.21) на $(t_0, t_1]$. $\square$

Теорема 2.8.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leqslant n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in$

$\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in \mathcal{D}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \ldots, m-1$, Z *открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \ldots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \ldots, z_{m-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in Z$, *отображение* $F \in C(Z; \mathcal{D})$ *локально липшицево. Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (2.7.20), (2.7.21) *имеет единственное решение на* $(t_0, t_1]$.

Доказательство. По лемме 2.8.2 достаточно доказать существование единственного решения уравнения (2.8.26) в $z \in C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, где константа $\gamma \in (0, \min\{1, \alpha - \alpha_n, \gamma^*\}]$, при некотором $t_1 > t_0$. Остальная часть доказательства не отличается от доказательства теоремы 2.8.1. $\square$

2.9 Начально-краевые задачи

В этом параграфе полученные результаты при исследовании начальных задач для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах будут использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

2.9.1 Уравнение с многочленами от эллиптического оператора

Как в разделе 1.8, возьмем многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} a_p \lambda^p$, $P_2^j(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} b_p^j \lambda^p$, $P_3^l(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} c_p^l \lambda^p$, $P_4^s(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} d_p^s \lambda^p$, $a_p, b_p^j, c_p^l, d_p^s \in \mathbb{C}$, $p = 0, 1, \ldots, \nu$, $a_\nu = 0$, по крайней мере один из коэффициентов $b_\nu^j \neq 0$, $c_\nu^l \neq 0$, $d_\nu^s \neq 0$, $j \in J \subset \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, r$, не равен нулю. При этом $P_2^j \equiv 0$ для $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \setminus J$.

Зададим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ регулярно эллиптический операторный пучок $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_\rho$ [49], где

$$(\mathcal{A}w)(\xi) = \sum_{|q| \leqslant 2\rho} a_q(\xi) \frac{\partial^{|q|} w(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(\mathcal{B}_\zeta w)(\xi) = \sum_{|q| \leqslant \rho_\zeta} b_{\zeta q}(\xi) \frac{\partial^{|q|} w(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{\zeta q} \in C^\infty(\partial\Omega),\ \zeta = 1, 2, \ldots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$. Пусть оператор $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ действует в соответствии с равенством $\mathcal{A}_1 w := \mathcal{A} w$ на области определения

$$D_{\mathcal{A}_1} = H^{2\rho}_{\{\mathcal{B}_\zeta\}}(\Omega) := \{w \in H^{2\rho}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta w(\xi) = 0,\, \zeta = 1, 2, \dots, \rho,\, \xi \in \partial\Omega\}.$$

В предположении, что $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор, имеем действительный и дискретный спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ оператора $\mathcal{A}_1$ [49]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора $\mathcal{A}_1$, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Обозначим $\nu_1 = \max\{p \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\} : a_p \neq 0\}$, $\nu_2^j = \max\{p \in \{0, 1, \dots, \nu\} : b_p^j \neq 0\}$, $j \in J \subset \{1, 2, \dots, m-1\}$, $\nu_3^l = \max\{p \in \{0, 1, \dots, \nu\} : c_p^l \neq 0\}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\nu_4^s = \max\{p \in \{0, 1, \dots, \nu\} : d_p^s \neq 0\}$, $s = 1, 2, \dots, r$. В предположении, что $P_1(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, зададим пространство $\mathcal{X} = \{w \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0,\, k = 0, 1, \dots, \nu_1 - 1,\, \zeta = 1, 2, \dots, \rho,\, \xi \in \partial\Omega\}$, $A_j = P_1(\mathcal{A}_1)^{-1} P_2^j(\mathcal{A}_1)$, $D_{A_j} = \{w \in H^{2\rho\nu_2^j}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, k = 0, 1, \dots, \nu_2^j - 1,\, \zeta = 1, 2, \dots, \rho,\, \xi \in \partial\Omega\}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $B_l = P_1(\mathcal{A}_1)^{-1} P_3^l(\mathcal{A}_1)$, $D_{B_l} = \{w \in H^{2\rho\nu_3^l}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0,\, k = 0, 1, \dots, \nu_3^l - 1,\, \zeta = 1, 2, \dots, \rho,\, \xi \in \partial\Omega\}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $C_s = P_1(\mathcal{A}_1)^{-1} P_4^s(\mathcal{A}_1)$, $D_{C_s} = \{w \in H^{2\rho\nu_4^s}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0,\, k = 0, \dots, \nu_4^s - 1,\, \zeta = 1, 2, \dots, \rho,\, \xi \in \partial\Omega\}$, $s = 1, 2, \dots, r$. Возьмем $0 < \alpha < 2$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$.

Теорема 2.9.1. *Пусть в условиях данного параграфа выполняются следующие условия:*

(i) *в случае нечетного* $\nu - \nu_1$ $b_\nu^j / a_{\nu_1} \geqslant 0$, $j \in J$, $c_\nu^l / a_{\nu_1} \geqslant 0$, $l = 1, 2, \dots, n$, $d_\nu^s / a_{\nu_1} \geqslant 0$, $s = 1, 2, \dots, r$;

(ii) *в случае четного* $\nu_0 - \nu_1$ $b_\nu^j / a_{\nu_1} \leqslant 0$, $j \in J$, $c_\nu^l / a_{\nu_1} \leqslant 0$, $l = 1, 2, \dots, n$, $d_\nu^s / a_{\nu_1} \leqslant 0$, $s = 1, 2, \dots, r$;

(iii) *при* $d_\nu^s \neq 0$ $\beta_s \leqslant \alpha$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Тогда $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_r) \in \mathcal{A}_\alpha^{n,r}(\theta_0, a_0)$.

Доказательство. Нетрудно увидеть, что $\mathcal{D} = \{v \in H^{2\rho\nu}(\Omega) : \mathcal{B}_\gamma \mathcal{A}^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1,\ \gamma = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$ — плотное множество в $\mathcal{X}$. Для $v \in \mathcal{D}$

$$\left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s\right) v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^\alpha Q_k(\lambda, \lambda_k) \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где

$$Q_k(\lambda, \lambda_k) := 1 - \sum_{j \in J} \lambda^{j-m} \frac{P_2^j(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)} - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} \frac{P_3^l(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)} - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} \frac{P_4^s(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)}.$$

Очевидно, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} Q_k(\lambda, \lambda_k) = 1$. Выберем для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ настолько большое $R > 0$, что $Q_k(\lambda, \lambda_k) \geqslant 1/2$ при $k = 1, 2, \ldots, N$, $|\lambda| > R$.

Так как $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = -\infty$, то при $k \to \infty$

$$\frac{P_2^j(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)} \sim a_{\nu_1}^{-1} b^j_{\nu_2^j} \lambda_k^{\nu_2^j - \nu_1},\ j \in J, \quad \frac{P_3^l(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)} \sim a_{\nu_1}^{-1} c^l_{\nu_3^l} \lambda_k^{\nu_3^l - \nu_1},\ l = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\frac{P_4^s(\lambda_k)}{P_1(\lambda_k)} \sim a_{\nu_1}^{-1} d^s_{\nu_4^s} \lambda_k^{\nu_4^s - \nu_1},\ s = 1, 2, \ldots, r,$$

поэтому для фиксированного λ при $k \to \infty$

$$Q_k(\lambda, \lambda_k) \sim 1 - \sum_{j \in J} \lambda^{j-m} a_{\nu_1}^{-1} b^j_\nu \lambda_k^{\nu - \nu_1} - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} c^l_\nu \lambda_k^{\nu - \nu_1} -$$
$$- \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} d^s_\nu \lambda_k^{\nu - \nu_1} = |\lambda_k|^{\nu_0 - \nu_1} \Bigg[|\lambda_k|^{\nu_1 - \nu_0} -$$
$$- \mathrm{sign} \lambda_k^{\nu_0 - \nu_1} \left(\sum_{j \in J} \lambda^{j-m} a_{\nu_1}^{-1} b^j_\nu + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} c^l_\nu + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} d^s_\nu \right) \Bigg].$$

При достаточно больших k $\lambda_k < 0$ в силу свойств спектра оператора $\mathcal{A}_1$, поэтому в силу условий (i), (ii) теоремы 2.9.1 все коэффициенты при степенях λ в последнем выражении отрицательные. Поэтому при $\lambda > 0$ и достаточно больших k $Q(\lambda, \lambda_k) > 0$. Возьмем достаточно большое $a_0 > R$ и $\theta \in (\pi/2, \pi/\alpha)$, чтобы шар $B_R := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant R\}$ лежал вне сектора S_{θ_0, a_0}. Тогда при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} \setminus \mathbb{R}$ с учетом условия (iii) теоремы 2.9.1

$$\left| \arg \left[\mathrm{sign} \lambda_k^{\nu_0 - \nu_1} \left(\sum_{j \in J} \lambda^{j-m} a_{\nu_1}^{-1} b^j_\nu + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} c^l_\nu + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} d^s_\nu \right) \right] \right| > 0,$$

поэтому $Q_k(\lambda, \lambda_k) \neq 0$. Если $\partial S_{\theta_0,a_0}$ содержит нули (по λ) функций $Q_k(\lambda, \lambda_k)$ при каких либо $k \in \mathbb{N}$, начиная с $N+1$, сделаем сдвиг a_0 на 1 вправо и вернемся к прежнему обозначению a_0. Теперь в силу непрерывности функций $Q_k(\lambda, \lambda_k)$ по λ можно утверждать, что при $\lambda \in S_{a_0,\theta_0}$ $|Q_k(\lambda, \lambda_k)| \geqslant c > 0$.

Таким образом, для любого $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\left\| \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right) v \right\|_{\mathcal{X}} \geqslant c|\lambda|^\alpha \|v\|_{\mathcal{X}},$$

следовательно, существует обратный оператор

$$R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+j} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} C_s \right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),$$

при этом для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{\alpha-1}|\lambda - a|}.$$

Для $v \in D$, $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем

$$\left\| R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j \right) v \right\|_{\mathcal{X}}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(1 + \sum\limits_{j=p+1}^{m-1} |\lambda|^{2(j-m)} \frac{|P_2^j(\lambda_k)|^2}{|P_1^j(\lambda_k)|^2}\right) |\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|\lambda|^{2\alpha} |Q(\lambda, \lambda_k)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1 |\lambda_k|^{2(\nu-\nu_1)} \left(|\lambda_k|^{-2(\nu-\nu_1)} + \sum\limits_{j\in J} |a_{\nu_1}|^{-2} |b_\nu^j|^2 |\lambda|^{2(j-m)} \right) |\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|\lambda|^{2\alpha} |\lambda_k|^{2(\nu-\nu_1)} \left| \lambda_k^{-(\nu-\nu_1)} - \sum\limits_{j\in J} \lambda^{-m+j} a_{\nu_1}^{-1} b_{\nu_2^j}^j - \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} c_\nu^l - \sum\limits_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} d_\nu^s \right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_2 |\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|\lambda|^{2(\alpha-1)} |\lambda - a|^2} \leqslant \frac{C_2 \|v\|_{\mathcal{X}}^2}{|\lambda|^{2(\alpha-1)} |\lambda - a|^2}.$$

При этом учтено, что $\lambda_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому в силу точечности спектра $\{\lambda_k\}$ существует $\min\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| > 0$. $\square$

Определим по набору чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дефект m^* и рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k} v(\xi, 0) = v_k(\xi), \;\; k = m^*, m-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{2.9.1}$$

$$\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k v(\xi,t)=0,\quad k=0,1,\dots,\nu-1,\quad l=1,2,\dots,\rho,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2.9.2}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha}P_1(\mathcal{A})v(\xi,t)=\sum_{j=1}^{m-1}P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}v(\xi,t)+\sum_{l=1}^{n}P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}v(\xi,t)+\\ +\sum_{s=1}^{r}P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}v(\xi,t)+h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T). \end{gathered} \tag{2.9.3}$$

При $h\in[C((0,T);H^{2\rho\nu}(\Omega))\cap L_1(0,T;H^{2\rho\nu}(\Omega))]\cup C^{\gamma}([0,T];H^{2\rho\nu_1}(\Omega))$, $\gamma\in(0,1]$, $v_0,v_1\in H^{2\rho\nu}(\Omega)$ для $m^*=0$ ($v_1\in H^{2\rho\nu}(\Omega)$ для $m^*=1$) в силу теорем 2.5.1 и 2.9.1 существует единственное решение задачи (2.9.1)–(2.9.3).

Замечание 2.9.1. Имеем $m^*=0$, $m=1$ при $\alpha\in(0,1]$, в таком случае $m^*=m-1$ и (2.9.1) содержит одно начальное условие. Если же $\alpha\in(1,2)$, то $m=2$ и (2.9.1) содержит одно условие при $m^*=1$ и два условия при $m^*=0$.

Пример. Возьмем $\alpha=7/4$, $m=2$, $n=1$, $r=1$, $\alpha_1=4/5$, $\beta_1=5$, $P_1(\lambda)=\lambda$, $\nu_1=1$, $P_2^1(\lambda)\equiv 0$, $P_3^1(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$, $P_4^1(\lambda)=d_0+d_1\lambda$, $\nu=2$, $d=1$, $\Omega=(0,\pi)$, $\rho=1$, $\mathcal{A}u=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$, $\mathcal{B}_1=I$. Тогда $\underline{m}=0$, $\overline{m}=1$, $m^*=1$, задача (1.8.1)–(1.8.3) имеет вид: при $(\xi,t)\in(0,\pi)\times\mathbb{R}_+$

$$D_t^{7/4}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}(\xi,t)=\left(c_0+c_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+c_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)D_t^{4/5}v(\xi,t)+\left(d_0+d_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)J_t^5 v(\xi,t),$$

$$v(0,t)=v(\pi,t)=\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t)=\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$D^{3/4}v(\xi,0)=v_1(\xi),\quad \xi\in(0,\pi).$$

Она разрешима при $c_2>0$, $c_0,c_1,d_0,d_1\in\mathbb{C}$ по теореме 2.9.1.

2.9.2 Квазилинейное уравнение с многочленами

Возьмем $h:\Omega\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $1<\alpha<2$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant 0$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha$. Определим по набору этих чисел дефект $\mu_0^*\in\{0,1,2\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(\xi,0)=v_k(\xi),\ \xi\in\Omega,\ k=\mu_0^*,m-1, \tag{2.9.4}$$

$$\mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k v(\xi,t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,\nu-1, \quad \zeta = 1,2,\dots,\rho, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.9.5}$$

$$D_t^\alpha P_1(\mathcal{A})v(\xi,t) = \sum_{j\in J} P_2^j(\mathcal{A}) D_t^{\alpha-m+j} v(\xi,t) + \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A}) D_t^{\alpha_l} v(\xi,t) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A}) J_t^{\beta_s} v(\xi,t) + h(\xi, D_t^{\gamma_1} v(\xi,t),\dots, D_t^{\gamma_q} v(\xi,t)), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{2.9.6}$$

Замечание 2.9.2. Рассуждая, как в замечании 2.9.1, заметим, что в (2.9.4) содержится одно начальное условие или они вообще отсутствуют, если $\alpha \in (0,1]$. В случае же $\alpha \in (1,2)$ условий в (2.9.4) два, одно или пустое множество. В частности, при $\gamma_q \in (\alpha-1,\alpha)$ имеем $\mu_0 = 2$, в этом случае начальные условия (2.9.4) в задаче отсутствуют.

Как в разделе 1.8.3, но с помощью теорем 2.8.2 и 2.9.1 для произвольных начальных данных из D при $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $d < 4\rho\nu$ существует единственное решение задачи (2.9.4)–(2.9.6).

2.9.3 Системы уравнений динамики вязкоупругих сред

Как в разделе 1.8.4, перейдем от начально-краевой задачи

$$D_t^{\alpha-m+k} v(\xi,0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^*, m-1, \tag{2.9.7}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{2.9.8}$$

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1} \Delta v(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2} \Delta v(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3} \Delta v(\xi,t) - \\ - r(\xi,t) + g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{2.9.9}$$

$$\nabla \cdot v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{2.9.10}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ при $\alpha, \chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, к задаче (2.9.7), (2.9.8) для уравнения

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1} B v(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2} B v(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3} B v(\xi,t) + \\ + \Sigma g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{2.9.11}$$

Здесь $B := \Sigma\Delta \in \mathcal{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$, $D_B := \mathbb{H}_\sigma^2$.

При $\alpha > \delta_1 > \delta_2 > \delta_3$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \{1,2\}$, $\alpha - \min\{\delta_2,\delta_3\} < 2$, $\chi,\nu,\kappa > 0$ возьмем с учетом уравнения несжимаемости (2.9.10) $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma$, $F_1 = \kappa B$, $F_2 = \nu B$, $F_3 = \chi B$ — линейные замкнутые операторы с областью определения $D_{F_j} = \mathcal{D} = \mathbb{H}_\sigma^2$, $j = 1,2,3$, плотной в $\mathbb{H}_\sigma$.

Пусть для определенности $\alpha \in (1,2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 < 0$, $\alpha - \delta_1 \notin \mathbb{N}$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.9.1, нетрудно показать, что $(0, A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}_\alpha^{1,2}$ и по теореме 2.5.1 для всех $v_0, v_1 \in \mathbb{H}_\sigma^2$ при $m^* = 0$ (для всех $v_1 \in \mathbb{H}_\sigma^2$ при $m^* = 1$) при условии

$$\Sigma g \in [C((0,T);\mathbb{H}_\sigma^2) \cap L_1(0,T;\mathbb{H}_\sigma^2)] \cup C^\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma), \quad \gamma \in (0,1],$$

существует единственное решение задачи (2.9.7), (2.9.8), (2.9.11). Поэтому задача (2.9.7)–(2.9.10) также имеет единственное решение.

Рассмотрим также начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k} v(\xi,0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^*, m-1, \tag{2.9.12}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} \tau(\xi,0) = \tau_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = m^*, m-1, \tag{2.9.13}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad \tau(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{2.9.14}$$

для линеаризованной системы уравнений термоконвекции в той же среде

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi D_t^\alpha \Delta v(\xi,t) + \nu \Delta v(\xi,t) + \kappa D_t^\delta \Delta v(\xi,t) - \\ -r(\xi,t) + g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{2.9.15}$$

$$\nabla \cdot v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{2.9.16}$$

$$D_t^\alpha \tau(\xi,t) = \varrho \triangle \tau(\xi,t) + \varsigma v_n(\xi,t) + h(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{2.9.17}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \{1,2\}$, $\delta < 0$, $\chi,\nu,\kappa,\varrho,\varsigma \in \mathbb{R}$, $\triangle$ — оператор Лапласа в пространстве $L_2(\Omega)$, определенный на плотном множестве $H_0^2(\Omega) := \{w \in H^2(\Omega) : w(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$, τ — функция температуры. Систему (2.9.15)–(2.9.17) также редуцируем к разрешенной относительно старшей производной системе

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi D_t^{\delta_1} B v(\xi,t) + \nu D_t^{\delta_2} B v(\xi,t) + \kappa D_t^{\delta_3} B v(\xi,t) + \\ +\Sigma g(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \end{gathered} \tag{2.9.18}$$

$$D_t^\alpha \tau(\xi,t) = \varrho \triangle \tau(\xi,t) + \varsigma v_n(\xi,t) + h(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{2.9.19}$$

При $\alpha > \delta_1 > \delta_2 = 0 > \delta_3$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \{1,2\}$, $\alpha - \min\{\delta_2, \delta_3\} < 2$, $\chi, \nu, \kappa > 0$ положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma \times L_2(\Omega), \tag{2.9.20}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \chi B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} \nu B & \mathbb{O} \\ \varsigma P_n & \varrho\triangle \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \kappa B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{2.9.21}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} \Sigma g(\cdot,t) \\ h(\cdot,t) \end{pmatrix}, \ \ t \in [0,T].$$

Здесь P_n — проектор вектора на последнюю компоненту $(v_1, v_2, \dots, v_n) \to v_n$. Тогда $B_1, C_1, C_2 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$, $D_{B_1} = D_{C_2} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times L_2(\Omega)$, $D_{C_1} = \mathcal{D} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times H_0^2(\Omega)$. Имеем $x(t) \in \mathcal{X}$, где $x(t) = (v(\cdot,t), \tau(\cdot,t))$.

Лемма 2.9.1. *Пусть $\alpha \in (0,2)$, $\alpha > \delta_1 > \delta_2 = 0 > \delta_3$, $\alpha - \delta_1 \neq 1$, $\chi, \varrho > 0$, $\nu, \kappa, \varsigma \in \mathbb{R}$, пространство $\mathcal{X}$ имеет вид* (2.9.20)*, операторы B_1, C_1, C_2 определены в* (2.9.21)*. Тогда $(B_1, C_1, C_2) \in \mathcal{A}_\alpha^{1,2}(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0,1]$ и $(0, B_1, C_1, C_2) \in \mathcal{A}_\alpha^{1,2}(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (1,2)$ при некоторых $a_0 \geqslant 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.*

Доказательство. Сначала заметим, что $\mathcal{D} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times H_0^2(\Omega)$ плотно в $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma \times L_2(\Omega)$.

Возьмем $\alpha \in [1,2)$, $\delta = \frac{\pi(2-\alpha)}{4\alpha}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \delta = \frac{\pi(2+\alpha)}{4\alpha}$, $a_0 \geqslant 0$. Тогда $(\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$ при всех $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$, поскольку $|\arg \mu^\alpha| \in (\pi/2, \pi)$, а спектр оператора $\varrho\triangle$ отрицателен. При этом для любого $w \in L_2(\Omega)$

$$\|(\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1} w\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(w, \psi_k)|^2}{|\mu^\alpha - \varrho\mu_k|^2} \leqslant \frac{\|w\|_{L_2(\Omega)}^2}{\cos^2(\alpha\pi/4)|\mu|^{2\alpha}}, \tag{2.9.22}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\{\mu_k\}$ — собственные значения оператора $\triangle$, $\{\psi_k\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций.

При достаточно большом $a_0 > 0$ и любом $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$ мало отличается от нуля $\arg(\chi + \nu\mu^{\delta_2 - \delta_1} + \kappa\mu^{\delta_3 - \delta_1})$, поэтому при любом $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем

$$|\mu^\alpha - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})\lambda_k| =$$

$$= |\mu|^\alpha |1 - \mu^{\delta_1-\alpha}(\chi + \nu\mu^{\delta_2-\delta_1} + \kappa\mu^{\delta_3-\delta_1})\lambda_k| \geqslant |\mu|^\alpha \cos(\alpha\pi/4)$$

и для любых $u \in \mathbb{H}_\sigma$

$$\|(\mu^\alpha I - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})B)^{-1}u\|^2_{\mathbb{H}_\sigma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle u, \varphi_k\rangle|^2}{|\mu^\alpha - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})\lambda_k|^2} \leqslant \frac{\|u\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}}{\cos^2(\alpha\pi/4)|\mu|^{2\alpha}}, \tag{2.9.23}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$, $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора B, которые, как известно, отрицательны [24], $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций.

При $\mu \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\mu^\alpha I - \mu^{\delta_1}B_1 - \mu^{\delta_2}C_1 - \mu^{\delta_3}C_2 = \begin{pmatrix} \mu^\alpha I - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})B & \mathbb{O} \\ -\varsigma P_n & \mu^\alpha I - \varrho\triangle \end{pmatrix},$$

$$(\mu^\alpha I - \mu^{\delta_1}B_1 - \mu^{\delta_2}C_1 - \mu^{\delta_3}C_2)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})B)^{-1} & \mathbb{O} \\ \varsigma(\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1}P_n(\mu^\alpha I - (\chi\mu^{\delta_1} + \nu\mu^{\delta_2} + \kappa\mu^{\delta_3})B)^{-1} & (\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из неравенств (2.9.22), (2.9.23) получим требуемое.

При $\alpha \in (0, 1)$ доказательство аналогично. При этом θ_0 можно выбрать из $(\pi/2, \pi)$ произвольным, а в оценках (2.9.22), (2.9.23) $\cos(\alpha\pi/4)$ надо заменить на $\sin\theta_0$. $\square$

Замечание 2.9.3. Из доказательства видно, что при $\alpha - \delta_1 = 1$ оператор B_1 придется переобозначить через A_1, чтобы соответствовать обозначениям данной работы, и тогда можно будет утверждать в условиях предыдущей леммы, что $(A_1, 0, C_1, C_2) \in \mathcal{A}^{0,2}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 2.9.4. Аналогично нетрудно рассмотреть случаи других знаков у порядков δ_i, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 2.9.2. *Пусть* $\alpha > \delta_1 > \delta_2 = 0 > \delta_3$, $\alpha - \delta_1 \neq 1$, $\chi, \varrho > 0$, $\nu, \kappa, \varsigma \in \mathbb{R}$; $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\tau_0 \in H^2(\Omega)$ *при* $\alpha \in (0, 1]$; $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\tau_0, \tau_1 \in H^2(\Omega)$ *при* $\alpha \in (1, 2)$; $h \in C([0,T]; \mathbb{L}_2)$, $\Sigma h \in [C((0,T); \mathbb{H}^2_\sigma) \cap L_1(0,T; \mathbb{H}^2_\sigma)] \cap C^\gamma([0,T]; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $f \in [C((0,T); H^2(\Omega)) \cap L_1(0,T; H^2(\Omega))] \cap C^\gamma([0,T]; H^2(\Omega))$, $\gamma \in (0, 1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.9.12)–(2.9.17).

Доказательство. Редуцируем начально-краевую задачу (2.9.12)–(2.9.17) к начальной задаче (2.5.8), (2.5.9), используя операторы (2.9.21) в пространстве (2.9.20). В силу леммы 2.9.1 и теоремы 2.5.1 получим требуемое. □

3 Вырожденные эволюционные уравнения

В главе исследуется однозначная разрешимость начальных задач типа Коши для линейного неоднородного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{j_0} M_j D_t^{\alpha-m+j}x(t) + \sum_{l=1}^{n} N_l D_t^{\alpha_l}x(t) + \sum_{s=1}^{r} S_s J_t^{\beta_s}x(t) + g(t),$$

где $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $j_0\in\{0,1,\dots,m-1\}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leqslant m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geqslant 0$.

Операторы $L, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, N_1, N_2, \dots, N_n, S_1, \dots, S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства. При этом предполагается, что оператор L при старшей дробной производной имеет нетривиальное ядро $\ker L\neq\{0\}$, по этой причине такие уравнения называются вырожденными.

Рассмотрены два возможных случая: $\alpha_n<\alpha-m+j_0$ и $\alpha_n>\alpha-m+j_0$. В предположении $(L,0)$-ограниченности оператора M_{j_0} в первом случае и оператора N_n во втором случае исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах. Аналогичным образом рассмотрен также класс линейных обратных задач для вырожденных уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля. Все это дает возможность при получении результатов данной главы существенным образом использовать результаты главы 1.

Результаты данной главы для уравнений в банаховых пространствах применяются для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно старшей производной Римана — Лиувилля по времени. Как и в первой главе, рассматривается класс начально-краевых задач для линейного уравнения с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, но при условии обращения в нуль многочлена при дробной производной на спектре эллиптического оператора.

3.1 Линейное неоднородное уравнение

Пусть заданы операторы

$$L, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, N_1, N_2, \dots, N_n, S_1, S_2, \dots, S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}),$$

$\ker L \neq \{0\}$. Все операторы $N_1, N_2, \dots, N_n, S_1, S_2, \dots, S_r$ нулевыми не являются, при этом некоторые (или все) операторы M_j могут быть нулевыми. Если все $M_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, то положим $j_0 = 0$, иначе существует $j_0 \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, такое, что $M_{j_0} \neq 0$, $M_j = 0$, $j = j_0+1, j_0+2, \dots, m-1$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{j_0} M_j D_t^{\alpha-m+j} x(t) + \sum_{l=1}^{n} N_l D_t^{\alpha_l} x(t) + \sum_{s=1}^{r} S_s J_t^{\beta_s} x(t) + g(t), \quad (3.1.1)$$

которое будем называть вырожденным в силу предположения $\ker L \neq \{0\}$. Здесь $g \in C((0,T); \mathcal{Y}) \cap L_1((0,T); \mathcal{Y})$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\underline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\ \alpha_l - m_l < \alpha - m\}$, $\underline{m} = \lceil \underline{\alpha} \rceil$, $\overline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\ \alpha_l - m_l > \alpha - m\}$, $\overline{m} = \lceil \overline{\alpha} \rceil$, $m^* := \max\{\underline{m} - 1, \overline{m}\}$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$.

Решением уравнения (3.1.1) называется такая функция $x : (0,T] \to \mathcal{X}$, что $J_t^{m-\alpha} Lx \in C^m((0,T); \mathcal{Y})$, $J_t^{m-\alpha} x \in C^{j_0}((0,T); \mathcal{X})$, $J_t^{m_l-\alpha_l} x \in C^{m_l}((0,T); \mathcal{X})$, $J_t^{\beta_s} x \in C((0,T); \mathcal{X})$ и выполняется равенство (3.1.1) при всех $t \in (0,T)$.

Рассмотрим два возможных случая: $\alpha_n < \alpha - m + j_0$ и $\alpha_n > \alpha - m + j_0$.

3.1.1 Случай $\alpha_n < \alpha - m + j_0$

Пусть $M_{j_0} \neq 0$, $M_j = 0$, $j = j_0+1, j_0+2, \dots, m-1$, $\alpha_n < \alpha - m + j_0$, предположим, что оператор M_{j_0} (L, σ)-ограничен, т. е.

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow ((\mu L - M_{j_0})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}))\,.$$

В этом случае определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu L - M_{j_0})^{-1} L d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L(\mu L - M_{j_0})^{-1}\, d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [135, с. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_q, $M_{j,q}$, $N_{l,q}$, $S_{s,q}$ обозначим сужения операторов L, M_j, $j = 1, 2, \dots, j_0$, B_l, $l = 1, 2, \dots, n$, S_s, $s = 1, 2, \dots, r$, на $\mathcal{X}^q$, $q = 0, 1$. Известно (см. [135, с. 90, 91]), что $LP = QL$, $M_{j_0} P = Q M_{j_0}$, $M_{j_0,q} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q)$, $L_q \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q)$, $q = 0, 1$. Кроме того, в рассматриваемой ситуации существуют операторы $M_{j_0,0}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Будем дополнительно предполагать, что $L_0 = 0$, в этом случае (L, σ)-ограниченный оператор M_{j_0} называется $(L, 0)$-ограниченным [135]. При этом в случае выполнения дополнительных условий

$$\begin{gathered} QM_j = M_j P, \ j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad QN_l = N_l P, \ l = 1, 2, \dots, n, \\ QS_s = S_s P, \ s = 1, 2, \dots, r, \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

уравнение (3.1.1) редуцируется к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(t) = \sum_{j=1}^{j_0} L_1^{-1} Q M_j D_t^{\alpha-m+j} v(t) + \sum_{l=1}^{n} L_1^{-1} Q N_l D_t^{\alpha_l} v(t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} L_1^{-1} Q S_s J_t^{\beta_s} v(t) + L_1^{-1} Q g(t), \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha-m+j_0} w(t) = -\sum_{j=1}^{j_0-1} M_{j_0,0}^{-1} Q_0 M_j D_t^{\alpha-m+j} w(t) - \\ - \sum_{l=1}^{n} M_{j_0,0}^{-1} Q_0 N_l D_t^{\alpha_l} w(t) - \sum_{s=1}^{r} M_{j_0,0}^{-1} Q_0 S_s J_t^{\beta_s} w(t) - M_{j_0,0}^{-1} Q_0 g(t), \end{gathered} \tag{3.1.4}$$

где $v(t) := Px(t)$, $w(t) := P_0 x(t)$, $t > 0$. Действительно, например,

$$QM_1 D_t^{\alpha-m+1} x(t) = M_1 P D_t^{\alpha-m+1} x(t) = M_1 D_t^{\alpha-m+1} v(t),$$

следовательно,

$$Q_0 M_1 D_t^{\alpha-m+1} x(t) = (I - Q) M_1 D_t^{\alpha-m+1} x(t) =$$

$$= M_1 (I - P) D_t^{\alpha-m+1} x(t) = M_1 D_t^{\alpha-m+1} w(t).$$

Теорема 3.1.1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha - m + j_0$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 >$

$\dots > \beta_r \geqslant 0$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\dots,j_0$, M_{j_0} $(L,0)$*-ограничен,* $N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1,2,\dots,n$, $S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1,2,\dots,r$, *выполняются условия* (3.1.2), $x_k \in \mathcal{X}$, $k = m^*, m^*+1,\dots,j_0-1$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = j_0, j_0+1,\dots,m-1$, $g \in C((0,T);\mathcal{Y}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Y})$. *Тогда существует единственное решение задачи*

$$D_t^{\alpha-m+k}x(0) = x_k,\ k = m^*, m^*+1,\dots,j_0-1, \tag{3.1.5}$$

$$D_t^{\alpha-m+k}(Px)(0) = x_k,\ k = j_0, j_0+1,\dots,m-1, \tag{3.1.6}$$

для уравнения (3.1.1).

Доказательство. Понятно, что в силу условия $\alpha_n < \alpha - m + j_0$ уравнения (3.1.3) и (3.1.4) имеют одни и те же показатели $\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$, $\underline{m}$, $\overline{m}$, $m^* \leqslant j_0 - 1$. В итоге имеем задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(0) = Px_k,\ k = m^*, m^*+1,\dots,m-1,$$

для уравнения (3.1.3) и задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}w(0) = P_0x_k,\ k = m^*, m^*+1,\dots,j_0-1,$$

для уравнения (3.1.4). По теореме 1.4.1 каждая из этих задач имеет единственное решение.

Отметим, что хотя бы одно условие в (3.1.5) присутствует. □

Замечание 3.1.1. В случае $(L,0)$-ограниченности оператора M условия вида $D_t^{\alpha-m+k}(Px)(0) = x_k$ эквивалентны условиям $D_t^{\alpha-m+k}(Lx)(0) = y_k$ с $y_k = L_1x_k$ в силу гомеоморфности оператора $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$.

3.1.2 Случай $\alpha_n > \alpha - m + j_0$

Пусть $\alpha_n > \alpha - m + j_0$, оператор N_n $(L,0)$-ограничен. Тогда существуют проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L - N_n)^{-1}L d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L(\mu L - N_n)^{-1}\, d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

которым соответствуют подпространства $\mathcal{X}^q$, $\mathcal{Y}^q$ и при выполнении условий

$$\begin{gathered} QM_j = M_jP,\ j = 1, 2, \dots, j_0, \quad QN_l = N_lP,\ l = 1, 2, \dots, n-1, \\ QS_s = S_sP,\ s = 1, 2, \dots, r, \end{gathered} \tag{3.1.7}$$

уравнение (3.1.1) редуцируется к системе двух уравнений на подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha} v(t) = \sum_{j=1}^{j_0} L_1^{-1} Q M_j D_t^{\alpha-m+j} v(t) + \sum_{l=1}^{n} L_1^{-1} Q N_l D_t^{\alpha_l} v(t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} L_1^{-1} Q S_s J_t^{\beta_s} v(t) + L_1^{-1} Q g(t), \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{j=1}^{j_0} N_{n,0}^{-1} Q_0 M_j D_t^{\alpha-m+j} w(t) - \sum_{l=1}^{n-1} N_{n,0}^{-1} Q_0 N_l D_t^{\alpha_l} w(t) - \\ - \sum_{s=1}^{r} N_{n,0}^{-1} Q_0 S_s J_t^{\beta_s} w(t) - N_{n,0}^{-1} Q_0 g(t), \end{gathered} \tag{3.1.9}$$

где $v(t) := Px(t)$, $w(t) := (I - P)x(t) = P_0x(t)$, $t > 0$. Для уравнения (3.1.8) начальные условия, как и в первом случае, будут иметь вид

$$D_t^{\alpha-m+k}(Px)(0) = x_k,\ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1. \tag{3.1.10}$$

Для уравнения (3.1.9) определим параметры

$$\underline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1, 2, \dots, n-1,\ \alpha_l - m_l < \alpha_n - m_n, \alpha - m < \alpha_n - m_n\},$$

$$\overline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1, 2, \dots, n-1,\ \alpha_l - m_l > \alpha_n - m_n, \alpha - m > \alpha_n - m_n\},$$

$$\underline{m}_0 = \lceil \underline{\alpha}_0 \rceil, \quad \overline{m}_0 = \lceil \overline{\alpha}_0 \rceil, \quad m_0^* := \max\{\underline{m}_0 - 1, \overline{m}_0\}.$$

Теперь можно сформулировать начальные условия для уравнения (3.1.9):

$$D_t^{\alpha_n - m_n + k}(P_0x)(0) = y_k,\ k = m_0^*, m_0^*+1, \dots, m_n - 1. \tag{3.1.11}$$

Здесь, как и в первом случае, что $m_0^* < m_n$.

По аналогии с предыдущей теоремой получаем следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\alpha - m + j_0 < \alpha_n$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots, j_0$, $N_l \in$

$\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, N_n $(L, 0)$*-ограничен,* $S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, *выполняются условия* (3.1.7), $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $y_k \in \mathcal{X}^0$, $k = m_0^*, m_0^*+1, \ldots, m_n-1$, $g \in C((0,T);\mathcal{Y}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Y})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.1.10), (3.1.11) *для уравнения* (3.1.1).

3.2 Линейные обратные задачи

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, N_1, N_2, \ldots, N_n$, $S_1, S_2, \ldots, S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$. Как и прежде, нулевыми здесь могут быть только некоторые (или все) операторы M_j. Если все $M_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, то положим $j_0 = 0$, иначе существует $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, такое, что $M_{j_0} \neq 0$, $M_j = 0$, $j = j_0+1, j_0+2, \ldots, m-1$.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{j_0} M_j D_t^{\alpha-m+j} x(t) + \sum_{l=1}^{n} N_l D_t^{\alpha_l} x(t) + \sum_{s=1}^{r} S_s J_t^{\beta_s} x(t) + \varphi(t)u, \quad (3.2.1)$$

которое мы будем называть вырожденным в силу условия $\ker L \neq \{0\}$. Здесь $\varphi \in C((0,T);\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$ задано, элемент $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен. Рассмотрим два возможных случая: $\alpha_n < \alpha - m + j_0$ и $\alpha_n > \alpha - m + j_0$.

3.2.1 Случай $\alpha_n < \alpha - m + j_0$

При $\alpha_n < \alpha - m + j_0$ предположим, что оператор M_{j_0} $(L, 0)$-ограничен и выполняются условия

$$\begin{gathered} QM_j = M_j P, \ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \quad 1QN_l = N_l P, \ l = 1, 2, \ldots, n, \\ QS_s = S_s P, \ s = 1, 2, \ldots, r. \end{gathered} \quad (3.2.2)$$

Уравнение (3.2.1) с начальными условиями

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha-m+k} x(0) = x_k, \ k = m^*, m^*+1, \ldots, j_0 - 1, \\ D_t^{\alpha-m+k} (Px)(0) = x_k, \ k = j_0, j_0+1, \ldots, m-1, \end{gathered} \quad (3.2.3)$$

и условием переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T, \quad (3.2.4)$$

где $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, а соответствующий интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, редуцируем к двум задачам на $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно:

$$D_t^{\alpha} v(t) = \sum_{j=1}^{j_0} L_1^{-1} M_j D_t^{\alpha-m+j} v(t) + \sum_{l=1}^{n} L_1^{-1} N_l D_t^{\alpha_l} v(t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} L_1^{-1} S_s J_t^{\beta_s} v(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \quad t \in (0,T], \tag{3.2.5}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} v(0) = v_k,\ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \tag{3.2.6}$$

$$\int_0^T v(t) d\mu(t) = v_T \tag{3.2.7}$$

и

$$D_t^{\alpha-m+j_0} w(t) = -\sum_{j=1}^{j_0-1} M_{j_0,0}^{-1} M_j D_t^{\alpha-m+j} w(t) - \sum_{l=1}^{n} M_{j_0,0}^{-1} N_l D_t^{\alpha_l} w(t) - \\ - \sum_{s=1}^{r} M_{j_0,0}^{-1} S_s J_t^{\beta_s} w(t) - \varphi(t) M_{j_0,0}^{-1} u^0, \quad t \in (0,T], \tag{3.2.8}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} w(0) = w_k,\ k = m^*, m^*+1, \ldots, j_0-1, \tag{3.2.9}$$

$$\int_0^T w(t) d\mu(t) = w_T, \tag{3.2.10}$$

где $v(t) := Px(t)$, $v_k := Px_k$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $v_T := Px_T$, $u^1 = Qu$, $w(t) := P_0 x(t)$, $w_k := P_0 x_k$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, j_0-1$, $w_T := P_0 x_T$, $u^0 = Q_0 u$.

Заметим, что уравнения (3.2.5) и (3.2.8) являются разрешенными относительно старшей дробной производной, следовательно, по теореме 1.5.1 задача (3.2.5)–(3.2.7) (задача (3.2.8)–(3.2.10)) корректна тогда и только тогда, когда существует обратный оператор $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ ($\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$), при этом единственное решение имеет вид $u^1 = \chi_1^{-1}\psi_1$ ($u^0 = \chi_0^{-1}\psi_0$). Здесь

$$\chi_1 := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{m-1}^1(t-s) L_1^{-1} \varphi(s) ds,\ \psi_1 := v_T - \int_0^T \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p^1(t) v_p d\mu(t),$$

$$Z_p^1(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \lambda^{-\alpha} R_\lambda^1 \left(\lambda^{m-1-p} L_1 - \sum_{j=p+1}^{j_0} \lambda^{j-1-p} M_{j,1} \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$R_\lambda^1 := \left(L_1 - \sum_{j=1}^{j_0} \lambda^{j-m} M_{j,1} - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l-\alpha} N_{l,1} - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s-\alpha} S_{s,1} \right)^{-1},$$

$$\chi_0 := \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t Z^0_{m-1}(t-s) M^{-1}_{j_0,0}\varphi(s)ds,\ \psi_0 := w_T - \int\limits_0^T \sum_{p=m^*}^{j_0-1} Z^0_p(t) w_p d\mu(t),$$

$$Z^0_p(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \lambda^{-\alpha} R^0_\lambda \cdot \left(\lambda^{m-1-p} M_{j_0,0} + \sum_{j=p+1}^{j_0-1} \lambda^{j-1-p} M_{j,0}\right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$R^0_\lambda := \left(M_{j_0,0} + \sum_{j=1}^{j_0-1} \lambda^{j-m} M_{j,0} + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l-\alpha} N_{l,0} + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s-\alpha} S_{s,0}\right)^{-1}.$$

Здесь использованы очевидные преобразования, контуры Γ_1 и Γ_0 строятся так же, как и Γ в теореме 1.3.1.

Теперь введем строгие определения и формулировки.

Решением задачи (3.2.1), (3.2.3) называется $x : (0,T] \to \mathcal{X}$, для которого $J^{m-\alpha}_t Lx \in C^m((0,T];\mathcal{Y}) \cap C^{m-1}([0,T];\mathcal{Y})$, $J^{m-\alpha}_t x \in C^{j_0}((0,T];\mathcal{X}) \cap C^{j_0-1}([0,T];\mathcal{X})$, $J^{m_l-\alpha_l}_t x \in C^{m_l}((0,T];\mathcal{X})$, $J^{\beta_s}_t x \in C((0,T];\mathcal{X})$, выполняется равенство (3.2.1) при всех $t \in (0,T]$ и равенства (3.2.3).

Решением задачи (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) называется такая пара (x,u), что x является решением задачи (3.2.1), (3.2.3) с соответствующим $u \in \mathcal{Y}$ в уравнении, а также удовлетворяет условию (3.2.4).

Задача (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) называется корректной, если для любых $x_k \in \mathcal{X}$, $k = 0,1,\dots,j_0-1$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = j_0, j_0+1,\dots,m-1$, $x_T \in \mathcal{X}$ существует ее единственное решение, при этом $\|u\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C(\|x_{m^*}\|_{\mathcal{X}} + \|x_{m^*+1}\|_{\mathcal{X}} + \dots + \|x_{m-1}\|_{\mathcal{X}} + \|x_T\|_{\mathcal{X}})$, где C не зависит от x_k, $k = m^*,\dots,m-1$, x_T.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha - m + j_0$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1,2,\dots,n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1,2,\dots,n$, $S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1,2,\dots,r$, *оператор* M_{j_0} $(L,0)$*-ограничен, выполняются условия* (3.2.2), $\varphi \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, *функция* $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию, при* $m^* = 0$ *существует такое* $\varepsilon \in (0,T]$, *что* $\mu \in C^1([0,\varepsilon];\mathbb{R})$. *Тогда для корректности задачи* (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) *необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы* $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi_1^{-1}\psi_1 +$

$\chi_0^{-1}\psi_0$.

3.2.2 Случай $\alpha_n > \alpha - m + j_0$

Пусть $\alpha_n > \alpha - m + j_0$, оператор N_n $(L,0)$-ограничен. Тогда при выполнении дополнительных условий

$$\begin{gathered} QM_j = M_jP,\ j = 1,2,\dots,j_0, \quad QN_l = N_lP,\ l = 1,2,\dots,n-1, \\ QS_s = S_sP,\ s = 1,2,\dots,r, \end{gathered} \tag{3.2.11}$$

по аналогии с первым случаем рассмотрим два уравнения на подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно: уравнение

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha}v(t) = \sum_{j=1}^{j_0} L_1^{-1}M_jD_t^{\alpha-m+j}v(t) + \sum_{l=1}^{n} L_1^{-1}N_lD_t^{\alpha_l}v(t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} L_1^{-1}S_sJ_t^{\beta_s}v(t) + \varphi(t)L_1^{-1}u^1, \end{gathered} \tag{3.2.12}$$

снабженное условиями

$$D_t^{\alpha-m+k}v(0) = v_k,\ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1, \tag{3.2.13}$$

$$\int\limits_0^T v(t)d\mu(t) = v_T, \tag{3.2.14}$$

и уравнение

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha_n}w(t) = -\sum_{j=1}^{j_0} N_{n,0}^{-1}M_jD_t^{\alpha-m+j}w(t) - \sum_{l=1}^{n-1} N_{n,0}^{-1}N_lD_t^{\alpha_l}w(t) - \\ - \sum_{s=1}^{r} N_{n,0}^{-1}S_sJ_t^{\beta_s}w(t) - \varphi(t)N_{n,0}^{-1}u^0, \quad t \in (0,T], \end{gathered} \tag{3.2.15}$$

для которого определим параметры $\underline{m}_0 = \lceil \underline{\alpha}_0 \rceil$, $\overline{m}_0 = \lceil \overline{\alpha}_0 \rceil$, $m_0^* := \max\{\underline{m}_0 - 1, \overline{m}_0\}$, где

$$\begin{gathered} \underline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1,2,\dots,n-1, \\ \alpha_l - m_l < \alpha_n - m_n, \alpha - m < \alpha_n - m_n\}, \\ \overline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1,2,\dots,n-1, \\ \alpha_l - m_l > \alpha_n - m_n, \alpha - m > \alpha_n - m_n\}. \end{gathered}$$

Теперь можно сформулировать начальные условия для уравнения (3.2.15):

$$D_t^{\alpha_n-m_n+k}w(0) = w_k,\ k = m_0^*, m_0^*+1, \dots, m_n-1, \tag{3.2.16}$$

и задать условие переопределения

$$\int_0^T w(t)d\mu(t) = w_T. \tag{3.2.17}$$

Как и прежде, $v(t) = Px(t)$, $u^1 = Qu$, $w(t) = P_0x(t)$, $u^0 = Q_0u$.

Условия обратной задачи для уравнения (3.2.1) перепишем в виде

$$D_t^{\alpha-m+k}(Px)(0) = v_k,\ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1, \tag{3.2.18}$$

$$D_t^{\alpha_n-m_n+k}(P_0x)(0) = w_k,\ k = m_0^*, m_0^*+1, \dots, m_n-1, \tag{3.2.19}$$

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T = v_T + w_T. \tag{3.2.20}$$

Задачу (3.2.1), (3.2.18)–(3.2.20) будем называть корректной, если корректны задачи (3.2.12)–(3.2.14) и (3.2.15)–(3.2.17).

По теореме 1.5.1, как и в первом случае, получим следующий результат.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\alpha_n > \alpha - m + j_0$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1, 2, \dots, r$, *оператор* N_n $(L,0)$*-ограничен, выполняются условия* (3.2.11), $\varphi \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, *функция* $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию, при* $m^*m_0^* = 0$ *существует такое* $\varepsilon \in (0,T]$, *что* $\mu \in C^1([0,\varepsilon];\mathbb{R})$. *Тогда для корректности задачи* (3.2.1), (3.2.18)–(3.2.20) *необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы* $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$. *При этом* $u = \chi_1^{-1}\psi_1 + \chi_0^{-1}\psi_0$.

Здесь

$$\chi_1 := \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t Z^1_{m-1}(t-s) L_1^{-1}\varphi(s)ds,\ \psi_1 := v_T - \int\limits_0^T \sum_{p=m^*}^{m-1} Z^1_p(t) v_p d\mu(t),$$

$$Z^1_p(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \lambda^{-\alpha} R^1_\lambda \left(\lambda^{m-1-p}L_1 - \sum_{j=p+1}^{j_0}\lambda^{j-1-p}M_j\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$R^1_\lambda := \left(L_1 - \sum_{j=1}^{j_0}\lambda^{j-m}M_{j,1} - \sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l-\alpha}N_{l,1} - \sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s-\alpha}S_{s,1}\right)^{-1},$$

$$\chi_0 := \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t Z^0_{m-1}(t-s) N_{n,0}^{-1}\varphi(s)ds,\ \psi_0 := w_T - \int\limits_0^T \sum_{p=m_0^*}^{m_n-1} Z^0_p(t) w_p d\mu(t),$$

$$Z^0_p(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \lambda^{-\alpha_n} R^0_\lambda \left(\lambda^{m_n-1-p}N_{n,0} - \sum_{l=p+1}^{m_n-1}\lambda^{l-1-p}T_l\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$R^0_\lambda := \left(N_{n,0} - \sum_{j=1}^{j_0}\lambda^{j-m}M_{j,0} - \sum_{l=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_l-\alpha}N_{l,0} - \sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s-\alpha}S_{s,0}\right)^{-1},$$

$T_l = N_l$ при $\alpha_l - m_l = \alpha_n - m_n$, $T_l = 0$ при $\alpha_l - m_l \neq \alpha_n - m_n$.

3.3 Приложения к начально-краевым задачам

Полученные результаты при исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах в этом параграфе используем для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной дробного порядка по времени.

3.3.1 Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора

Как и в первой главе, введем в рассмотрение многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} a_p\lambda^p$, $P^j_2(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} b^j_p\lambda^p$, $P^l_3(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} c^l_p\lambda^p$, $P^s_4(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} d^s_p\lambda^p$, $a_p, b^j_p, c^l_p, d^s_p \in \mathbb{C}$, $p =$

$0, 1, \ldots, \nu \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $a_\nu \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\mathcal{A}u)(\xi) = \sum_{|q| \leqslant 2\rho} a_q(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(\mathcal{B}_\zeta u)(\xi) = \sum_{|q| \leqslant \rho_\zeta} b_{\zeta q}(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \ldots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \cdots + q_d$, операторный пучок $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_\rho$ регулярно эллиптичен [49]. Пусть оператор $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ имеет область определения

$$D_{\mathcal{A}_1} = H^{2\rho}_{\{\mathcal{B}_l\}}(\Omega) := \{u \in H^{2\rho}(\Omega) : \mathcal{B}_l u(\xi) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{A}_1 u := \mathcal{A}u$. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ оператора $\mathcal{A}_1$ действительный и дискретный [49]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора $\mathcal{A}_1$, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Возьмем $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geqslant 0$, $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Построим по набору чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ параметр m^* и рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} D_t^\alpha P_1(\mathcal{A}) v(\xi, t) = \sum_{j=1}^{m-1} P_2^j(\mathcal{A}) D_t^{\alpha - m + j} v(\xi, t) + \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A}) D_t^{\alpha_l} v(\xi, t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A}) J_t^{\beta_s} v(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T), \end{gathered} \tag{3.3.1}$$

снабженное краевыми условиями

$$\mathcal{B}_l \mathcal{A}^k v(\xi, t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad l = 1, 2, \ldots, \rho, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \tag{3.3.2}$$

Предположим, что $P_1(\lambda_k) = 0$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, при некотором $j_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $P_2^{j_0} \not\equiv 0$, $P_2^j \equiv 0$, $j = j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots, m-1$, $\alpha_n >$

$\alpha - m + j_0$, тогда при условии, что многочлены P_1 и P_3^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор N_n $(L,0)$-ограничен (см. [56]), при этом проекторы имеют вид

$$P = \sum_{P_1(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_1(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия с учетом замечания 3.1.1 зададим в виде

$$D_t^{\alpha-m+k} P_1(\mathcal{A}) v(\xi, 0) = y_k(\xi), \ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \quad \xi \in \Omega, \qquad (3.3.3)$$

при всех $i \in \mathbb{N}$, для которых $P_1(\lambda_i) = 0$,

$$\langle D_t^{\alpha_n - m_n + k} v(\cdot, 0), \varphi_i \rangle = c_{ki}, \ k = m_0^*, m_0^*+1, \ldots, m_n - 1, \qquad (3.3.4)$$

Таких $i \in \mathbb{N}$ конечное число, так как P_1 — многочлен. Конечный набор чисел c_{ki} определяет проекцию $D_t^{\alpha_n - m_n + k} u(\cdot, 0)$ на подпространство $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $k = m_0^*, m_0^*+1, \ldots, m_n - 1$. Параметры m^*, m_0^* определяются как в разделе 3.1.2.

Теперь задача (3.3.1)–(3.3.4) представима в виде (3.1.1), (3.1.10), (3.1.11) с выбранными пространствами $\mathcal{X} = \{w \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, \, k = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1, \, \zeta = 1, 2, \ldots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$ и операторами $L = P_1(\mathcal{A}_1)$, $M_j = P_2^j(\mathcal{A}_1)$, $D_{M_j} = \{w \in H^{2\rho\nu_2^j}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, k = 0, 1, \ldots, \nu_2^j - 1, \, \zeta = 1, 2, \ldots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\}$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, $N_l = P_3^l(\mathcal{A}_1)$, $D_{N_l} = \{w \in H^{2\rho\nu_3^l}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, \, k = 0, 1, \ldots, \nu_3^l - 1, \, \zeta = 1, 2, \ldots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $S_s = P_4^s(\mathcal{A}_1)$, $D_{S_s} = \{w \in H^{2\rho\nu_4^s}(\Omega) : \mathcal{B}_\zeta \mathcal{A}^k w(\xi) = 0, \, k = 0, \ldots, \nu_4^s - 1, \, \zeta = 1, 2, \ldots, \rho, \, \xi \in \partial\Omega\}$, $s = 1, 2, \ldots, r$. Здесь $\nu_1 = \max\{p \in \{0, 1, \ldots, \nu - 1\} : a_p \neq 0\}$, $\nu_2^j = \max\{p \in \{0, 1, \ldots, \nu\} : b_p^j \neq 0\}$, $j \in J \subset \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $\nu_3^l = \max\{p \in \{0, 1, \ldots, \nu\} : c_p^l \neq 0\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\nu_4^s = \max\{p \in \{0, 1, \ldots, \nu\} : d_p^s \neq 0\}$, $s = 1, 2, \ldots, r$.

Из вида операторов M_j, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, N_l, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, S_s, $s = 1, 2, \ldots, r$, и проекторов P, Q сразу следует выполнение условий (3.1.7). Поэтому из теоремы 3.1.2 следует однозначная разрешимость задачи (3.3.2)–(3.3.4) при любых начальных данных $y_k \in \mathcal{Y}^1 = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_k : P_1(\lambda_k) \neq 0\}$, где верхняя черта означает замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$, $k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1$, $c_{ki} \in \mathbb{C}$, $k = m_0^*, m_0^* + 1, \dots, m_n - 1$, при таких $i \in \mathbb{N}$, что $P_1(\lambda_i) = 0$, и при $h \in C((0,T); L_2(\Omega)) \cap L_1(0,T; L_2(\Omega))$.

Пример. Возьмем $\alpha = 5/2$, $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/2$, $P_1(\lambda) = \lambda(\lambda + 9)$, $P_2^1(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2$, $P_2^2(\lambda) \equiv 0$, $P_3^1(\lambda) = 1 + \lambda$, $P_4^1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho = 1$, $\mathcal{A}u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\mathcal{B}_1 = I$. Тогда $\underline{m} = 0$, $\overline{m} = 1$, $m^* = 1$, $\Lambda = \{-2/3\}$, $j_0 = 1$, $\alpha_1 > \alpha - m + j_0$, $m_1 = 1$, $\underline{m}_0 = 1$, $\overline{m}_0 = 0$, $m_0^* = 0$, $\Lambda_0 = \{-1/2\}$, и задача (3.3.1)–(3.3.4) имеет вид

$$D_t^{5/2}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)(\xi,t) = \left(b_0 + b_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + b_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)D_t^{1/2}u(\xi,t) +$$
$$+\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)D_t^{2/3}u(\xi,t) + \left(d_0 + d_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + d_2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)J_t^{1/2}u(\xi,t),$$
$$(\xi,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(\pi,t) = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+, \ \xi \in (0,\pi),$$

$$J^{1/3}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)u(\xi,0) = 0, \quad J^{1/2}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)u(\xi,0) = 0, \quad \xi \in (0,\pi),$$

$$D^{1/2}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)u(\xi,0) = y_1(\xi),\ \xi \in (0,\pi),$$

$$D^{3/2}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)u(\xi,0) = y_2(\xi),\ \xi \in (0,\pi),$$

$$\langle J_t^{1/3}u(\cdot,0), \sin 3\xi\rangle = c, \ \langle J_t^{1/2}u(\cdot,0), \sin 3\xi\rangle = 0, \ \xi \in (0,\pi).$$

Здесь $c \in \mathbb{C}$, $\langle y_k(\cdot), \sin 3\xi\rangle = 0$, $k = 1, 2$. Мы учитываем тот факт, что $\lambda_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $P_1(\lambda_3) = 0$.

3.3.2 Линейные обратные задачи для уравнений с многочленами

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_l - 1 < \alpha_l \leqslant m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение в $\Omega \times (0,T]$

$$
\begin{gathered}
D_t^\alpha P_1(\mathcal{A})v(\xi,t) = \sum_{j=1}^{m-1} P_2^j(\mathcal{A}) D_t^{\alpha-m+j} v(\xi,t) + \\
+ \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A}) D_t^{\alpha_l} v(\xi,t) + \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A}) J_t^{\beta_s} v(\xi,t) + \varphi(t) w(\xi),
\end{gathered} \tag{3.3.5}
$$

с краевыми условиями

$$
\mathcal{B}_l \mathcal{A}^k v(\xi,t) = 0, \ \ k = 0,1,\dots,\nu-1, \ \ l = 1,2,\dots,\rho, \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{3.3.6}
$$

и условием переопределения

$$
\int\limits_0^T v(\xi,t) d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{3.3.7}
$$

Вид начальных условий будет зависеть от ситуации. Положим $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$,

$\mathcal{X} = \{u \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : \mathcal{B}_l \mathcal{A}^k u(\xi) = 0, \, k = 0,1,\dots,\nu-1, l = 1,2,\dots,\rho, \, \xi \in \partial\Omega\}$,

$L = P_1(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_j = P_2^j(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\dots,m-1$, $N_l = P_3^l(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1,2,\dots,n$, $S_s = P_4^s(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1,2,\dots,r$.

Пусть $P_1(\lambda_k) = 0$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, для $j_0 \in \{0,1,\dots,m-1\}$ $P_2^{j_0} \not\equiv 0$, $P_2^j \equiv 0$, $j = j_0+1, j_0+2, \dots, m-1$, $\alpha_n > \alpha - m + j_0$. Тогда при условии, что многочлены P_1 и P_3^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор N_n $(L,0)$-ограничен (см. [135]), при этом проекторы имеют вид

$$
P = \sum_{P_1(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_1(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.
$$

Начальные условия с учетом замечания 3.1.1 зададим в виде

$$
D_t^{\alpha-m+k} P_1(\mathcal{A}) v(\xi,0) = y_k(\xi), \ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{3.3.8}
$$

при таких $i \in \mathbb{N}$, что $P_1(\lambda_i) = 0$,

$$
\langle D_t^{\alpha_n - m_n + k} v(\cdot,0), \varphi_i \rangle = c_{ki}, \ k = m_0^*, m_0^*+1, \dots, m_n - 1. \tag{3.3.9}
$$

Дефекты m^*, m_0^* определяются описанным выше образом. Теперь задача (3.3.5)–(3.3.9) представима в виде (3.1.1), (3.2.18)–(3.2.20) с выбранными выше пространствами $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и операторами L, M_j, N_l, S_s, $j = 1,2,\dots,m-1$, $l = 1,2,\dots,n$, $s = 1,2,\dots,r$.

Из теоремы 3.2.2 следует, что задача (3.3.5)–(3.3.9) корректна тогда только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$, таких, что $P_1(\lambda_k) \neq 0$,

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_1} R_{\lambda,k} e^{\lambda(t-s)} d\lambda \varphi(s) ds d\mu(t) \right| \geqslant c, \tag{3.3.10}$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $P_1(\lambda_k) = 0$,

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} R^0_{\lambda,k} e^{\lambda(t-s)} d\lambda \varphi(s) ds d\mu(t) \neq 0, \tag{3.3.11}$$

$$R^0_{\lambda,k} := \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{\alpha+j-m} P_2^j(\lambda_k) + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l} P_3^l(\lambda_k) + \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s} P_4^s(\lambda_k) \right)^{-1}.$$

Пример. Возьмем $\alpha = 5/2$, $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/2$, $P_1(\lambda) = \lambda(\lambda+9)$, $P_2^1(\lambda) = b_1\lambda + b_2\lambda^2$, $P_2^2(\lambda) \equiv 0$, $P_3^1(\lambda) = c_0 + c_2\lambda^2$, $P_4^1(\lambda) = d_0 + d_1\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\rho = 1$, $\mathcal{A}u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\mathcal{B}_1 = I$, μ — функция единичного скачка в точке $t_0 \in (0,T]$, удовлетворяющая условию непрерывной дифференцируемости в правой окрестности нуля. Тогда $\underline{m} = 0$, $\overline{m} = 1$, $m^* = 1$, $j_0 = 1$, $\alpha_1 > \alpha - m + j_0$, $m_1 = 1$, $\underline{m}_0 = 1$, $\overline{m}_0 = 0$, $m_0^* = 0$, и задача (3.3.5)–(3.3.9) имеет вид

$$\begin{gathered}
D_t^{5/2} \left(\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi,t) = \left(b_1 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b_2 \tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right) D_t^{1/2} v(\xi,t) + \\
+ \left(c_0 + c_2 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) D_t^{2/3} v(\xi,t) + \left(d_0 + d_1 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) J_t^{1/2} v(\xi,t) + u(\xi), \\
(\xi,t) \in (0,\pi) \times (0,T], \\
v(0,t) = v(\pi,t) = \tfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(0,t) = \tfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\pi,t) = 0, \ \ t \in (0,T], \ \xi \in (0,\pi), \\
D^{1/2} \left(\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi,0) = y_1(\xi), \ \xi \in (0,\pi), \\
D^{3/2} \left(\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9 \tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi,0) = y_2(\xi), \ \xi \in (0,\pi), \\
\langle J_t^{1/3} v(\cdot,0), \sin 3\xi \rangle = c, \\
v(\xi,t_0) = v_T(\xi), \quad \xi \in (0,\pi).
\end{gathered}$$

Здесь $c \in \mathbb{C}$, $\langle y_k(\cdot), \sin 3\xi \rangle = 0$, $k = 1,2$, так как $\lambda_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $P_1(\lambda_3) = 0$.

Условия (3.3.10), (3.3.11) имеют вид

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1}\Big(k^4\lambda^{3/2}+(b_1k^2-b_2k^4)\lambda^{-1/2}-(c_0+c_2k^4)\lambda^{-1/3}-\right.$$
$$\left.-(d_0-d_1k^2)\lambda^{-3/2}\Big)^{-1}(e^{\lambda T}-1)d\lambda\right|\geqslant c,\quad k\in\mathbb{N}\setminus\{3\},$$
$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{(e^{\lambda T}-1)d\lambda}{(-9b_1+81b_2)\lambda^{-1/2}+(c_0+81c_2)\lambda^{-1/3}+(d_0-9d_1)\lambda^{-3/2}}\neq 0.$$

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены условия существования аналитических (в разрезанной комплексной плоскости для первой и третьей главы и в содержащем положительную действительную полуось для второй главы) разрешающих семейств операторов линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля. Это позволило исследовать однозначную разрешимость задачи типа Коши для линейных однородных, неоднородных и квазилинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной, а также некоторых начальных задач для уравнений, имеющих при старшей производной Римана — Лиувилля вырожденный линейный оператор. Рассмотрены некоторые линейные обратные задачи для таких уравнений. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, в частности, для систем, описывающих динамику и термоконвекцию в вязкоупругих средах.

Проведенные в диссертации исследования могут быть распространены на близкие задачи: поиск условий существования сильно непрерывных разрешающих семейств линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля, использование этих условий при исследовании линейных и квазилинейных уравнений, исследование вопросов существования нелокальных решений квазилинейных уравнений, исследование различных обратных задач, изучение вырожденных эволюционных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля в линейной части при условии существования аналитического в секторе или сильно непрерывного разрешающего семейства операторов, в том числе квазилинейных.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

3. $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

4. Область определения оператора A обозначается через D_A, его ядро — через $\ker A$, образ — через imA. Символом $\operatorname{span} \mathcal{B}$ обозначается линейная оболочка множества $\mathcal{B}$.

5. Через $L_q(\Omega; \mathcal{X})$ и $W_q^l(\Omega; \mathcal{X})$ обозначаются пространства Лебега и Соболева соответственно функций $u : \Omega \to \mathcal{X}$, где область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $q \geqslant 1$, $l \in \mathbb{N}$, $H^l(\Omega; \mathcal{X}) := W_2^l(\Omega; \mathcal{X})$.

6. Символами I и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

7. Символ $\square$ лежит в конце доказательства.

Список литературы

[1] Авилович, А. С. Вопросы однозначной разрешимости и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью / А. С. Авилович, Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-матем. журн. — 2020. — Т. 5, №. 1. — С. 5–21.

[2] Байбулатова, Г. Д. Задача стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными / Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 271–284.

[3] Бондарь, Л. Н. Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения Соболева / Л. Н. Бондарь, Г. В. Демиденко // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 5. — С. 998–1012.

[4] Бояринцев, Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.

[5] Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

[6] Булатов, М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М. В. Булатов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 360–372.

[7] Глушак, А. В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 1. — С. 28–41.

[8] Глушак, А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Глушак // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, вып. 5. — С. 654–662.

[9] Глушак, А. В. О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором / А. В. Глушак,

Х. К. Авад // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2013. — Т. 47. — С. 18–32.

[10] Глушак, А. В. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара / А. В. Глушак, Т. А. Манаенкова // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1294–1304.

[11] Гордиевских, Д. М. Разрешимость начально-краевых задач для некоторых систем уравнений дробного порядка по времени / Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — Т. 12. — С. 12–22.

[12] Демиденко, Г. В. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши-Ковалевской / Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 26. — С.42–76.

[13] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[14] Егоров, И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

[15] Звягин, В. Г. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина — Фойгта // В. Г. Звягин, М. В. Турбин // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2009. — Т. 31. — С. 3–144.

[16] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[17] Кайкина, Е. И. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 61–114.

[18] Кайкина, Е. И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Функц. анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 14–26.

[19] Кожанов, А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 2. — С. 359–376.

[20] Кожанов, А. И. Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1335–1346.

[21] Кожанов, А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

[22] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 240 с.

[23] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011. — 376 с.

[24] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

[25] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

[26] Мамчуев, М. О. Краевая задача для многомерной системы уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля / М. О. Мамчуев // Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. —Т. 16. — С. 732–747.

[27] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

[28] Нахушев, А. М. Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. — Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. — 299 с.

[29] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

[30] Осколков, А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та СССР. — 1987. — Т. 179. — С. 126–164

[31] Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М.: Наука, 2005. — 199 с.

[32] Псху, А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 141–182.

[33] Псху, А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 4. — С. 111–122.

[34] Псху, А. В. О продолжении решений дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 133–136.

[35] Псху, А. В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1076–1082.

[36] Пятков, С. Г. Краевые и обратные задачи для некоторых классов неклассических операторно-дифференциальных уравнений / С. Г. Пятков // Сиб. мат. журн. — 2021. — Т. 62 , № 3. — С. 489–502.

[37] Пятков, С. Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай / С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 678–693.

[38] Романова, Е. А. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай / Е. А. Романова, В. Е. Федоров // Мат. заметки. — 2016. — Т. 23, вып. 4. — С. 58–72.

[39] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[40] Свиридюк, Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, вып. 4 (298). — С. 47–74.

[41] Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М.: Физматлит, 2019. — 224 с.

[42] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 81, № 6. — С.1007–1009.

[43] Соболев, С. Л. Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 82, № 2. — С. 205–208.

[44] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.

[45] Соболев, С. Л. О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Прикл. механика и тех. физика. — 1960. — № 3. — С. 20–55.

[46] Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.

[47] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

[48] Тихонов, И. В. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Мат. заметки. — 1994. — Т. 56, вып. 2. — С. 830–839.

[49] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[50] Уразаева, А. В. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 8. — С. 1111–1119.

[51] Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 510 с.

[52] Фалалеев, М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — Т. 3, вып. 1. — С. 126–132.

[53] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

[54] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2011. — Вып. 7, № 4 (211). — С. 100–110.

[55] Федоров, В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

[56] Федоров, В. Е. Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 702–712.

[57] Федоров, В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 131–160.

[58] Федоров, В. Е. Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 426–448.

[59] Федоров, В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В. Е. Федоров // Вестн. Челяб. гос. ун–та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Вып. 11, № 20 (158). — С. 12–19.

[60] Федоров В. Е. О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределенного порядка / В. Е. Федоров // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 489. — С. 113–129.

[61] Федоров, В. Е., Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 461–477.

[62] Федоров, В. Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными / В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28. вып. 3. — С. 85–104.

[63] Федоров, В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.

[64] Федоров, В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В.Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

[65] Федоров, В. Е. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, А. Дебуш // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 12. — С. 1616–1622.

[66] Федоров, В. Е. Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто / В. Е. Федоров, М. Костич // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57. № 1. — С. 100–113.

[67] Федоров, В. Е. Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова — Капуто в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова // Мат. заметки СВФУ. — 2020. — Т. 27, № 2. — С. 54–76.

[68] Федоров, В. Е. Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2019. — Т. 28. — С. 123–137.

[69] Федоров, В. Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 11. — С. 1548–1556.

[70] Федоров, В. Е. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, Р. Р. Нажимов // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 1. — С. 171–184.

[71] Федоров, В. Е. Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2017. — Т. 137. — С. 82–96.

[72] Федоров, В. Е. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, No 2. — С. 93–107.

[73] Федоров, В. Е., Один класс полулинейных уравнений распределенного порядка в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, Т. Д. Фуонг, Б. Т. Киен, К. В. Бойко, Е. М. Ижбердеева // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 342–351.

[74] Чистяков, В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

[75] Чубенко, П. А. Разрушение решения одного нелинейного нелокального уравнения соболевского типа / П. А. Чубенко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 2. — С. 211–219.

[76] Юшков, Е. В. О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа / Е. В. Юшков // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 76, № 1. — С. 201–224.

[77] Arendt, W. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Basel : Springer Basel AG, 2011. — 539 p.

[78] Al Horani, M. Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces / M. Al Horani, A. Favini // Nonlinear Analysis. — 2012. — Vol. 75, No. 1. — P. 68–77.

[79] Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.

[80] Balachandran, K. Existence of solutions of abstract fractional integrodifferential equations of Sobolev type / K. Balachandran, S. Kiruthika // Computers and Mathematics with Applications. — 2012. — Vol. 64, No. 10. — P. 3406–3413.

[81] Boyko, K. V. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, No. 6. — P. 1293–1302.

[82] David, S. A. Fractional modeling applied to the dynamics of the action potential in cardiac tissue / S. A. David, C. A. Valentim, A. Debbouche // Fractal and Fractional. — 2022. — Vol. 6, no. 3. — P. 149

[83] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 247 p.

[84] Favini, A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. — 1979. — Vol. 12, No. 3–4. — P. 511–536.

[85] Favini, A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations / A. Favini, A. Yagi // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1993. — Vol. CLXIII. — P. 353–384.

[86] Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York, etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.

[87] Fedorov, V. E. Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations / V. E. Fedorov // Mathematics. — 2020. Vol. 8, no. 1306. — 15 p.

[88] Fedorov, V.E. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2021. — Vol. 66. No. 6–7. — P. 1108–1121.

[89] Fedorov, V.E. Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case. / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, L. V. Borel // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 41–62.

[90] Fedorov, V. E. Degenerate multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives in the sectorial case / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Mathematics. — 2022. — Vol.10, no.24. — P. 4699.

[91] Fedorov, V. E. Initial value problems for some classes of linear evolution equations with several fractional derivatives / V. E. Fedorov, K. V. Boyko, T. D. Phuong // Mathematical Notes of NEFU. — 2021. Vol. 28. — P. 85–104.

[92] Fedorov, V. E. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order. / V. E. Fedorov, N. D. Ivanova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20, No. 3. — P. 706–721.

[93] Fedorov, V. E. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann — Liouville derivatives / V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. Kostić, A. A. Abdrakhmanova // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 5. P. 681.

[94] Fedorov, V. E. On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces / V. E. Fedorov, M. Kostić // Eurasian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 9, No. 3. — P. 33–57.

[95] Fedorov, V. E. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, A. S. Avilovich // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2021. — Vol. 44, No. 15. — P. 11961–11969.

[96] Fedorov, V. E. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations / V. E Fedorov, A. V. Nagumanova, M. Kostić // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2021. — Vol. 29, No. 2. — P. 173–184.

[97] Fedorov, V. E. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative / V. E. Fedorov, R. R. Nazhimov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2019. — Vol. 22, No. 2. — P. 271–286.

[98] Hadid, S. B. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order / S. B. Hadid, Yu. F. Luchko // Panamerican Mathematical Journal. — 1996. — Vol. 6, No .1. — P. 57–73.

[99] Hassard, B. D. Theory and Applications of Hopf Bifurcation / B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[100] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — Singapore: WSPC, 2000. —465 p.

[101] Hilfer, R. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann — Liouville fractional derivatives / R. Hilfer, Yu. F. Luchko, Z. Tomovski // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2009. — Vol. 12, No. 3. — P. 299–318.

[102] Hopf, E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen / E. Hopf // Mathematische Nachrichten. — 1950–1951. — Vol. 4. — P. 213–231.

[103] Jiang, H. Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo — Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain / H. Jiang, F. Liu, I. Turner, K. Burrage // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 389, No. 2. — P. 1117–1127.

[104] Kato, K. Perturbation Theory for Linear Operators / K. Kato. — Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg, Germany, 1966.

[105] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.

[106] Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 458 p.

[107] Kostić, M. Abstract Degenerate Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Београд : Математички институт САНУ, 2020. — 516 p.

[108] Leray, J. Essai sur le mouvement plans d'un liquide visqueux que limitent des parois / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1934. — Ser. IX, vol. XIII, fasc. 4. — P. 331–418.

[109] Li, C.-G. Abstract multi-term fractional differential equations / C.-G. Li, M. Kostić, M. Li // Kragujevac Journal of Mathematics. — 2014. — Vol. 38, No. 1. — P. 51–71.

[110] Li, F. Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions / F. Li, J. Liang, H. K. Xu // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 391. — P. 510–525.

[111] Luchko, Yu. F. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus / Yu. F. Luchko, H. M. Srivastava // Computers & Mathematics with Applications. — 1995. — Vol. 29, No. 8. – P. 73–85.

[112] Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — Vol. 193. — P. 133–160.

[113] Melnikova, I. V. Abstract Cauchy Problems: Three Approahes / I. V. Melnikova, A. Filinkov. — Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman & Hall / CRC, 2001. — 242 p.

[114] Oldham, K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. — Boston: Academic Press, 1974. — 234 p.

[115] Orlovsky, D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space / D/ G. Orlovsky // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, iss. 1. — P. 55–63.

[116] Oseen, C. W. Hydrodynamik / C. W. Oseen. — Leipzig: Akad. Verl.-Ges., 1927. — 337 p.

[117] Ozturk, I. On the theory of fractional differential equation / I. Ozturk // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. АН. — 1998. — Vol. 3, No. 1. — P. 35–39.

[118] Plekhanova, M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2017. — Vol. 40, iss. 17. — P. 6138–6146.

[119] Plekhanova, M. V. Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.

[120] Plekhanova, M. V. Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order / M. V. Plekhanova // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, no. 2. — P. 236–244.

[121] Plekhanova, M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions / M. V. Plekhanova // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020101.

[122] Plekhanova, M. V. Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative / M. V. Plekhanova // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2016. — Vol. 9, no. 3. — P. 833–847.

[123] Plekhanova, M. V. Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. .D. Baybulatova // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 81–93.

[124] Plekhanova, M. V. Numerical solution of an optimal control problem for Oskolkov's system / M. V. Plekhanova, G.D. Baybulatova, P.N. Davydov// Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, iss. 18. — P. 9071–9080.

[125] Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego; Boston: Academic Press, 1999. — 340 p.

[126] Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'unmouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica. — 1885. — Vol. 7. — P. 259–380.

[127] Prilepko, A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. .G. Orlovskii, I. A. Vasin. — New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 2000. — 744 p.

[128] Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. — Basel: Springer, 1993.

[129] Pyatkov, S. G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 75–89.

[130] Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. — 568 p.

[131] Shishkina, E. L. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov — Caputo type / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 12. — P. 1216.

[132] Shishkina, E. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 592 p.

[133] Showalter, R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. — 1975. — Vol. 6, No. 1. — P. 25–42.

[134] Sowndarrajan, P. T. Optimal control of a heroin epidemic mathematical model / P. T. Sowndarrajan, L. Shangerganesh, A. Debbouche, D. F. M. Torres // Optimization. — 2022. — Vol. 71, no. 11. — P. 3107–3131.

[135] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 216 p.

[136] Tarasov, V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. — New York: Springer, 2011. — 450 p.

[137] Yavuz, M. European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel / M. Yavuz, N. Özdemir // Fractal and Fractional. — 2018. — Vol. 2, no. 1. — P. 3.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

[138] Туров, М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля произвольных порядков / М. М. Туров // Челяб. физ-мат. журн. — 2022. — Т. 7, № 4. — С. 434–446.

[139] Федоров, В. Е. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сиб. матем. журн. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143–1162.

[140] Fedorov, V. E. On the Unique Solvability of Incomplete Cauchy Type Problems for a Class of Multi-Term Equations with the Riemann — Liouville Derivatives / V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. M. Turov // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, No. 1.

[141] Fedorov, V. E. Sectorial Tuples of Operators and Quasilinear Fractional Equations with Multi-Term Linear Part / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1502–1512.

[142] Fedorov V. E. A Class of Quasilinear Equations with Riemann — Liouville Derivatives and Bounded Operators / V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien // Axioms. — 2022. — Vol. 11, No. 3. — P. 96.

[143] Turov M. M. Linear inverse problems for multi-term equations with Riemann — Liouville derivatives / M. M. Turov, V. E. Fedorov, B. T. Kien // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 38. — P. 36–53.

[144] Fedorov V. E. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Holder type function spaces / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2023. — Vol. 29, No. 2. — P. 42.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[145] Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2022. — С. 69.

[146] Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля в секториальном случае / М. М. Туров // The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations: сб. тез. Междунар. научн. конф. — Москва: РУДН, 2022. — С. 162.

[147] Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными в линейной части / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя математическая школа: мат. междунар. научн. конф., Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 260.

[148] Туров М. М. Неоднородная задача типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: матер. VI междунар. научн. кофн., Нальчик, 2021. — С. 81.

[149] Туров М. М. Аналитические в секторе решения одного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: сб. тез. докладов. Суздаль, 2022. — С. 192.

[150] Turov M.M. Sectorial Tuples of Operators and Fractional Multi-Term Linear Equations / M. .M. Turov, V. .E. Fedorov // O. A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: Book of abstracts, St. Petersburg, 2022. — P. 96.