Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Бойко Ксения Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич

ЧЕЛЯБИНСК — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Дробное интегро-дифференциальное исчисление предоставляет эффективные инструменты для исследования прикладных математических задач в различных областях науки, таких как физика, математическая биология, теория финансовых рынков и многих других. В научной литературе в последний десятилетия появилось большое количество математических моделей различных реальных процессов, описываемых уравнениями с дробными производными и дробными интегралами [27,46,81,99,120]. В то же время такие уравнения представляют и теоретический интерес для теории дифференциальных уравнений и поэтому являются объектами исследования многих авторов (см. монографии [35, 38, 67, 86, 98, 101, 109] и библиографии к ним).

Все сказанное выше свидетельствует об актуальности темы исследования данной диссертации, как и тот факт, что количество работ, изучающих различные задачи для дробных дифференциальных уравнений, как теоретические, так и прикладные, с каждым годом только нарастает.

Степень разработанности темы исследования

В XVII веке зародилась история использования интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Г. В. Лейбниц, Г. Ф. Лопиталь, Я. Бернулли, Д. Валлис обсуждали возможность рассматривать дробные производные и дробные интегралы. В XVIII веке в историю дробного исчисления вошли еще два имени — Ж. Л. Лагранж и Л. Эйлер. В XIX и начале XX века многие знаменитые исследователи писали работы на такую тему, среди них П.-С. Лаплас, Ж.-Б. Ж. Фурье, Н. Х. Абель, Ж. Лиувилль, Г. Ф. Б. Риман, В. Грюнвальд, А. В. Летников, О. Хэвисайд, А. Зигмунд, Р. Курант и др.

Во второй половине XX века интерес исследователей к дробному исчислению не исчез, причем исследования велись во всех направлениях, от математического анализа, до прикладных задач. Например, в середине и во второй половине XX века теория дробных производных стала активно использоваться в механике сплошных сред, в частности, в работах А. Н. Герасимова [8], М. Капуто [66], см. по этому поводу также обзорные статьи Ю. А. Россихина [113] и О. Г. Новоженовой [100]. В XXI веке лишь возрос интерес к такой тематике, появляются новые виды дробных производных и интегралов.

Среди современных работ отметим некоторые работы, посвященные этой тематике: K. B. Oldham, J. Spanier [101], K. S. Miller, B. Ross [98], С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев [38], A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo [86], А. М. Нахушев [27–29], А. В. Псху [32–36], K. Diethelm [67], M. Kostić [87, 88], М. О. Мамчуев [26, 96], С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина [42, 114]. Р. К. Газизовым, А. А. Касаткиным, С. Ю. Лукащуком [5–7, 79] развиваются методы группового анализа для уравнений с дробными производными.

Задачи для различных классов уравнений с несколькими дробными производными (multi-term fractional equations) исследовались многими авторами, в частности изучались начально-краевые задачи для телеграфных [83], диффузионных уравнений [63, 92] такого вида, импульсные уравнения [117, 118], различные уравнения в локально выпуклых (в частности, в банаховых) пространствах с приложениями к уравнениям в частных производных [10, 72, 84, 91, 93], уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля, аналогичные рассмотренным в данной работе [58, 76–78].

В теории дифференциальных уравнений отдельный класс составляют уравнения и системы уравнений соболевского типа [14, 25], особые свойства которых обусловлены неразрешенностью относительно старшей производной. При наличии вырожденного оператора при старшей производной в таком уравнении будем называть его также вырожденным эволюционным уравнением [69]. Различные классы уравнений соболевского типа, в том числе, вырожденных эволюционных уравнений целого порядка изучались в работах А. Пуанкаре [110], C. W. Oseen [104], J. Leray [90], E. Hopf [82], О. А. Ладыженской [24], С. Л. Соболева [43, 44] и его учеников и последователей. Переходя к настоящему времени, отметим в этом направлении работы R. E. Showalter [115], Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева [40, 41, 47, 48, 116], Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой [1,13,14], Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. А. Щегловой [2–4,61], А. И. Кожанова [19–21], С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова [15,37,112], А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [22, 23, 25], И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина [17, 18].

Отметим, что один из подходов к исследованию вырожденных эволюционных уравнений первого порядка в банаховых пространствах основан на применении методов теории полугрупп операторов. Он используется в работах различных авторов: A. Favini, A. Yagi [68–70], Г. А. Свиридюка [39], И. В. Мельниковой и А. Филинкова [97], В. Е. Федорова [49–51].

Методы теории разрешающих полугрупп операторов дифференциальных уравнений распространены в монографии J. Prüss [111] на эволюционные интегральные уравнения. Получаемые при этом разрешающие семейства операторов интегрального уравнения уже не обладают полугрупповым свойством, но по-прежнему позволяют исследовать многие качественные свойства решений уравнения. В работе Э. Г. Бажлековой [65] аналогичным образом исследованы уравнения, разрешенные относительно дробной производной Герасимова — Капуто, и их разрешающие семейства операторов. Отметим также близкие к этому направлению работы А. В. Глушака и его соавторов [9–11] о дробных дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах, работы M. Костича с соавторами [72, 87, 88, 91], в которых исследуются различные общие классы разрешающих семейств операторов для интегро-дифференциальных эволюционных уравнений в локально выпуклых пространствах, включая эволюционные уравнения с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто, в том числе вырожденные [87], и работы некоторых других авторов (см. [62, 83, 94] и др.), посвященные изучению уравнений с несколькими дробными производными.

В работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников методы теории разрешающих семейств операторов были распространены на различные уравнения в банаховых пространствах с дробными производными Герасимова — Капуто, Римана — Лиувилля, Джрбашяна — Нерсесяна, с распределенными дробными производными. При этом исследованы различные классы уравнений, как разрешенных относительно старшей дробной производной [52, 56, 58, 74, 76–78], так и вырожденных [54, 55, 57, 59, 105–108]. Абстрактные результаты используются при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных. Данная диссертационная работа представляет собой одно из исследований в этом направлении.

Обратные коэффициентные задачи для различных уравнений с дробной производной стали предметом исследования в последние полтора десятилетия — см. работы [11, 12, 64, 71, 73, 75, 89, 94, 102].

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения начальных и начально-краевых задач для новых классов дифференциальных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто.

Задачами диссертации является получение условий существования единственного классического решения задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений, разрешенных относительно старшей производной Герасимова — Капуто, в случаях ограниченных и неограниченных линейных операторов в уравнении, а также некоторых модификаций задачи Шоуолтера —

Сидорова для линейных неоднородных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова — Капуто в предположении, что пара линейных операторов в уравнении при старших дробных производных спектрально ограничена или секториальна.

Полученные результаты должны содержать условия, которые относительно просто проверяются в приложениях и могут быть использованы для исследования вопросов однозначной разрешимости новых начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени.

Научная новизна

Получены условия существования и единственности решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных, а также для квазилинейных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто в линейной части, разрешенных относительно старшей из них. В случае неограниченных операторов в уравнении введено понятие разрешающего семейства операторов такого уравнения и получены необходимые и достаточные условия существования аналитического в секторе разрешающего семейства в терминах резольвенты пучка операторов. Соответствующие наборы операторов для удобства называются секториальными. Найдены представления разрешающих семейств операторов в виде интегралов Данфорда — Тейлора в случае ограниченных операторов в уравнении или при условии секториального набора операторов. Полученный аналог формулы Дюамеля для линейного неоднородного уравнения использован для исследования локальной и нелокальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения с соответствующей линейной частью.

Вырожденные уравнения рассматриваются при условии спектральной ограниченности или секториальности пары операторов при двух старших производных в уравнении. Известные для таких пар операторов результаты о существовании пар инвариантных подпространств использованы для редукции исходного вырожденного уравнения к паре уравнений, разрешенных относительно старшей производной и заданных на взаимно дополнительных подпространствах. При этом использованы новые, весьма общие условия согласования остальных операторов в уравнении с операторами при старших производных, выполняющиеся в задачах для систем уравнений динамики вязкоупругих жидкостей.

Полученные для начальных задач результаты позволили исследовать новые классы линейных обратных задач с не зависящим от времени неизвестным параметром как для разрешенных относительно старшей производной уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто, так и для вырожденных уравнений аналогичного вида.

Абстрактные результаты позволили исследовать однозначную разрешимость новых классов начально-краевых задач для классов уравнений с многочленами от эллиптического оператора по пространственным переменным, включающего в себя некоторые уравнения теории фильтрации, для систем уравнений теории вязкоупругости с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени, начальные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующего вида.

Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа посвящена развитию методов качественного исследования математических моделей, использующих конструкции дробного интегро-дифференциального исчисления. Такие модели широко применяются для описания процессов и явлений, характеризуемых степенной нелокальностью, степенной памятью, фрактальностью. В диссертации получены условия существования единственного решения начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений с дробными производными по времени, которые моделируют такие процессы.

Полученные результаты помимо значимости для теории дифференциальных уравнений вносят вклад в развитие теории операторов, поскольку значительная их часть является обобщением теории аналитических полугрупп операторов на случай уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто.

Результаты данной работы также практически значимы, поскольку могут быть использованы при решении конкретных прикладных задач. Они позволяют осуществить корректную постановку таких задач для проведения их исследования. Тем самым, диссертационная работа предоставляет полезные инструменты для использования в различных областях приложений.

Методология и методы исследования

При проведении исследований в данной диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, при рассмотрении дробных линейных дифференциальных уравнений используются методы теории преобразования Лапласа, методы теории полугрупп операторов, адаптированные к теории разрешающих семейств операторов уравнений дробного порядка. Квазилинейные уравнения изучаются с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. При исследовании вырожденных эволюционных уравнений использовано существование пар инвариантных подпространств для пары операторов при старших производных, это позволяет редуцировать исходную модифицированную задачу Шоуолтера — Сидорова к паре задач Коши на взаимно дополняющих друг друга подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. Начально-краевые задачи исследуются путем их редукции к начальным задачам для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Положения выносимые на защиту

1. Исследована однозначная разрешимость задачи Коши для линейных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, в случае линейных ограниченных операторов при дробных производных и интегралах в уравнении. Получено представление решения. Найдены условия локального и глобального существования единственного решения задачи Коши для соответствующих квазилинейных уравнений.

2. Найдены необходимые и достаточные условия существования аналитических в секторе разрешающих семейств операторов линейных однородных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, в случае линейных замкнутых операторов при дробных производных и интегралах в уравнении. Получено представление разрешающих семейств операторов. Исследована однозначная разрешимость задачи Коши для линейных неоднородных уравнений соответствующего класса, решение представлено в терминах разрешающих операторов. Найдены условия локального и глобального существования единственного решения задачи Коши для квазилинейных уравнений с соответствующей линейной частью.

3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных линейных и квазилинейных уравнений со спектрально ограниченной парой операторов при двух старших производных Герасимова — Капуто.

4. Получены условия существования единственного решения начальных за-

дач для вырожденных линейных уравнений в случае секториальности пары операторов при двух старших производных Герасимова — Капуто.

5. Абстрактные результаты использованы при изучении начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, начально-краевых задач для некоторых классов уравнений с многочленами от эллиптического оператора и с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени, для некоторых дробных по времени систем уравнений динамики и термоконвекции вязкоупругих сред.

Степень достоверности и апробация результатов

Строгость применяемых математических методов исследования, корректность использования математического аппарата в данной диссертации свидетельствуют о достоверности полученных результатов.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022, 2023, 2024 гг.; 3-я и 4-я Международные конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения», Иркутск, 2021 и 2022 гг.; VI и VII Международные конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021 и 2023 гг.; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2022; The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Москва, 2022 г.; Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа, 2022, 2023 гг.; Международная научная конференция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ и связанные темы», Курск, 2022 г.; Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 2022 г.; International Online Conference One-Parameter Semigroups of Operators, Нижний Новгород, 2023 г.; X Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, 2023 г.; Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 2023 г.; Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», Уфа, 2024 г.; Летние чтения (воркшоп) «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Самара, 2024 г.

Список публикаций автора включает 25 публикаций [123–147], из которых 6 опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или приравненных к ним, поскольку входят в издания, индексируемые международными реферативными базами данных и системами цитирования Web of Science и/или Scopus [123–128].

В статье [123] В. Е. Федорову принадлежит идея доказательства леммы 1, пример 2 получен Т. Д. Фуонгом. В работе [124] научному руководителю В. Е. Федорову принадлежит идея использования теоремы 1 для доказательства леммы 1 и сама схема доказательства. В. Е. Федоров в статье [125] предложил постановку начально-краевой задачи для системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде, скорректировал некоторые рассуждения. Научный руководитель В. Е. Федоров предложил схему доказательства полноты нового функционального пространства, используемого для изучения квазилинейного уравнения в работе [126]. Примеры из [127] были рассмотрены В. Е. Федоровым. В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Структура и краткое содержание диссертации

Диссертационная работа на 133 страницах содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений и список литературы из 147 наименований.

Введение содержит описание актуальности темы исследования, степени ее разработанности, целей и задач работы, научной новизны полученных результатов, теоретической и практической значимости работы, методологии и методов исследования, выносимых на защиту положений, степени достоверности и апробации результатов, структуры диссертации и ее краткого содержания.

В первой главе исследуются вопросы однозначной разрешимости в смысле классических решений задачи Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \tag{0.0.1}$$

для линейного уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \tag{0.0.2}$$

с ограниченными операторами A_k, $k = 1, 2, \dots, n$, в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ и функцией $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ при $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$ (отрицательным α_k соответствуют дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $-\alpha_k$). Решение представлено с помощью интегралов типа Данфорда — Тейлора.

С помощью формулы решения линейного неоднородного уравнения и с использованием метода сжимающих отображений в специально подобранных метрических пространствах получены теоремы о локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши (0.0.1) для квазилинейного уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \dots, D_t^{\gamma_r} z(t)), \tag{0.0.3}$$

$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r < \alpha$, при условии локальной липшицевости и липшицевости оператора B соответственно. Среди порядков γ_i также могут быть отрицательные.

Получены необходимые и достаточные условия корректности линейной обратной задачи для уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T],$$

с начальными условиями (0.0.1) и условием переопределения

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T,$$

где μ — функция ограниченной вариации, $u \in \mathcal{Z}$ — неизвестный параметр.

Полученные абстрактные результаты использованы при изучении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (0.0.2), где A_k, $k = 1, 2, \dots, n$ — квадратные матрицы, а также при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений вида

$$P_1(\Lambda) D_t^\alpha u(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} P_2^k(\Lambda) D_t^{\alpha_k} u(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \qquad (0.0.4)$$

с многочленами P_1, P_2^k, $k = 1, 2, \dots, n$, от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора Λ при условии, что P_1 не обращается в ноль на спектре Λ и его степень не меньше степеней P_2^k, $k = 1, 2, \dots, n$. Также рассмотрены соответствующие квазилинейные уравнения и линейные обратные задачи.

Во второй главе рассмотрены вопросы существования единственного решения задачи Коши (0.0.1) для линейного дифференциального уравнения (0.0.2) с линейными замкнутыми операторами A_k, $k = 1, 2, \dots, n$, в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. Сначала введено понятие l-разрешающего семейства операторов уравнения (0.0.2) и определен класс $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ наборов линейных замкнутых операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n)$. С использованием преобразования Лапласа показано, что однородное уравнение (0.0.2) обладает аналитическими в секторе разрешающими семействами операторов тогда и только тогда, когда $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$. Показано, что в случае $\alpha_n < m-1$ l-разрешающее семейство S_l имеет предел $\lim\limits_{t\to 0+} D^l_t S_l(t) = I$ в операторной норме при некотором $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, если и только если все операторы A_k, $k = 1, 2, \dots, n$, ограничены.

При условии $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ получена теорема об однозначной разрешимости линейного неоднородного уравнения (0.0.2) с функцией $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. Решение неоднородного уравнения выражено в терминах разрешающих семейств операторов, которые также представлены через интегралы Данфорда — Тейлора. Этот результат позволил задачу Коши (0.0.1) для квазилинейного уравнения (0.0.3) с набором операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ и нелинейным отображением B свести к интегро-дифференциальному уравнению, которое было исследовано методом сжимающих отображений. Таким образом были доказаны теоремы о локальной и глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения.

Абстрактные результаты приложены к исследованию однозначной разрешимости класса начально-краевых задач для уравнения (0.0.4) при условии, что многочлен P_1 не имеет нулей на спектре оператора λ, а его степень меньше максимальной из степеней многочленов P^k_2, $k = 1, 2, \dots, n$, а также начально-краевых задач для некоторых систем уравнений динамики вязкоупругой среды.

Полученные результаты позволили исследовать вырожденные уравнения

$$D^\alpha_t L x(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k D^{\alpha_k}_t x(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \tag{0.0.5}$$

которые рассмотрены в третьей главе диссертации. Здесь L, M_k при $k = 1, 2, \dots, n-1$ — линейные ограниченные операторы из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, M_n — линейный замкнутый оператор с областью определения в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$. При условии $(L,0)$-ограниченности оператора M_n (в этом случае мы также говорим о спектральной ограниченности пары операторов (L, M_n)) с помощью известных результатов о существовании пар инвариантных подпространств этих операторов и при дополнительном согласовании действия остальных операторов M_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, с этими подпространствами исходная начальная задача

$$\begin{gathered} x^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \\ (Px)^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = m_n, m_n + 1, \ldots, m - 1, \end{gathered} \tag{0.0.6}$$

где $m_n - 1 < \alpha_n \leq m_n$, P — специальный проектор вдоль $\ker L$ на пространстве $\mathcal{X}$, редуцирована к двум задачам Коши для разрешенных относительно старшей производной уравнений порядков α и α_n с ограниченными операторами на взаимно дополняющих друг друга подпространствах $\ker P$ и $\mathrm{im} P$, после чего применяются результаты первой главы.

Аналогичным образом исследованы локальная и глобальная разрешимость начальной задачи для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha Lz(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k D^{\alpha_k} z(t) + N(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \ldots, D^{\gamma_r} z(t)) \tag{0.0.7}$$

в четырех случаях различных дополнительных условий на нелинейный оператор N, а также получены необходимые и достаточные условия корректности линейной обратной задачи для вырожденного уравнения.

Кроме того, исследована начальная задача для линейного уравнения (0.0.5) с парой операторов (L, M) из класса $\mathcal{H}_\alpha$ (т. е. с секториальной парой операторов). В этом случае также известно, что при условии рефлексивности банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ существуют пары инвариантных подпространств операторов L и M_n, что позволило нам исходную задачу для вырожденного уравнения свести к двум задачам Коши для невырожденных (т. е. разрешенных относительно старшей производной) уравнений. При довольно общих условиях согласования действия операторов M_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, с упомянутыми подпространствами с помощью результатов второй главы об уравнениях с секториальными наборами операторов доказана теорема об однозначной разрешимости исходной модифицированной задачи Шоуолтера — Сидорова (0.0.6) для вырожденного уравнения (0.0.5).

Абстрактные результаты использованы при изучении вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (0.0.5) с квадратными матрицами L, M_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, при выполнении условий $\det L = 0$, $\det(\mu L - M_n) \not\equiv 0$; при рассмотрении классов начально-краевых задач для уравнения (0.0.4) в случае, когда многочлен P_1 обращается в ноль на спектре эллиптического оператора Λ. При этом случай, когда степень многочлена P_1 не менее степеней многочленов P_2^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, редуцируется к уравнению (0.0.5) со спектрально ограниченной парой операторов (L, M_n), в противном случае получаем уравнение (0.0.5) с секториальной парой операторов (L, M_n). Кроме того, с помощью общих результатов исследованы квазилинейные модельные системы уравнений для каждого из четырех рассмотренных классов уравнения (0.0.7) с $(L, 0)$-ограниченным оператором M_n. Наконец, начально-краевая задача для системы уравнений, моделирующей термоконвекцию в вязкоупругой среде, исследована путем редукции к начальной задаче для уравнения (0.0.5) с секториальной парой операторов (L, M_n).

1. Уравнения с ограниченными операторами при производных Герасимова — Капуто

В данной главе исследуется однозначная разрешимость задачи Коши для разрешенных относительно старшей дробной производной линейных и квазилинейных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто и ограниченными операторами при них в линейной части.

Если в случае линейного уравнения с одной производной решение можно выразить через функции Миттаг-Леффлера, то в данном случае нескольких производных это возможно (с использованием обобщенных функций Миттаг-Леффлера от нескольких переменных) только в случае коммутируемости всех операторов в уравнении. Здесь рассматривается общий случай, для него предложено представление решения в виде интегралов типа Данфорда — Тейлора.

Отметим также, что исследование квазилинейных уравнений потребовало введения в рассмотрение специальных функциональных пространств, полнота которых и некоторые свойства доказаны здесь же. При этом получены условия не только локальной, но и глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений.

1.1. Дробная производная Герасимова — Капуто

Сформулируем основные определения и свойства дробных производных, используемые в работе. Подробные доказательства приведенных здесь утверждений могут быть найдены, например, в [65, 109].

Определим функцию $g_\delta(t) := 0$ при $t \leq 0$, $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$, где $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция. Множество таких функций обладает полугрупповым свойством относительно операции свертки: $g_\beta * g_\delta = g_{\beta+\delta}$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ для функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$

определяется как

$$J_t^\alpha f(t) := (g_\alpha * f)(t) := \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds, \quad t > 0.$$

Определим $J_t^0 f(t) := f(t)$. Операторы дробного интегрирования подчиняются полугрупповому свойству относительно композиции:

$$J_t^\alpha J_t^\beta = J_t^{\alpha+\beta}, \ \alpha, \beta \geq 0.$$

Дробная производная Герасимова — Капуто [8, 66, 100] порядка $\alpha > 0$, где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, определена следующим образом:

$$^C D_t^\alpha f(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t).$$

Часто в качестве определения дробной производной Герасимова — Капуто используют эквивалентное для достаточно гладких функций равенство

$$^C D_t^\alpha f(t) := {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right), \tag{1.1.1}$$

для выполнения которого требуется меньшая гладкость от $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Z}$. Здесь $^R D_t^\alpha f(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t)$ — дробная производная Римана — Лиувилля. Мы дробную производную Герасимова — Капуто будем понимать именно в смысле (1.1.1), если не будет оговорено противное.

Отображение $^C D_t^\alpha$ является обратным к J_t^α слева:

$$^C D_t^\alpha J_t^\alpha f = f, \quad J_t^\alpha \, {}^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t).$$

Для $\alpha, \beta, t > 0$ имеем

$$J_t^\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \ {}^R D_t^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}, \ \beta > \alpha.$$

Отметим также, что $^R D_t^\alpha 1 = g_{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, в то время как $^C D_t^\alpha 1 = 0$ для любого $\alpha > 0$.

Под производной Герасимова — Капуто отрицательного порядка $-\alpha < 0$ здесь (первое слагаемое в сумме в правой части равенства) и далее понимается дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ и наоборот:

$$ {}^C D_t^{-\alpha} f := J_t^\alpha f, \quad J_t^{-\alpha} f := {}^C D_t^\alpha f, \quad \alpha > 0. $$

Это согласуется со свойствами этих операторов.

Преобразование Лапласа функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ будем обозначать через $\widehat{h}$ или $\mathrm{Lap}[h]$, если выражение для h слишком громоздкое. Используя свойства преобразования Лапласа и равенство $\widehat{g_\alpha}(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$, получим

$$ \widehat{{}^R D_t^\alpha f}(\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} {}^R D_t^{\alpha-m+k} f(0) \lambda^{m-1-k}, $$

$$ \widehat{{}^C D_t^\alpha f}(\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{\alpha-1-k}. \tag{1.1.2} $$

Поскольку далее будет использоваться в основном только дробная производная Герасимова — Капуто, то для удобства сократим ее обозначение:

$$ D_t^\alpha := {}^C D_t^\alpha. $$

Функция $f : [a, b] \to \mathcal{Z}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_i, b_i) \subset [a, b],\ i = 1, 2, \dots, p\}$, удовлетворяющего неравенству $\sum\limits_{i=1}^{p} (b_i - a_i) < \delta$, выполняется $\sum\limits_{i=1}^{p} \|f(b_i) - f(a_i)\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon$. Множество всех абсолютно непрерывных функций на $[a, b]$ со значениями в $\mathcal{Z}$ обозначим $AC([a, b]; \mathcal{Z})$.

Функция $f : (a, b) \to \mathcal{Z}$, где $a \geq -\infty$, $b \leq \infty$, называется абсолютно непрерывной на интервале (a, b), если она абсолютно непрерывна на любом отрезке, лежащем в (a, b). Аналогично определяются абсолютно непрерывные функции на полуинтервалах $[a, b)$, $(a, b]$. Соответствующие классы абсолютно непрерывных функций обозначаются как $AC((a, b); \mathcal{Z})$, $AC([a, b); \mathcal{Z})$, $AC((a, b]; \mathcal{Z})$.

Известно, что абсолютно непрерывная скалярная функция ($\mathcal{Z} = \mathbb{C}$) почти всюду дифференцируема. В общем случае это верно только для банаховых пространств $\mathcal{Z}$, обладающих свойством Радона — Никодима, в частности для рефлексивных банаховых пространств [121, следствие 1.2.7]. Но если $f \in AC([a,b];\mathcal{Z})$ имеет производную почти всюду на $[a,b]$, то (см. [121, предложение 1.2.3]) f' интегрируема по Бохнеру и

$$f(t) = f(a) + \int\limits_a^t f'(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Обратно, если g интегрируема по Бохнеру на $[a,b]$, то (см. [121, предложение 1.2.2])

$$\int\limits_a^t g(s)ds \in AC([a,b];\mathcal{Z}).$$

Кроме того, при $m \in \mathbb{N}$ $AC^m([a,b];\mathcal{Z}) := \{f \in C^{m-1}([a,b];\mathcal{Z}) : D^{m-1}f \in AC([a,b];\mathcal{Z})\}$.

1.2. Линейное однородное уравнение

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \alpha$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1,2,\dots,n$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Для $l = 0,1,\dots,m-1$ обозначим $n_l := \min\{k \in \{1,2,\dots,n\} : l \leq m_k - 1\}$. Если множество $\{k \in \{1,2,\dots,n\} : l \leq m_k - 1\}$ пусто при некоторых $l \in \{0,1,\dots,m-1\}$ (это выполнено в точности тогда, когда $\alpha_n \leq m-1$), то $n_l := n+1$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z(t) \tag{1.2.1}$$

с заданными начальными условиями

$$z^{(l)}(0) = z_l, \; l = 0,1,\dots,m-1. \tag{1.2.2}$$

Решением задачи (1.2.1), (1.2.2) будем называть функцию $z \in AC^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, $A_k D_t^{\alpha_k} z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, $k=1,\dots,n$, и выполняются равенства (1.2.1) при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и (1.2.2).

Замечание 1.2.1. Заметим, что в наших предположениях некоторые (или все) из чисел α_k могут быть неположительными. В случае $\alpha_k < 0$ имеем $A_k D_t^{\alpha_k} z(t) := A_k J_t^{-\alpha_k} z(t)$; если $\alpha_k = 0$, то $A_k D_t^{\alpha_k} z(t) := A_k z(t)$.

Сначала при фиксированном $l \in \{0,1,\dots,m-1\}$ рассмотрим задачу

$$z^{(l)}(0) = z_l,\ z^{(k)}(0) = 0,\ k = \{0,1,\dots,m-1\} \setminus \{l\}, \tag{1.2.3}$$

для уравнения (1.2.1). В предположении, что к решению z такой задачи применимо преобразование Лапласа, рассмотрим два случая:

1. $l \le m_k - 1$, тогда $\widehat{D_t^{\alpha_k} z}(\lambda) = \lambda^{\alpha_k}\widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\alpha_k - l - 1} z_l$;
2. $l > m_k - 1$, тогда $\widehat{D_t^{\alpha_k} z}(\lambda) = \lambda^{\alpha_k}\widehat{z}(\lambda)$.

Из равенств (1.2.1), (1.2.3) получим следующее:

$$\lambda^\alpha \widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\alpha-l-1} z_l = \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \widehat{z}(\lambda) - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k z_l,$$

$$\widehat{z}(\lambda) = \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k\right) z_l.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем равенство

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k\right) z_l e^{\lambda t} d\lambda,$$

где можно взять $\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = a\}$ при достаточно большом $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы получили вид решения. Проведем теперь строгие рассуждения.

Обозначим

$$A := \max\left\{\frac{1}{2n}, \|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : k = 1,2,\dots,n\right\}, \quad r_0 := (2An)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}},$$

$$\gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}, \quad \gamma := \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k,$$

$$R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1},$$

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k\right) e^{\lambda t} d\lambda, \ t > 0,$$

при $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z_l \in \mathcal{Z}$ *при некотором* $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. *Тогда функция* $z(t) = Z_l(t) z_l$ *является единственным решением задачи* (1.2.1), (1.2.3).

Доказательство. Для всех $\lambda \in \gamma$ имеем $|\lambda| \geq r_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, поэтому $|\lambda|^{\alpha_k - \alpha} \|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{1}{2n}$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{1}{2}, \quad \|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{1}{|\lambda|^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{j} \leq \frac{2}{|\lambda|^\alpha}$$

и поэтому существует обратный оператор $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $R > r_0$,

$$\Gamma_R = \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \gamma_1, \quad \Gamma_{2,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R, \arg\lambda \in (\pi, -\pi)\},$$

$$\Gamma_{3,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -R]\},$$

$$\Gamma_{4,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in [-R, -r_0]\},$$

замкнутый контур Γ_R обходится по часовой стрелке. Введем в рассмотрение также контуры

$$\Gamma_{5,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in (-R, -\infty)\},$$

$$\Gamma_{6,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -R)\},$$

тогда $\gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

При $t > 0$ определяющий оператор $Z_l(t)$ интеграл сходится, перепишем его в следующем виде:

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \lambda^{-l-1} e^{\lambda t} d\lambda I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k e^{\lambda t} d\lambda$$

$$= \frac{t^l}{l!} I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k e^{\lambda t} d\lambda.$$

При $t \in [0, 1]$, $\lambda \in \gamma$ имеем следующие неравенства:

$$\left\| R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k e^{\lambda t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le 2 \sum_{k=1}^{n_l-1} |\lambda|^{\alpha_k - \alpha - l - 1} \|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} e^{r_0} \le \frac{2Ane^{r_0}}{|\lambda|^{1+\alpha}}.$$

Здесь использован тот факт, что при $k \in \{1, 2, \dots, n_l - 1\}$ выполняется неравенство $m_k - 1 < l$, поэтому $\alpha_k \le l$. Аналогично при $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\left\| R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{2Ane^{r_0}}{|\lambda|^{2+\alpha-m}},$$

при этом $2 + \alpha - m = 1 + \alpha - (m - 1) > 1$. Следовательно,

$$\left\| \int\limits_\gamma R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le$$

$$\le 2Ane^{r_0} \left(\int\limits_{\Gamma_R} - \int\limits_{\Gamma_{2,R}} + \int\limits_{\Gamma_{5,R}} + \int\limits_{\Gamma_{6,R}} \right) \frac{ds}{|\lambda|^{2+\alpha-m}} \to 0$$

при $R \to \infty$. В силу полученных оценок интегралы сходятся равномерно по $t \in [0, 1]$, поэтому при $j = 0, 1, \dots, l$

$$D_t^j Z_l(t) := \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t} d\lambda, \; t > 0,$$

при $j = l+1, l+2, \ldots, m-1$

$$D_t^j Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l - 1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t} d\lambda, \ t > 0,$$

$D_t^j Z_l(0) = 0$ при $j \neq l$, $D_t^l Z_l(0) = I$. Таким образом, функция $Z_l(t) z_l$ удовлетворяет условиям (1.2.3).

Далее при $l = 0, 1, \ldots, m-1$ оценим интегралы, определяющие $Z_l(t)$, по контуру γ_2:

$$\left| \frac{2A}{2\pi i} \int\limits_{r_0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_l - 1} r^{\alpha_k - \alpha - l - 1} e^{-rt} dr \right| \leq \frac{An}{\pi} e^{-r_0 t} \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha + l + 1 - \alpha_n}} \leq C_1 e^{-r_0 t},$$

так как $\alpha + l + 1 - \alpha_n > 1$, $r_0 \geq 1$ по определению. На контуре γ_3 получаем аналогичные неравенства. Для контура γ_1, имеем

$$\left| \frac{2A}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n_l - 1} r_0^{\alpha_k - \alpha - l - 1} e^{r_0 e^{i\varphi} t} d\varphi \right| \leq C_2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{r_0 t \cos \varphi} d\varphi \leq 2\pi C_2 e^{r_0 t}.$$

Отсюда следует экспоненциальная ограниченность оператор-функции $Z_l(t)$, а значит, к ней можно применять преобразование Лапласа: при $\operatorname{Re} \mu > r_0$ имеем

$$\widehat{Z}_l(\mu) = \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} Z_l(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) \int\limits_0^\infty e^{(\lambda - \mu) t} dt d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) d\lambda$$

с учетом неравенства

$$\left\| \frac{1}{\mu - \lambda} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda|^2}.$$

Следовательно,

$$\widehat{Z}_l(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\Gamma_R} - \int\limits_{\Gamma_{2,R}} + \int\limits_{\Gamma_{5,R}} + \int\limits_{\Gamma_{6,R}} \right) \frac{R_\lambda}{\mu - \lambda} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) d\lambda =$$

$$= R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) =$$

$$= R_\mu \left(\mu^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k + \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k} A_k \right) \mu^{-l-1} = \mu^{-l-1} I + R_\mu \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k.$$

Выражение получено по интегральной формуле Коши для интеграла по Γ_R при $R > |\mu|$, когда точка μ лежит внутри этого контура. При этом интегралы по $\Gamma_{j,R}$ при $j = 2, 5, 6$ стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Тогда

$$\widehat{D_t^{\alpha} Z_l}(\mu) = \mu^{\alpha} \widehat{Z}_l(\mu) - \mu^{\alpha-l-1} I =$$

$$= \mu^{\alpha} R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) - \mu^{\alpha-l-1} I =$$

$$= \left(\mu^{\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k + \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k \right) R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) - \mu^{\alpha-l-1} I =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k \widehat{Z}_l(\mu) - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k = \mathrm{Lap} \left[\sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} Z_l \right] (\mu).$$

Поэтому при $t > 0$ $D_t^{\alpha} Z_l(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} Z_l(t)$.

В то же время при таком k_0, что $m_{k_0} - 1 < l$

$$\widehat{D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l}(\mu) = \mu^{\alpha_{k_0}} R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) =$$

$$= \mu^{\alpha_{k_0} - l - 1} I + R_\mu \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k - l - 1 + \alpha_{k_0}} A_k,$$

$$D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mu^{\alpha_{k_0} - l - 1} e^{\mu t} d\mu I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k - l - 1 + \alpha_{k_0}} A_k e^{\mu t} d\mu.$$

Поэтому при $\alpha_{k_0} < l$ $\lim\limits_{t \to 0+} D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = 0$, а в случае $\alpha_{k_0} = l$ $\lim\limits_{t \to 0+} D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = I$. Заметим, что в таком случае $k_0 = n_l - 1$.

Пусть теперь $m_{k_0} - 1 \geq l$, тогда

$$\widehat{D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l}(\mu) = \mu^{\alpha_{k_0}} R_\mu \left(\mu^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) - \mu^{\alpha_{k_0} - l - 1} I =$$

$$= R_\mu \sum_{k=1}^{n_l - 1} \mu^{\alpha_k - l - 1 + \alpha_{k_0}} A_k,$$

$$D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu \sum_{k=1}^{n_l - 1} \mu^{\alpha_k - l - 1 + \alpha_{k_0}} A_k e^{\mu t} d\mu.$$

Имеем $\alpha_k - \alpha - l - 1 + \alpha_{k_0} < -1$, так как $\alpha_{k_0} - \alpha < 0$ и $\alpha_k - l \leq 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n_l - 1$, поэтому $\lim\limits_{t \to 0+} D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = 0$. Аналогично получим

$$D_t^{\alpha} Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu \sum_{k=1}^{n_l - 1} \mu^{\alpha_k - l - 1 + \alpha} A_k e^{\mu t} d\mu.$$

Это выражение стремится к нулю при $t \to 0+$, если $\alpha_{n_l - 1} < l$. Если же $\alpha_{n_l - 1} = l$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{\alpha - 1} R_\mu A_{n_l - 1} e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k - \alpha} A_k \right)^r \mu^{-1} A_{n_l - 1} e^{\mu t} d\mu \to A_{n_l - 1}$$

при $t \to 0+$, поэтому $\lim\limits_{t \to 0+} D_t^{\alpha} Z_l(t) = A_{n_l - 1}$.

Таким образом, в силу ограниченности операторов A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $Z_l(\cdot) z_l$ удовлетворяет уравнению (1.2.1), в том числе при $t = 0$. Тем самым $Z_l(\cdot) z_l$ — решение задачи (1.2.1), (1.2.3).

Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — два решения задачи (1.2.1), (1.2.3) на $\overline{\mathbb{R}}_+$, тогда $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ — решение задачи Коши $y^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \ldots, m - 1$, для уравнения (1.2.1) на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Поэтому для $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $t \in [0, T]$

$$\| D_t^k J_t^{m-\alpha} y(t) \|_{\mathcal{Z}} = \| J_t^{m-\alpha} D_t^k y(t) \|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{t^{m-\alpha} \| y \|_{C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \to 0$$

при $t \to 0+$, а значит, $D_t^k J_t^{m-\alpha} y(0) = 0$. По определению решения $y \in AC^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, поэтому действием оператора J_t^α на обе части уравнения получим

$$J_t^\alpha D_t^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D_t^k J_t^{m-\alpha} y(0) t^{\alpha+k-m}}{\Gamma(\alpha+k-m+1)} = y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^\alpha D_t^{m_k} J_t^{m_k-\alpha_k} y(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{m_k} J_t^{\alpha+m_k-\alpha_k} y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} y(t).$$

Тогда $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} y(t). \tag{1.2.4}$$

Имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} y_1 - \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} y_2 \right\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq T^{\alpha-\alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{\Gamma(\alpha-\alpha_k+1)} \|y_1 - y_2\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} \leq q \|y_1 - y_2\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}$$

при $q \in (0,1)$,

$$T = \min\left\{ 1, q^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{\Gamma(\alpha-\alpha_k+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha_n-\alpha}} \right\}.$$

Поэтому единственным решением уравнения (1.2.4) в пространстве $C([0,T];\mathcal{Z})$ является тождественно нулевая функция x. В таком случае

$$\|J_t^{\alpha-\alpha_n} A y_1 - J_t^{\alpha-\alpha_n} A y_2\|_{C\left(\left[0, 2^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}} T\right];\mathcal{Z}\right)} \leq$$

$$\leq (2T^{\alpha-\alpha_n} - T^{\alpha-\alpha_n}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{\Gamma(\alpha-\alpha_k+1)} \|y_1 - y_2\|_{C\left(\left[0, 2^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}} T\right];\mathcal{Z}\right)} \leq$$

$$\leq q \|y_1 - y_2\|_{C\left(\left[0, 2^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}} T\right];\mathcal{Z}\right)},$$

поэтому уравнение (1.2.4) имеет только нулевое решение в $C\left(\left[0, 2^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}} T\right];\mathcal{Z}\right)$. Продолжая эти рассуждения, мы получим единственность нулевого решения на любом отрезке $[0, 2^{\frac{k}{\alpha-\alpha_n}} T]$, $k \in \mathbb{N}$, а так как $2^{\frac{k}{\alpha-\alpha_n}} > 1$, то и на всей полупрямой.

Таким образом, $z_1(t) = z_2(t)$ для всех $t \geq 0$. $\square$

Из леммы 1.2.1 и линейности уравнения (1.2.1) сразу получим следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда функция* $z(t) = \sum\limits_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l$ *является единственным решением задачи* (1.2.1), (1.2.2).

1.3. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{1.3.1}$$

Обозначим

$$Y_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \lambda^\beta R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Лемма 1.3.1. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. *Тогда функция*

$$z_f(t) = \int\limits_0^t Y_0(t-s) f(s) ds \tag{1.3.2}$$

является единственным решением задачи

$$z^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.3.3}$$

для уравнения (1.3.1).

Доказательство. Имеем при $\alpha > 1$, $l = 0, 1, \ldots, m-2$, $\lambda \in \gamma$

$$\left\| \lambda^l R_\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{2}{|\lambda|^{\alpha - l}},$$

при этом $\alpha - l > 1$, поэтому для всех $t \geq 0$

$$\| D_t^l Y_0(t) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_1 \int\limits_\gamma \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda} ds}{|\lambda|^{\alpha - l}} \leq C_2 e^{r_0 t} t^{\alpha - l - 1},$$

$$D_t^l Y_0(0)=0,\quad z_f^{(p)}(t)=\int\limits_0^t D_t^p Y_0(t-s)f(s)ds,\quad p=0,1,\dots,m-1.\quad (1.3.4)$$

При $l=m-1$ имеем

$$\|D_t^{m-1}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C\int\limits_\Gamma \frac{e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}ds}{|\lambda|^{\alpha-m+1}},\quad \int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}ds}{|\lambda|^{\alpha-m+1}}\le 2\pi r_0^{m-1-\alpha}e^{r_0 t},$$

$$\int\limits_{\gamma_j}\frac{e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}}{|\lambda|^{\alpha-m+1}}ds\le\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{e^{-rt}dr}{r^{\alpha-m+1}}\le t^{\alpha-m}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\rho}d\rho}{\rho^{\alpha-m+1}}\le\Gamma(m-\alpha)t^{\alpha-m},\quad j=2,3,$$

поэтому для всех $t>0$

$$\|D_t^{m-1}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C(1+t^{\alpha-m})e^{r_0 t},$$

в частности, $\|D_t^{m-1}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}=O(t^{\alpha-m})$ при $t\to 0+$. Таким образом,

$$\|z_f^{(m-1)}(t)\|_{\mathcal{Z}}\le\int\limits_0^t C_1(t-s)^{\alpha-m}\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}ds\le\frac{C_1\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}}{\alpha-m+1}t^{\alpha-m+1}\to 0$$

при $t\to 0+$ и условия Коши (1.3.3) для функции z_f вида (1.3.2) выполняются.

Имеем $D^kJ_t^{m-\alpha}Y_0(t)=Y_{\alpha-m+k}(t)$, $k=0,1,\dots,m-1$,

$$\left\|\lambda^{\alpha-m+k}R_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le\frac{2}{|\lambda|^{m-k}},\quad \|D^kJ_t^{m-\alpha}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le Ct^{m-k-1},$$

поэтому $D^kJ_t^{m-\alpha}Y_0(0)=0$, $k=0,1,\dots,m-2$. Заметим также, что

$$Y_{\alpha-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\lambda^{-1}\left(\lambda^\alpha-\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha-k}A_k+\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_k\right)R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\lambda^{-1}e^{\lambda t}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\lambda^{-1}\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_kR_\lambda e^{\lambda t}d\lambda\to I$$

при $t\to 0+$, так как

$$\left\|\lambda^{-1}\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_kR_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le\frac{C}{|\lambda|^{\alpha-\alpha_n+1}},\quad \alpha-\alpha_n+1>1,$$

аналогично $Y_{\alpha_k-1}(0)=0$, поскольку $\|\lambda^{\alpha_k-1}R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq C|\lambda|^{\alpha_k-\alpha-1}$;

$$Y_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left(\lambda^\alpha-\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha-k}A_k+\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_k\right)R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{\lambda t}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_kR_\lambda e^{\lambda t}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{k=1}^n\lambda^{\alpha_k}A_kR_\lambda e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\sum_{k=1}^n A_kY_{\alpha_k}(t),$$

поэтому $\|Y_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq Ct^{\alpha-\alpha_n-1}$ при всех $t>0$. Следовательно, при $t>0$

$$D_t^\alpha z_f(t)=D_t^mJ_t^{m-\alpha}z_f(t)=D_t^m\int\limits_0^t J_t^{m-\alpha}Y_0(t-s)f(s)ds=$$

$$=D_t^1\int\limits_0^t D^{m-1}J_t^{m-\alpha}Y_0(t-s)f(s)ds=Y_{\alpha-1}(0)f(t)+\int\limits_0^t Y_\alpha(t-s)f(s)ds=$$

$$=f(t)+\sum_{k=1}^n A_k\int\limits_0^t Y_{\alpha_k}(t-s)f(s)ds=\sum_{k=1}^n A_kD_t^{\alpha_k}z_f(t)+f(t).$$

При $k=1,2,\ldots,n$

$$\|Y_{\alpha_k}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_\gamma\frac{e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}ds}{|\lambda|^{\alpha-\alpha_n}}\leq Ce^{r_0t}t^{\alpha-\alpha_n-1}.$$

В силу (1.3.4)

$$D_t^{\alpha_k}z_f(t)=\int\limits_0^t Y_{\alpha_k}(t-s)f(s)ds,$$

поэтому

$$\|D_t^{\alpha_k}z_f(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq\frac{C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}}{\alpha-\alpha_n}t^{\alpha-\alpha_n}\to 0$$

при $t\to 0+$. В силу ограниченности операторов A_k, $k=1,2,\ldots,n$, равенство (1.3.1) выполняется и при $t=0$ в предельном смысле.

Доказательство единственности такое же, как у леммы 1.2.1. $\square$

Теперь можно сформулировать общий результат.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Y_0(t-s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (1.2.2), (1.3.1).

Замечание 1.3.1. Заметим, что при $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$Z_l(t) = D_t^{\alpha-l-1} Y_0(t) - \sum_{k=n_l}^{n} A_k D_t^{\alpha_k-l-1} Y_0(t).$$

Действительно, из (1.1.2) следует, что при $\operatorname{Re}\mu > r_0$

$$\mathrm{Lap}\left[D_t^{\alpha-l-1} Y_0(t) - \sum_{k=n_l}^{n} A_k D_t^{\alpha_k-l-1} Y_0(t)\right](\mu) =$$

$$= R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1} - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1} A_k\right) = \widehat{Z}_l(\mu).$$

Замечание 1.3.2. Из доказательств видно, что для решения z задачи (1.2.2), (1.3.1) $D_t^{\alpha_k} z \in C([0,T];\mathcal{Z})$ для всех α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, включая лежащие на промежутке $(m-1, \alpha)$.

1.4. Локальная разрешимость квазилинейного уравнения

В этом разделе будем рассматривать дробные интегралы и дробные производные в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\beta f(t) := \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s) ds, \quad {}^R D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > t_0,$$

$$D_t^\alpha f(t) := {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) g_{k+1}(t-t_0)\right), \quad t > t_0,$$

при $\beta > 0$, $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\kappa_i - 1 < \gamma_i \leq \kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, r$; U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B : U \to \mathcal{Z}$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Функцию $z \in AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ назовем решением задачи Коши

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.4.1}$$

для квазилинейного дробного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \tag{1.4.2}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$, если $D_t^\alpha z, D_t^{\alpha_k} z, D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, r$, выполнены включение $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ и равенство (1.4.2) для всех $t \in [t_0, t_1]$, а также начальные условия (1.4.1).

Замечание 1.4.1. Как и α_k, некоторые (или все) из чисел γ_i могут быть неположительными. Тогда при $\gamma_i < 0$ имеем $D_t^{\gamma_i} z(t) := J_t^{-\gamma_i} z(t)$; если $\gamma_i = 0$, то $D_t^{\gamma_i} z(t) := z(t)$.

Используя начальные данные $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ задачи Коши, определим многочлен

$$\tilde{z}(t) := z_0 + (t - t_0) z_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} z_2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}$$

и векторы $\tilde{z}_i := D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Заметим, что $\tilde{z}_i = 0$, если $\gamma_i \notin \{0, 1, \ldots, m-1\}$. При $\gamma_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ имеем $\tilde{z}_i = z_{\gamma_i}$. Таким образом, аргумент нелинейного оператора в уравнении (1.4.2) в момент времени $t = t_0$ имеет вид $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r)$.

Далее понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.4.1. [108]. *Пусть $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\exists C > 0 \quad \forall h \in C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \quad \|D_t^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|h\|_{C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}.$$

Лемма 1.4.2. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U, \mathcal{Z})$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r) \in U$. *Тогда функция* z *является решением задачи* (1.4.1), (1.4.2) *на отрезке* $[t_0, t_1]$, *если и только если* $D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *и для всех* $t \in [t_0, t_1]$ *выполняются включение* $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ *и равенство*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t - t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Y_0(t - s) B(s, D_t^{\gamma_1} z(s), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(s)) ds. \qquad (1.4.3)$$

Доказательство. Если z — решение задачи (1.4.1), (1.4.2) на отрезке $[t_0, t_1]$, то для всех $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ и отображение

$$t \to B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \qquad (1.4.4)$$

действует непрерывно из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$. Как и при доказательстве теоремы 1.3.1, можно показать, что решение удовлетворяет уравнению (1.4.3).

Пусть $D_t^{\gamma_i} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется включение $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ и справедливо равенство (1.4.3). Тогда (1.4.4) принадлежит классу $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. Дословно повторяя доказательство теоремы 1.2.1 и леммы 1.3.1, мы получим требуемое. $\square$

Обозначим $i_* := \min\{i \in \{1, 2, \ldots, r\} : \gamma_i > m - 1\}$, если множество $\{i \in \{1, 2, \ldots, r\} : \gamma_i > m - 1\}$ не пусто, иначе $i_* := r + 1$. Для $t_1 > t_0$ определим пространство $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), i = i_*, i_* + 1, \ldots, r\}$ и снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \sum_{i=i_*}^{r} \|D_t^{\gamma_i} z\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}.$$

Лемма 1.4.3. $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ *— банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{z_l\}$ — фундаментальная последовательность в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, тогда существуют предел $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$

последовательности $\{z_l\}$ в пространстве $C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ и пределы y_i последовательностей $\{D_t^{\gamma_i}z_l\}$ в $C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $i=i_*,i_*+1,\dots,r$. Следовательно,

$$J_t^{\gamma_i}y_i(t)=\lim_{l\to\infty}J_t^{\gamma_i}D_t^{\gamma_i}z_l(t)=\lim_{l\to\infty}\left(z_l(t)-\sum_{j=0}^{m-1}z_l^{(j)}(t_0)\frac{(t-t_0)^j}{j!}\right)=$$

$$=z(t)-\sum_{j=0}^{m-1}z^{(j)}(t_0)\frac{(t-t_0)^j}{j!},\quad y_i=D_t^{\gamma_i}z\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z}).$$

Таким образом, $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ — банахово пространство. $\square$

Обозначим $\bar{x}:=(x_1,x_2,\dots,x_r)\in\mathcal{Z}^r$, $S_\delta(\bar{x}):=\{\bar{y}\in\mathcal{Z}^r:\|y_i-x_i\|_{\mathcal{Z}}\le\delta,$ $i=1,2,\dots,r\}$. Отображение $B:U\to\mathcal{Z}$ назовем локально липшицевым по $\bar{x}$, если для всех $(t,\bar{x})\in U$ существуют $\delta>0$, $q>0$, такие, что $[t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\bar{x})\subset U$ и для всех $(s,\bar{y}),(s,\bar{v})\in[t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\bar{x})$ выполняется неравенство

$$\|B(s,\bar{y})-B(s,\bar{v})\|_{\mathcal{Z}}\le q\sum_{i=1}^{r}\|y_i-v_i\|_{\mathcal{Z}}\,.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r<\alpha$, $A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^r$, *оператор* $B\in C(U,\mathcal{Z})$ *локально липшицев по* $\bar{x}$, $(t_0,\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\dots,\tilde{z}_r)\in U$. *Тогда для некоторого* $t_1>t_0$ *задача* (1.4.1), (1.4.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Возьмем $\tau>0$ и $\delta>0$, такие, что $[t_0,t_0+\tau]\times S_\delta(\bar{\tilde{z}})\subset U$, где $\bar{\tilde{z}}=(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\dots,\widetilde{z}_r)$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество таких функций $z\in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, что $\|z^{(l)}(t)-z_l\|_{\mathcal{Z}}\le\delta$, $\|D_t^{\gamma_i}z(t)-\tilde{z}_i\|_{\mathcal{Z}}\le\delta$ для $t_0\le t\le t_0+\tau$, $l=0,1,\dots,m-1$, $i=1,2,\dots,r$. Определим на множестве $\mathcal{S}$ метрику $d(x,y):=\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}$, тогда $\mathcal{S}$ является полным метрическим пространством в силу лемм 1.4.1 и 1.4.3. Заметим что $\widetilde{z}\in\mathcal{S}$ для достаточно малого $\tau>0$.

Для $z \in \mathcal{S}$ определим оператор

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0)z_l + \int_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B(s, D_t^{\gamma_1}z(s), D_t^{\gamma_2}z(s), \dots, D_t^{\gamma_r}z(s))ds,$$

$t \in [t_0, t_0+\tau]$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.2.1 и леммы 1.3.1, получим, что $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(k)}(t_0) = z_k$ для $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Далее имеем для $\gamma_i < l$

$$D_t^{\gamma_i} Z_l(0) := \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{\alpha-l-1+\gamma_i} R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-\alpha} A_k \right) e^{\lambda t} d\lambda = 0,$$

поскольку

$$-l-1+\gamma_i < -1, \quad \left\| \lambda^\alpha R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-\alpha} A_k \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C.$$

Для $\gamma_i \ge l$

$$\widehat{D_t^{\gamma_i} Z_l}(\lambda) = \lambda^{\alpha-l-1+\gamma_i} R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-\alpha} A_k \right) - \lambda^{\gamma_i-1-l} = \lambda^{-l-1+\gamma_i} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k} A_k,$$

$$D_t^{\gamma_i} Z_l(0) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-l-1+\gamma_i} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k} A_k e^{\lambda t} d\lambda = 0,$$

так как для $k \le n_l - 1$ имеем $l > m_k - 1$, следовательно, $l \ge \alpha_k$, $-l-1+\gamma_i+\alpha_k-\alpha < -1$.

Пусть $\kappa_i - 1 < \gamma_i \le \kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Для $\gamma_i > 0$ имеем

$$J_t^{\kappa_i-\gamma_i} Y_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{\gamma_i-\kappa_i} R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda,$$

для $l = 0, 1, \dots, \kappa_i - 1$

$$D_t^l J_t^{\kappa_i-\gamma_i} Y_0(0) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{\gamma_i-\kappa_i+l} R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda = 0, \tag{1.4.5}$$

так как $-\alpha + \gamma_i - \kappa_i + l \leq -\alpha + \gamma_i - 1 < -1$. Отсюда следует также, что $\|D_t^{\kappa_i} J_t^{\kappa_i - \gamma_i} Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\alpha-\gamma_i-1}$ для некоторого $C > 0$ и всех $t \in [0,1]$. При $\gamma_i \leq 0$ полученные соотношения также справедливы.

Обозначим $B^z(s) := B(s, D_t^{\gamma_1} z(s), D_t^{\gamma_2} z(s), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(s))$, тогда в силу (1.4.5) и равенств

$$D_t^l|_{t=t_0} \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B^z(s) ds = 0, \ \ l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

которые доказаны в лемме 1.3.1, мы имеем

$$D_t^{\gamma_i} \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B^z(s) ds = D_t^{\kappa_i} J_t^{\kappa_i - \gamma_i} \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B^z(s) ds =$$

$$= D_t^{\kappa_i} \int\limits_{t_0}^{t} J_t^{\kappa_i - \gamma_i} Y_0(t-s) B^z(s) ds = \int\limits_{t_0}^{t} D_t^{\kappa_i} J_t^{\kappa_i - \gamma_i} Y_0(t-s) B^z(s) ds,$$

$$\left\| \lim_{t \to t_0+} D_t^{\gamma_i} \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B^z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \lim_{t \to t_0+} C_1 (t-t_0)^{\alpha - \gamma_i} \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} = 0.$$

Отметим при этом, что в силу локальной липшицевости оператора B

$$\max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^z(s) - B^{\tilde{z}}(s)\|_{\mathcal{Z}} + \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^{\tilde{z}}(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq q \sum_{i=0}^{r} \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|D_t^{\gamma_i} z(s) - D_t^{\gamma_i} \tilde{z}(s)\|_{\mathcal{Z}} + \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^{\tilde{z}}(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq q\delta(r+1) + \max_{s \in [t_0, t_0+\tau]} \|B^{\tilde{z}}(s)\|_{\mathcal{Z}} = C.$$

Таким образом, $G(z) \in C^{m-1, \{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и $D_t^{\gamma_i} G(z)(t_0) = \tilde{z}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$. Поэтому, $G(z) \in \mathcal{S}$ для достаточно малого $\tau > 0$, не зависящего от $z \in \mathcal{S}$.

В силу (1.3.4) $D_t^l Y_0(0) = 0$ при $l = 0, 1, \ldots, m-2$, $\|D_t^l Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\alpha-l-1}$. При достаточно малом $\tau > 0$ и $x, y \in \mathcal{S}$

$$\|[G(x)]^{(l)}(t) - [G(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} D_t^l Y_0(t-s)[B^x(s) - B^y(s)] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\le C_l(t-t_0)^{\alpha-l}\sum_{i=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D_t^{\gamma_i}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}}\le C_l\tau^{\alpha}d(x,y)\le$$

$$\le\frac{d(x,y)}{2(r-i_*+1+m)},$$

$$\|D^{\gamma_i}G(x)(t)-D^{\gamma_i}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}}=\left\|\int_{t_0}^{t}D_t^{\gamma_i}Y_0(t-s)[B^x(s)-B^y(s)]ds\right\|_{\mathcal{Z}}\le$$

$$\le C_{\gamma_i}(t-t_0)^{\alpha-\gamma_i}\sum_{j=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D_t^{\gamma_j}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}}\le\frac{d(x,y)}{2(r-i_*+1+m)},$$

где $r-i_*+1$ — количество γ_i, которые больше чем $m-1$. Таким образом, $d(G(y),G(v))\le d(y,v)/2$ и отображение G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}$. Это единственное решение уравнения (1.4.3) в $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, поэтому в силу леммы 1.4.2 это единственное решение задачи (1.4.1), (1.4.2) на выбранном отрезке $[t_0,t_0+\tau]$. □

1.5. Существование глобального решения квазилинейного уравнения

Докажем теперь существование единственного глобального решения, т. е. решения на произвольном заданном отрезке $[t_0,T]$.

Пусть $t_0,T\in\mathbb{R}$, $t_0<T$, $r\in\mathbb{N}$. Отображение $B:[t_0,T]\times\mathcal{Z}^r\to\mathcal{Z}$ называется липшицевым по $\bar{x}\in\mathcal{Z}^r$, если существует такое $q>0$, что для любых $(t,\bar{x}),(t,\bar{y})\in[t_0,T]\times\mathcal{Z}^r$ выполняется неравенство

$$\|B(t,\bar{x})-B(t,\bar{y})\|_{\mathcal{Z}}\le q\sum_{i=1}^{r}\|x_i-y_i\|_{\mathcal{Z}}\,.$$

Теорема 1.5.1. *Пусть* $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $\gamma_1<\dots<\gamma_r<\alpha$, $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_l\in\mathcal{Z}$, $l=0,1,\dots,m-1$, *отображение* $B\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^r;\mathcal{Z})$ *липшицево по* $\bar{x}$. *Тогда задача* (1.4.1), (1.4.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,T]$.

Доказательство. При фиксированных $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, зададим в банаховом пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ отображение

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0)z_l + \int_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B(s, D_t^{\gamma_1}z(s), D_t^{\gamma_2}z(s), \dots, D_t^{\gamma_r}z(s))ds$$

при $t \in [t_0, T]$. Отображение $t \to B(t, D_t^{\gamma_1}z(t), D_t^{\gamma_2}z(t), \dots, D_t^{\gamma_r}z(t))$ лежит в $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, поэтому по теореме 1.3.1 $G(z) \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(k)}(t_0) = z_k$ для $k = 0, \dots, m-1$. Как при доказательстве теоремы 1.4.1, нетрудно показать, что $D_t^{\gamma_i}G(z) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, поэтому $G(z) \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

Обозначим через G^j j-ю степень оператора G, $j \in \mathbb{N}$. Для определенности считаем, что $T - t_0 \geq 1$, в случае же $T - t_0 < 1$ дальнейшие рассуждения останутся справедливыми после замены $T - t_0$ на 1. Для $t \in [t_0, T]$, $j \in \mathbb{N}$, $x, y \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ по индукции докажем неравенство

$$\|G^j(x) - G^j(y)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq \frac{c^j(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+j-1}}{(j-1)!}\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \quad (1.5.1)$$

при некотором $c > 0$. Здесь $\alpha_0 := \max\{m-1, \gamma_r\} < \alpha$.

Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, для $j = 1$, $l = 0, 1, \dots, m-1$ получим

$$\|[G(x)]^{(l)}(t) - [G(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-l-1}\|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}}ds \leq$$

$$\leq C_2 q\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0},$$

$$\|D_t^{\gamma_i}G(x)(t) - D_t^{\gamma_i}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\gamma_i-1}\|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}}ds \leq$$

$$\leq C_2 q\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0}, \quad i = i_*, i_*+1, \dots, r.$$

Поэтому

$$\|G(x) - G(y)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq C_2 Nq\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0},$$

где $N = m + r - i_* + 1$ — количество слагаемых в определении нормы в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t]; \mathcal{Z})$. Шаг индукции для неравенства (1.5.1) доказывается аналогичным образом.

Из (1.5.1) следует, что при $j \in \mathbb{N}$

$$\|G^j(x) - G^j(y)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})} \leq \frac{c^j(T-t_0)^{\alpha-\alpha_0+j-1}}{(j-1)!}\|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})}.$$

Поэтому если j достаточно велико, то G^j является сжимающим отображением в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, а значит, это отображение по теореме о неподвижной точке имеет единственную неподвижную точку в этом пространстве, которая при этом является единственной неподвижной точкой в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ отображения G. Она и является единственным решением задачи (1.4.1), (1.4.2) на $[t_0, T]$ в силу леммы 1.4.2. □

1.6. Линейная обратная задача

Рассмотрим обратную задачу для уравнения с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \tag{1.6.1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $m - 1 < \alpha \leq m$, $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Z}$, $T > 0$, с начальными условиями Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l \in \mathcal{Z}, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.6.2}$$

и с условием переопределения

$$\int_0^T z(t)d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \tag{1.6.3}$$

где μ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$. Неизвестными в обратной задаче (1.6.1)–(1.6.3) являются коэффициент $u \in \mathcal{Z}$ и функция $z : [0, T] \to \mathcal{Z}$.

Решением обратной задачи (1.6.1)–(1.6.3) называется пара $(z(t), u)$, где $u \in \mathcal{Z}$, а функция z является решением задачи Коши (1.6.2) для уравнения (1.6.1) с этим u, и удовлетворяет условию переопределения (1.6.3). Часто для краткости решением обратной задачи будем называть только соответствующее $u \in \mathcal{Z}$.

Задачу (1.6.1)–(1.6.3) назовем корректной, если для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $(z(t), u)$, для которого

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leq C \left(\sum_{l=0}^{m-1} \|z_l\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} \right),$$

где константа C не зависит от $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$.

Введем обозначения

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T \int_0^t Y_0(t-s)\varphi(s) ds d\mu(t).$$

Теорема 1.6.1. *Пусть $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\varphi \in C([0,T]; \mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача* (1.6.1)–(1.6.3) *корректна в том и только в том случае, когда $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.*

Доказательство. По теореме 1.3.1 решение задачи Коши (1.6.1), (1.6.2) существует для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{Z}$ и имеет вид

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Y_0(t-s)\varphi(s) u ds. \tag{1.6.4}$$

Подставив (1.6.4) в (1.6.3), получим равенство

$$\int_0^T \left(\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Y_0(t-s)\varphi(s) ds u \right) d\mu(t) = z_T,$$

которое имеет вид

$$\chi u = \psi, \tag{1.6.5}$$

т. е. задача (1.6.1)—(1.6.3) эквивалентна уравнению (1.6.5). Поэтому задача однозначно разрешима при любом $\psi \in \mathcal{Z}$ тогда и только тогда, когда существует обратный оператор $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Из вида решения $u = \chi^{-1}\psi$ следует корректность обратной задачи в случае $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. □

1.7. Приложения

1.7.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $m, n, q \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leq m$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.7.1}$$

для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.7.2}$$

где $z(t) = (z^1(t), z^2(t), \ldots, z^q(t))^T$ и $f(t) = (f^1(t), f^2(t), \ldots, f^q(t))^T$ — неизвестная и заданная вектор-функции соответственно со значениями в $\mathbb{C}^q$ (символ ^{T} означает транспонирование), $z_l = (z_l^1, z_l^2, \ldots, z_l^q)^T \in \mathbb{C}^q$, $l = 0, \ldots, m-1$, A_k — $(q \times q)$-матрицы с элементами из $\mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Возьмем $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^q$, тогда согласно теореме 1.3.1 для любых $z_l \in \mathbb{C}^q$, $l = 0, \ldots, m-1$, $f \in C([0,T]; \mathbb{C}^q)$ существует единственное решение задачи (1.7.1), (1.7.2).

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $B^j \in C^1([0,T] \times \mathbb{C}^{qr}; \mathbb{C})$, $j = 1, 2, \ldots, q$, $B = (B^1, B^2, \ldots, B^q)^T$. Тогда по теореме 1.4.1 при некотором $t_1 \in (0, T]$ существует единственное решение на отрезке $[0, t_1]$ задачи Коши (1.7.1) для квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)). \tag{1.7.3}$$

Если же все частные производные, кроме, может быть, производных по t, от всех B^j, $j = 1, 2, \ldots, q$, ограничены, то по теореме 1.5.1 существует единственное решение задачи (1.7.1), (1.7.3) на $[0, T]$.

1.7.2. Один класс линейных начально-краевых задач

Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_1} a_p\lambda^p$, $P_2^k(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_2^k} b_p^k\lambda^p$, $a_p, b_p^k \in \mathbb{C}$, $a_{\nu_1} \neq 0$, $b_{\nu_2^k}^k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\nu_0 := \max\{\nu_2^k : k = 1, 2, \ldots, n\} \leq \nu_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) = \sum_{|q|\leq 2\rho} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_j u)(\xi) = \sum_{|q|\leq r_j} b_{jq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \ \ b_{jq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \cdots + q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_\rho$ регулярно эллиптичен [45]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2\rho}_{\{B_j\}}(\Omega) := \{v \in H^{2\rho}(\Omega) : B_j v(\xi) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$$

действует согласно равенству $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [45]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_s : s \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_s : s \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi, 0) = u_l(\xi),\ \ l = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{1.7.4}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi, t) = 0,\ \ p = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1,\ \ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{1.7.5}$$

$$P_1(\Lambda)D_t^\alpha u(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi, t) + h(\xi, t),\ \ (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{1.7.6}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Возьмем

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0,\ p = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1,\ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L = P_1(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k = P_2^k(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $P_1(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$, тогда задача (1.7.4)–(1.7.6) представима в виде задачи (1.2.2), (1.3.1), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_k = L^{-1}M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $z_l = u_l(\cdot)$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $f(t) = L^{-1}h(\cdot, t)$. По теореме 1.3.1 в случае $\nu_0 \leq \nu_1$ существует единственное решение задачи (1.7.4)–(1.7.6) при любых $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, и $h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ (в таком случае $L^{-1}h \in C([0,T];\mathcal{X})$).

Пример. Возьмем $P_1(\lambda) \equiv \lambda^2$, $P_2^1(\lambda) = b$, $P_2^2(\lambda) = c_0 + c_1\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $\rho = 1$, $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $h \equiv 0$. Тогда $m = 3$ и задача (1.7.4)–(1.7.6) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} D_t^{5/2} u(\xi,t) = bD_t^{1/4}u(\xi,t) + \left(c_0 + c_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right) D_t^{4/3}u(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in (0,\pi) \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi,t) = 0, \ \ t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u(\xi,0) = u_0(\xi), \ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,0) = u_1(\xi), \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,0) = u_2(\xi), \ \ \xi \in (0,\pi).$$

1.7.3. Квазилинейное уравнение с многочленами

Пусть $H : \Omega \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi,0) = u_l(\xi), \ l = 0, 1, \dots, m-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{1.7.7}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi,t) = 0, \ \ p = 0, 1, \dots, \nu_1 - 1, \ \ j = 1, 2, \dots, \rho, \ \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{1.7.8}$$

$$\begin{gathered} P_1(\Lambda)D_t^{\alpha}u(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t) + \\ +H(\xi, D_t^{\gamma_1}u(\xi,t), D_t^{\gamma_2}u(\xi,t), \dots, D_t^{\gamma_r}u(\xi,t)), \ \ (\xi,t) \in \Omega \times [0,T]. \end{gathered} \tag{1.7.9}$$

Положим $\rho_0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} := \{v \in H^{2\rho\nu_1+\rho_0}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0, \ j = 1, 2, \dots, \rho, \ p = 0, 1, \dots, \nu_1 - 1, \ \xi \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} := H^{\rho_0}(\Omega)$; $L := P_1(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k := P_2^k(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Если $P_1(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то задача (1.7.7)–(1.7.9) представима в виде (1.4.1), (1.4.2), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_k = L^{-1}M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z_l = u_l(\cdot)$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $B(y_1, y_2, \ldots, y_r) = L^{-1}H(\cdot, y_1, y_2, \ldots, y_r)$.

Сформулируем используемую далее теорему.

Теорема 1.7.1. [80]. *Пусть* Ω *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$ *с гладкой границей,* $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $j_0 > d/2$, *отображение* F *действует по правилу* $F(v_1, v_2, \ldots, v_d) = g(\cdot, v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_d(\cdot))$. *Тогда* $F \in C^\infty((H_0^{j_0}(\Omega))^d; H_0^{j_0}(\Omega))$.

Теорема 1.7.2. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\nu_0 \leq \nu_1$, $B_1 = I$, *спектр* $\sigma(A_1)$ *не содержит начала координат и нулей многочлена* P_1, $2\rho\nu_1 + \rho_0 > d/2$, $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $H \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R})$. *Тогда для некоторого* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (1.7.7)–(1.7.9). *Если все частные производные* H *по* x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *ограничены, то единственное решение задачи* (1.7.7)–(1.7.9) *существует на всем отрезке* $[t_0, T]$.

Доказательство. В этой задаче областью определения нелинейного оператора является $Z = \mathcal{X}^r$ непрерывно вложено $(H^{\rho_0}(\Omega))^r$, поскольку $B_1 = I$, и в силу неравенства $4\rho\nu_1 + 2\rho_0 > d$ по теореме 1.7.1 имеем включение $H(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_r(\cdot)) \in C^\infty(\mathcal{X}^r; H^{\rho_0}(\Omega))$, следовательно,

$$B(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_r(\cdot)) := L^{-1}H(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_r(\cdot)) \in C^\infty(\mathcal{X}^r; \mathcal{X}).$$

Тогда по теореме 1.4.1 получаем существование единственного локального решения. А условие ограниченности частных производных отображения H влечет однозначную разрешимость задачи (1.7.7)–(1.7.9) на всем отрезке $[t_0, T]$.

□

Пример. В условиях примера из предыдущего раздела начально-краевая задача

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u(\xi,0)=u_0(\xi),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,0)=u_1(\xi),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,0)=u_2(\xi),\ \ \xi\in(0,\pi).$$

для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}D_t^{5/2}u(\xi,t)=bD_t^{1/4}u(\xi,t)+\left(c_0+c_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)D_t^{4/3}u(\xi,t)+$$

$$+\frac{d_0}{1+(D_t^{-7/2}u(\xi,t))^2+(D_t^{7/3}u(\xi,t))^2},\ \ (\xi,t)\in(0,\pi)\times[0,T],$$

однозначно разрешима на всем отрезке $[0,T]$.

1.7.4. Обратная задача

Рассмотрим обратную задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi,0)=u_l(\xi),\ l=0,1,\dots,m-1,\quad \xi\in\Omega, \tag{1.7.10}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi,t)=0,\ \ p=0,1,\dots,\nu_1-1,\ \ j=1,2,\dots,\rho,\ \ (\xi,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{1.7.11}$$

$$P_1(\Lambda)D_t^{\alpha}u(\xi,t)=\sum_{k=1}^{n}P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t)+\varphi(t)h(\xi),\ \ (\xi,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{1.7.12}$$

$$\int_0^T u(\xi,T)d\mu(t)=u_T(\xi),\quad \xi\in\Omega, \tag{1.7.13}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ и $h:\Omega\to\mathbb{R}$ — неизвестные функции. Возьмем

$$\mathcal{X}=\{v\in H^{2\rho\nu_1}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\ p=0,1,\dots,\nu_1-1,\ j=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y}=L_2(\Omega),\ L=P_1(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}),\ M_k=P_2^k(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}),\ k=1,2,\dots,n.$$

Пусть $P_1(\lambda_s)\neq 0$ для всех $s\in\mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (1.7.10)–(1.7.13) представима в виде (1.6.1)–(1.6.3), где $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $A_k=L^{-1}M_k\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, $z_l=u_l(\cdot)$, $l=0,1,\dots,m-1$, $u=L^{-1}h(\cdot)$. По теореме 1.6.1 необходимым и достаточным условием корректности обратной задачи (1.7.10)–(1.7.13) является условие существования такого $c > 0$, что при всех $s \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_1(\lambda_s) - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} P_2^k(\lambda_s) \right)^{-1} P_1(\lambda_s) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \right| \geq c, \tag{1.7.14}$$

поскольку

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^\infty \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s \int_0^T \int_0^t \int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_1(\lambda_s) - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} P_2^k(\lambda_s) \right)^{-1} P_1(\lambda_s) \times$$

$$\times e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пример. Возьмем $\nu_1 = 2$, $P_1(\lambda) = \lambda^2$, $P_2^1(\lambda) = b$, $P_2^2(\lambda) = 1 + \lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho = 1$, $\Lambda v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi \equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t \in (0, T)$, $\mu(T) = 1$. Тогда $m = 3$, $\lambda_s = -s^2$ при $s \in \mathbb{N}$ и задача (1.7.10)–(1.7.13) имеет вид

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} D_t^{5/2} u(\xi, t) = b D_t^{1/4} u(\xi, t) +$$

$$+ \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) D_t^{4/3} u(\xi, t) + h(\xi), \ (\xi, t) \in (0, \pi) \times [0, T],$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi), \ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, 0) = u_1(\xi), \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, 0) = u_2(\xi), \quad \xi \in (0, \pi),$$

$$u(\xi, T) = u_T(\xi), \ \xi \in (0, \pi),$$

а условие корректности (1.7.14) после некоторых упрощений —

$$\left| \int_\gamma \left(\lambda^{7/2} - b s^{-4} \lambda^{5/4} - (s^{-4} - s^{-2}) \lambda^{7/3} \right)^{-1} (e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)}) d\lambda \right| \geq c > 0, \ s \in \mathbb{N}.$$

2. Уравнения с секториальными наборами операторов

Вторая глава посвящена изучению вопросов однозначной разрешимости задачи Коши для разрешенных относительно старшей дробной производной линейных и квазилинейных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто и неограниченными (замкнутыми) операторами при них в линейной части. Для этого введен в рассмотрение класс наборов линейных замкнутых операторов (такие наборы для краткости называются секториальными), принадлежность которому необходима и достаточна для существования аналитических в секторе разрешающих семейств операторов исследуемого уравнения. Подход, использующий понятие разрешающих семейств операторов, восходит к теории полугрупп операторов и применяется при исследовании вопросов разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Однако даже для уравнений с несколькими производными целого порядка он не является в значительной степени разработанным. Работа же с дробными производными тем более усложняет его использование и требует множества новых идей на техническом уровне.

2.1. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.1.1}$$

для линейного уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t), \quad t > 0, \tag{2.1.2}$$

где $A_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ с областями определения $D_{A_k} \subset \mathcal{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Под решением задачи (2.1.1), (2.1.2) понимается функция $z \in AC^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})\cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, выполняются условия (2.1.1) и равенство (2.1.2) для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Введем обозначения $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$, $S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$.

Теорема 2.1.1. [111, Theorem 0.1, C. 5], [121, Theorem 2.6.1, C. 84]. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $H : (a,\infty) \to \mathcal{X}$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0-\pi/2} \to \mathcal{X}$, для каждого $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такая $C(\theta) > 0$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_\mathcal{X} \le C(\theta)e^{a\mathrm{Re}\,t}$; $\widehat{F}(\lambda) = H(\lambda)$ при $\lambda > a$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо в $S_{\theta_0,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta_0, \mu \neq a\}$, для каждого $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такое $K(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ выполняется*

$$\|H(\lambda)\|_\mathcal{X} \le \frac{K(\theta)}{|\lambda - a|}.$$

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — замкнутые линейные операторы с областями определения $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_n}$ соответственно. Обозначим

$$\mathcal{D} := \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}, \quad R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{D}.$$

Снабдим множество $\mathcal{D}$ нормой

$$\|\cdot\|_\mathcal{D} = \|\cdot\|_\mathcal{Z} + \sum_{k=1}^{n} \|A_k \cdot\|_\mathcal{Z},$$

относительно которой $\mathcal{D}$ является банаховым пространством, так как представляет собой пересечение банаховых пространств $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_n}$ с соответствующими нормами графиков замкнутых операторов.

Определение 2.1.1. Набор операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ принадлежит классу $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \ge 0$, если

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$ существуют операторы

$$R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z});$$

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$

$$\left\| R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha - 1}}.$$

Замечание 2.1.1. Выполняется равенство

$$R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_{m-1}}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) = R_\lambda,$$

если и только если $\alpha_n \le m - 1$.

Замечание 2.1.2. При $n = 1$, $\alpha_1 = 0$ получаем определение инфинитезимального генератора аналитической полугруппы операторов [16, 30, 60, 85].

Введем также обозначение

$$\mathcal{A}^n_{\alpha,G} := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi) \\ a_0 \ge 0}} \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0).$$

Иногда для краткости наборы операторов из $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ будем называть секториальными.

Определение 2.1.2. Семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *l-разрешающим* для уравнения (2.1.2), если выполняются следующие условия:

(i) $S_l(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$;

(ii) для каждого $z_l \in \mathcal{D}$ $S_l(t)z_l$ — решение задачи (2.1.1), (2.1.2) при $z_k = 0$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}$.

l-Разрешающее семейство операторов, $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\psi_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi_0,\, t \neq 0\}$ при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое l-разрешающее семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \geq 0$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a) > 0$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\mathrm{Re}\, t}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, существуют аналитические l-разрешающие семейства $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ типа (θ_0, a_0) для уравнения* (2.1.2)*, $l = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда для каждого $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ l-разрешающее семейство $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ единственно, при этом*

$$S_l(t)z_0 = J_t^l S_0(t)z_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_\lambda \sum_{k=n_0}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k z_0 e^{\lambda t} d\lambda, \tag{2.1.3}$$

$$\begin{gathered} \Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0,\ \Gamma^0 := \{a + r_0 e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}, \\ \Gamma^\pm := \{a + re^{\pm i\theta}, r \in [r_0, \infty)\},\ \theta \in (\pi/2, \theta_0),\ a > a_0,\ r_0 > 0. \end{gathered} \tag{2.1.4}$$

Доказательство. По теореме 2.1.1 при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\left\|\widehat{S}_l(\lambda)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \tag{2.1.5}$$

Возьмем $z_0 \in \mathcal{D}$, тогда $S_0(t)z_0$ решение задачи (2.1.1), (2.1.2) с начальными условиями $z_1 = z_2 = \dots = z_{m-1} = 0$, следовательно, из (2.1.2) получаем

$$\lambda^\alpha \widehat{S}_0(\lambda)z_0 - \lambda^{\alpha-1}z_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \widehat{S}_0(\lambda)z_0 - \sum_{k=n_0}^{n} \lambda^{\alpha_k - 1} A_k z_0,$$

$$\widehat{S}_0(\lambda)z_0 = R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-1} I - \sum_{k=n_0}^{n} \lambda^{\alpha_k-1} A_k\right) z_0.$$

Аналогично получаем из определения l-разрешающего семейства при $l = 1, 2, \dots, m-1$

$$\widehat{S}_l(\lambda)z_0 = R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k\right) z_0 = \lambda^{-l}\widehat{S}_0(\lambda)z_0 + R_\lambda \sum_{k=n_0}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k z_0. \tag{2.1.6}$$

Следовательно, справедливо равенство (2.1.3), соответствующий интеграл сходится, так как

$$R_\lambda \sum_{k=n_0}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k z_0 = \widehat{S}_l(\lambda) z_0 - \lambda^{-l} \widehat{S}_0(\lambda) z_0$$

и в силу неравенств (2.1.5) при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\left\| R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C_1}{|\lambda - a|}.$$

□

Теорема 2.1.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m-1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. *Тогда существуют аналитические* l*-разрешающие семейства операторов уравнения* (2.1.2) *типа* (θ_0, a_0) *при* $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *в том и только в том случае, когда* $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$. *При этом если* $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, *то существует единственное решение задачи* (2.1.1), (2.1.2) *и оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l,$$

где

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $r_0 > 0$. *Решение аналитически продолжимо в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Доказательство. Контур Γ здесь имеет вид (2.1.4).

Если существуют аналитические l-разрешающие семейства операторов уравнения (2.1.2) типа (θ_0, a_0) при $l = 0, 1, \ldots, m-1$, то в силу теоремы 2.1.1 и равенств (2.1.5) и (2.1.6) $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$.

При $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ заметим, что в силу определения 2.1.1 при $\lambda \in \Gamma$

$$\left\| R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^l} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}.$$

Поэтому выполняется утверждение (ii) теоремы 2.1.1, а значит, справедливо и ее утверждение (i), т. е. семейства $\{Z_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ и при всех $a > a_0$, $\|Z_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ce^{at}$ при всех $t > 0$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Для $j = 0, 1, \ldots, m-1, x \in \mathcal{D}$

$$D^j_t Z_l(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1+j} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1+j} A_k \right) e^{\lambda t} x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{j-l-1} e^{\lambda t} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{j+\alpha_k-l-1} A_k e^{\lambda t} x d\lambda.$$

Имеем $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. По определению для $k = 1, 2, \ldots, n_l - 1$ мы имеем $m_k - 1 \leq l - 1 < l$, $\alpha_k \leq m_k \leq l$, следовательно,

$$\left\| R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{j+\alpha_k-l-1} A_k x \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C_1 \|x\|_{\mathcal{D}}}{|\lambda|^{1+\delta}}.$$

при $\delta = \alpha - m + 1 > 0$. Таким образом, для $x \in \mathcal{D}$ $D^l_t Z_l(0)x = x$, $D^j_t Z_l(0)x = 0$ при $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{l\}$.

Имеем также при $x \in \mathcal{D}$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k D^{\alpha_k}_t Z_l(t)x =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1+j} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1+j} A_k \right) e^{\lambda t} x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{\alpha} R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1+j} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1+j} A_k \right) e^{\lambda t} x d\lambda \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}).$$

Для $x \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{Lap}[D_t^\alpha Z_l(t)x](\mu) = \mu^\alpha \widehat{Z_l(t)x}(\mu) - \mu^{\alpha-l-1}x =$$

$$= \mu^\alpha R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1}x - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k x \right) - \mu^{\alpha-l-1}x =$$

$$= \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k + \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k \right) R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1}x - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k x \right) -$$

$$-\mu^{\alpha-l-1}x = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k R_\mu \left(\mu^{\alpha-l-1}x - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k x \right) - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k \widehat{Z_l(t)x}(\mu) - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k x = \mathrm{Lap}\left[\sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} Z_l(t)x \right](\mu).$$

Используя обратное преобразование Лапласа, получаем равенство $D_t^\alpha Z_l(t)x = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} Z_l(t)x$ при $t > 0$. Следовательно, $Z_l(t)z_l$ является решением уравнения (2.1.2) при $t > 0$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

Пусть существует решение y задачи (2.1.1), (2.1.2) с начальными данными $z_{m-1} \in \mathcal{D}$, $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$. Одним из таких решений является функция $Z_{m-1}(t)z_{m-1}$. При этом для $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t \in [0, T]$

$$\left\| D_t^k J_t^{m-\alpha} \left(y(t) - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1} \right) \right\|_{\mathcal{Z}} = \left\| J_t^{m-\alpha} D_t^k \left(y(t) - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1} \right) \right\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq \frac{t^{m-\alpha} \| y - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1} \|_{C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \to 0$$

при $t \to 0+$, а значит, $D_t^k|_{t=0} J_t^{m-\alpha}(y(t) - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}) = 0$. По определению решения $y \in AC^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, поэтому действием оператора J_t^α на обе части уравнения (2.1.2) получим

$$J_t^\alpha D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(y(t) - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1} \right) = y(t) - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1} = \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} y(t).$$

Отсюда имеем

$$z_{m-1} = D_t^{m-1} y(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{m-1} J_t^{\alpha-\alpha_k} y(t) = D_t^{m-1} y(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k J_t^{\alpha-\alpha_k} D_t^{m-1} y(t),$$

поскольку $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-2$. Таким образом, получено два тождества для решения y:

$$g_{m-1} * z_{m-1} = y - \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * y, \tag{2.1.7}$$

$$z_{m-1} = D_t^{m-1} y - \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * D_t^{m-1} y, \tag{2.1.8}$$

где $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, а свертка Лапласа $*$ определяется равенством

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(t-s) g(s) ds.$$

Поскольку равенство (2.1.8) справедливо для любого решения задачи (2.1.1), (2.1.2) с начальными данными $z_{m-1} \in \mathcal{D}$, $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, в частности, для функции $Z_{m-1}(t) z_{m-1}$, имеем для любого решения y этой задачи

$$1 * y = 1 * \left(D_t^{m-1} Z_{m-1} - \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * D_t^{m-1} Z_{m-1} \right) y =$$

$$= \left(D_t^{m-1} Z_{m-1} - \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * D_t^{m-1} Z_{m-1} \right) * y =$$

$$= D_t^{m-1} Z_{m-1} * y - D_t^{m-1} Z_{m-1} * \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * y =$$

$$= D_t^{m-1} Z_{m-1} * \left(y - \sum_{k=1}^{n} A_k g_{\alpha-\alpha_k} * y \right) = D_t^{m-1} Z_{m-1} * g_{m-1} * z_{m-1} =$$

$$= g_{m-1} * D_t^{m-1} Z_{m-1} * z_{m-1} = Z_{m-1} * z_{m-1} = 1 * Z_{m-1} z_{m-1}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства и получим $y(t) = Z_{m-1}(t) z_{m-1}$ при всех $t \geq 0$.

Если y — решение задачи (2.1.1), (2.1.2) с начальными данными $z_k \in \mathcal{D}$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, то $y(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-2} Z_k(t) z_k$ является решением этой же задачи при $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$. По доказанному получаем $y(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-2} Z_k(t) z_k = Z_{m-1}(t) z_{m-1}$. Тем самым единственность решения доказана.

Аналитичность решения следует из свойств операторов $Z_k(t)$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$. $\square$

Теорема 2.1.3. *Пусть* $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : l \le m_k - 1\} = \emptyset$ *при некотором* $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. *Тогда для l-разрешающего семейства операторов уравнения* (2.1.2) *функция* $D^l_t S_l(t)$ *непрерывна в точке* $t = 0$ *в операторной норме* $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ *в том и только в том случае, когда* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. При $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ в силу (2.1.6) получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(D^l_t S_l(t) - I)dt = R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - 1} A_k\right) - \frac{I}{\lambda} = \lambda^{\alpha-1} R_\lambda - \frac{I}{\lambda},$$

так как $n_l = n + 1$.

Пусть функция $\eta(t) := \|D^l_t S_l(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $\eta(0) = 0$. При $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, что $\eta(t) \le \varepsilon$ при всех $t \in [0, \delta]$, в таком случае

$$\left\|\lambda^{\alpha-1} R_\lambda - \frac{I}{\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \int\limits_0^\delta e^{-t\mathrm{Re}\lambda} \eta(t) dt + \int\limits_\delta^\infty e^{-t\mathrm{Re}\lambda} \eta(t) dt \le \frac{\varepsilon}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\right)$$

при $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$, так как $\eta(t) \le Ke^{at} + 1$, $a > a_0$, для $t \ge 0$. Поэтому при достаточно больших $\mathrm{Re}\lambda$ $\|\lambda^\alpha R_\lambda - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1$, следовательно, оператор R_λ непрерывно обратим, а значит, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Умножим этот оператор на $\lambda^{-\alpha_n}$, устремим $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$ и получим ограниченность оператора A_n в силу полноты пространства $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda^{\alpha_k} A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Продолжая этот процесс, получим непрерывность всех операторов A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

2.2. Линейное неоднородное уравнение

При $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$ рассмотрим линейное неоднородное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in (0,T]. \tag{2.2.1}$$

Решением задачи Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \tag{2.2.2}$$

для уравнения (2.2.1) будем называть функцию $z \in AC^m([0,T];\mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((0,T];\mathcal{Z}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$, $\sum\limits_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, выполняются условия (2.2.2) и равенство (2.2.1) для всех $t \in (0,T]$.

Сначала докажем важный вспомогательный результат.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \ge 0$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$,*

$$Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^\beta R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

$\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0$, $\Gamma^0 := \{a + r_0 e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta_1, \theta_1)\}$, $\Gamma^\pm := \{a + re^{\pm i\theta_1}, r \in [r_0, \infty)\}$, $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $r_0 > 0$. Тогда Y_β допускает аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ и при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что для всех $\tau \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\beta e^{a\mathrm{Re}\tau}\left(|\tau|^{-1} + a\right)^{\beta-\alpha+1}, \quad \beta \ge \alpha - 1, \tag{2.2.3}$$

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\beta e^{a\mathrm{Re}\tau}|\tau|^{\alpha-1-\beta}, \quad \beta < \alpha - 1. \tag{2.2.4}$$

При этом

$$D_t^k Y_\beta(t) = Y_{\beta+k}(t), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.2.5}$$

$$D_t^\gamma Y_\beta(t) = Y_{\beta+\gamma}(t), \quad t > 0, \quad \beta < \alpha, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{2.2.6}$$

$$\lim_{t\to 0+} Y_\beta(t) = 0, \quad \beta < \alpha - 1. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\theta_1 = \frac{\theta_0+\theta}{2}$, $a > a_0$, $\varepsilon = \theta_1 - \theta = \frac{\theta_0-\theta}{2}$. Для $\tau \in \Sigma_{\theta_1-\pi/2-\varepsilon} = \Sigma_{\theta-\pi/2}$, $\lambda \in \Gamma^{\pm}$ имеем

$$\mathrm{Re}(\lambda\tau) = a\mathrm{Re}\tau + r|\tau|\cos(\arg\tau \pm \theta_1) \leq a\mathrm{Re}\tau - r|\tau|\sin\varepsilon, \quad |\lambda| = r,$$

а в случае $\lambda \in \Gamma^0$ $\mathrm{Re}(\lambda\tau) = a\mathrm{Re}\tau + r_0|\tau|\cos(\arg\tau \pm \varphi)$, поэтому в силу замечания 2.1.1 при $\beta \geq \alpha - 1$

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}}{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{(r+a)^{\beta-\alpha+1}}{r}e^{-r|\tau|\sin\varepsilon}dr+$$

$$+\frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}(r_0+a)^{\beta-\alpha+1}}{2\pi}\int\limits_{-\theta_1}^{\theta_1}e^{r_0|\tau|\cos(\arg\tau\pm\varphi)}d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}}{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{(r+a)^{\beta-\alpha+1}}{r}e^{-r|\tau|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ke^{r_0|\tau|+a\mathrm{Re}\tau}(r_0+a)^{\beta-\alpha+1}\theta_0}{\pi}. \qquad (2.2.8)$$

При $\beta < \alpha - 1$ аналогичная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}c^{\beta-\alpha+1}}{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}r^{\beta-\alpha}e^{-r|\tau|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ke^{r_0|\tau|+a\mathrm{Re}\tau}c^{\beta-\alpha+1}r_0^{\beta-\alpha+1}\theta_0}{\pi}. \qquad (2.2.9)$$

При этом использовано неравенство $|\lambda| \geq c|\lambda - a|$, очевидно справедливое при некотором $c = c(\theta_1, a) > 0$ для всех $\lambda \in \Gamma$. Таким образом, при любом $\beta \in \mathbb{R}$ соответствующий интеграл сходится равномерно на любом компактном подмножестве сектора $\Sigma_{\theta_1-\pi/2}$, а значит, определяет в нем аналитическую функцию переменной τ. Учитывая произвольность θ в $(\pi/2, \theta_0)$, получим аналитичность в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Возьмем $r_0 = |\tau|^{-1}$, тогда при $\beta \geq \alpha - 1$ в силу (2.2.8)

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^0}\lambda^\beta R_\lambda e^{\lambda\tau}d\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Ke^{1+a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1}+a)^{\beta-\alpha+1}\theta_0}{\pi},$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{\pm}} \lambda^{\beta} R_{\lambda} e^{\lambda \tau} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K e^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{(r|\tau|^{-1} + a)^{\beta-\alpha+1}}{r} e^{-r\sin\varepsilon} dr \leq$$

$$\leq \frac{K e^{a\mathrm{Re}\tau} (|\tau|^{-1} + a)^{\beta-\alpha+1}}{2\pi} \int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-\alpha} e^{-r\sin\varepsilon} dr.$$

Возьмем $K = K\left(\frac{\theta_0+\theta_1}{2}, \frac{a_0+a}{2}\right) = K\left(\frac{3\theta_0+\theta}{4}, \frac{a_0+a}{2}\right)$, тогда выполняется неравенство (2.2.3) в $\Sigma_{\theta_1-\pi/2}$ при

$$C_{\beta}(\theta) = \frac{K\left(\frac{3\theta_0+\theta}{4}, \frac{a_0+a}{2}\right) \theta_0 e}{\pi} + \frac{K\left(\frac{3\theta_0+\theta}{4}, \frac{a_0+a}{2}\right)}{\pi} \int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-\alpha} e^{-r\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}} dr.$$

При $r_0 = |\tau|^{-1}$, $\beta < \alpha - 1$ из (2.2.9) аналогичным образом получим неравенства

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{0}} \lambda^{\beta} R_{\lambda} e^{\lambda \tau} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K e^{1+a\mathrm{Re}\tau} c(\theta_1, a)^{\beta-\alpha+1} |\tau|^{-\beta+\alpha-1} \theta_0}{\pi},$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{\pm}} \lambda^{\beta} R_{\lambda} e^{\lambda \tau} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K e^{a\mathrm{Re}\tau} c(\theta_1, a)^{\beta-\alpha+1} |\tau|^{-\beta+\alpha-1}}{2\pi} \int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-\alpha} e^{-r\sin\varepsilon} dr,$$

из которых следует (2.2.4) при

$$C_{\beta}(\theta, a) = \frac{K\left(\frac{3\theta_0+\theta}{4}, \frac{a_0+a}{2}\right) c\left(\frac{\theta_0+\theta}{2}, a\right)^{\beta-\alpha+1} \theta_0 e}{\pi} +$$

$$+ \frac{K\left(\frac{3\theta_0+\theta}{4}, \frac{a_0+a}{2}\right) c\left(\frac{\theta_0+\theta}{2}, a\right)^{\beta-\alpha+1}}{\pi} \int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-\alpha} e^{-r\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}} dr.$$

Из (2.2.4) следуют равенства (2.2.7). Равенства (2.2.5) очевидны в силу доказанной аналитичности Y_{β}.

Пусть $\beta < \alpha$, тогда при $\mu \in \mathbb{C}$, взятом справа от Γ,

$$\widehat{Y_{\beta}}(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda^{\beta}}{\mu - \lambda} R_{\lambda} d\lambda = \mu^{\beta} R_{\mu},$$

интеграл сходится, так как

$$\left\|\frac{\lambda^\beta}{\mu-\lambda}R_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\alpha-\beta}}.$$

В таком случае при $\gamma \in (n-1,n]$, $n \in \mathbb{N}$, $D_t^n Y_\beta(t) = Y_{\beta+n}(t)$, $\widehat{J_t^{n-\gamma}Y_{\beta+n}}(\mu) = \mu^{\beta+\gamma}R_\mu$, $D_t^\gamma Y_\beta(t) = J_t^{n-\gamma}Y_{\beta+n}(t) = Y_{\beta+\gamma}(t)$. При $\gamma \leq 0$ утверждение (2.2.6) доказывается аналогично. □

Замечание 2.2.1. Нетрудно показать, что на любом полуинтервале $(0,T]$, $T>0$, неравенства (2.2.3) и (2.2.4) в условиях леммы 2.2.1 можно объединить в одно: при некотором $c_\beta > 0$

$$\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq c_\beta t^{\alpha-1-\beta}, \quad t \in (0,T], \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.2.10}$$

При $\gamma \in (0,1]$ через $C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ обозначим множество функций, удовлетворяющих на отрезке $[0,T]$ условию Гельдера.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ *плотно в* $\mathcal{Z}$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда функция* $z_f(t) = \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds$ *является единственным решением задачи Коши* $D_t^l z(0) = 0$, $l = 0,1,\ldots,m-1$, *для уравнения* (2.2.1).

Доказательство. Имеем $D_t^l Y_0(0) = 0$, $l = 0,1,\ldots,m-2$, в силу леммы 2.2.1. Поэтому при $l = 1,2,\ldots,m-1$

$$z_f^{(l)}(t) = D_t^{l-1}Y_0(0)f(t) + \int\limits_0^t D_t^l Y_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t D_t^l Y_0(t-s)f(s)ds.$$

Следовательно, $\|z_f^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq Ce^{at}t \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{\mathcal{Z}} \to 0$ при $t \to 0+$ для $l = 0,1,\ldots,m-2$. С учетом (2.2.10) при $t \in (0,T]$

$$\|D_t^{m-1}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|Y_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq c_\beta t^{\alpha-m}.$$

Следовательно, $\|z_f^{(m-1)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{\mathcal{Z}} t^{\alpha-m+1} \to 0$ при $t \to 0+$. Поэтому z_f удовлетворяет нулевым начальным условиям.

В силу (2.2.6)

$$Y_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k}A_k - \lambda^\alpha I + \lambda^\alpha I\right) R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k}A_k R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha_k}R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k}Y_0(t).$$

Следовательно, при $0 < \varepsilon < t$ с учетом (2.2.5)

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon}\sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k}Y_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^{t-\varepsilon} Y_\alpha(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int\limits_0^{t-\varepsilon} Y_\alpha(t-s)f(t)ds =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} Y_\alpha(t-s)(f(s)-f(t))ds - \int\limits_0^{t-\varepsilon} D_s^1 Y_{\alpha-1}(t-s)f(t)ds =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} Y_\alpha(t-s)(f(s)-f(t))ds + (Y_{\alpha-1}(t) - Y_{\alpha-1}(\varepsilon))f(t). \qquad (2.2.11)$$

При этом в силу (2.2.3)

$$\left\|\int\limits_0^{t-\varepsilon} Y_\alpha(t-s)(f(s)-f(t))ds\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_1\int\limits_0^{t-\varepsilon}(t-s)^{\gamma-1}ds = C_2(t^\gamma - \varepsilon^\gamma). \quad (2.2.12)$$

Для $y_0 \in \mathcal{D}$

$$Y_{\alpha-1}(t)y_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1}R_\lambda\left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k}A_k + \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k}A_k\right)y_0 e^{\lambda t}d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1}y_0 e^{\lambda t}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n\int\limits_\Gamma \lambda^{\alpha_k-1}R_\lambda A_k y_0 e^{\lambda t}d\lambda = y_0 + \sum_{k=1}^n Y_{\alpha_k-1}(t)A_k y_0 \to y_0$$

при $t \to 0+$ согласно (2.2.4), так как $\alpha_k < \alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В силу (2.2.3) $\|Y_{\alpha-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C$ для всех $t > 0$, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$, поэтому по теореме Банаха — Штейнгауза существует предел в сильной топологии $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} Y_{\alpha-1}(t) :=$

$Y_{\alpha-1}(0) = I$ в пространстве $\mathcal{Z}$. Таким образом, из (2.2.11), (2.2.12) следует, что

$$\int\limits_0^t \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} Y_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t Y_\alpha(t-s)(f(s)-f(t))ds + (Y_{\alpha-1}(t)-I)f(t).$$

В силу вышесказанного

$$D_t^l|_{t=t_0} \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds = 0, \quad l = 0,1,\dots,m-1,$$

$$\sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{m_k} \int\limits_0^t Y_{\alpha_k-m_k}(t-s)f(s)ds =$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k \int\limits_0^t Y_{\alpha_k}(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} Y_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t Y_\alpha(t-s)f(s)ds,$$

поскольку $D_t^l Y_{\alpha_k-m_k}(0) = Y_{\alpha_k-m_k+l}(0) = 0$ при $l = 0,1,\dots,m_k-1$ в силу (2.2.4). Аналогично

$$D_t^\alpha \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds = D_t^m \int\limits_0^t Y_{\alpha-m}(t-s)f(s)ds = D_t^1 \int\limits_0^t Y_{\alpha-1}(t-s)f(s)ds =$$

$$= f(t) + \int\limits_0^t Y_\alpha(t-s)f(s)ds = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds + f(t).$$

Доказательство единственности решения такое же, как для однородного уравнения. $\square$

В силу линейности уравнения (2.2.1) немедленно получаем следующий результат.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ *плотно в* $\mathcal{Z}$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, $z_l \in \mathcal{D}$,

$l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (2.2.1), (2.2.2), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Y_0(t-s) f(s) ds.$$

Доказательство. Утверждение данной теоремы следует из теоремы 2.1.2 и леммы 2.2.2. □

2.3. Существование локального решения квазилинейного уравнения

Здесь будем рассматривать дробные интегралы и дробные производные Герасимова — Капуто с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\alpha f(t) := \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad D_t^\alpha f(t) = J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t), \quad t > t_0,$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\kappa_i - 1 < \gamma_i \leq \kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B : U \to \mathcal{Z}$. Рассмотрим вопросы существования и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения на достаточно малом отрезке $[t_0, t_1]$, т. е. локального решения.

Решением задачи Коши

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.3.1}$$

для квазилинейного дробного дифференциального уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n D_t^{\alpha_k} A_k z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)), \tag{2.3.2}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $z \in AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $\sum\limits_{k=1}^n D_t^{\alpha_k} A_k z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, выполняются включение $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ при $t \in [t_0, t_1]$, равенство (2.3.2) для всех $t \in (t_0, t_1]$, а также условия (2.3.1).

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\gamma \in (0,1)$, $h \in AC([t_0,T];\mathcal{Z})$, $D_t^\gamma h \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$. *Тогда* $h \in C^\gamma([t_0,T]\mathcal{Z})$, *при этом для всех* $t, \tau \in [t_0,T]$

$$\|h(t) - h(\tau)\|_\mathcal{Z} \leq \frac{\|D_t^\gamma z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(\gamma+1)}|t-\tau|^\gamma.$$

Доказательство. Если $t_0 \leq \tau < t \leq T$, то

$$\|h(t) - h(\tau)\|_\mathcal{Z} = \|J_t^\gamma D_t^\gamma h(t) - J_t^\gamma D_t^\gamma h(\tau)\|_\mathcal{Z} \leq$$

$$\leq \frac{(t-t_0)^\gamma - (\tau-t_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\|D_t^\gamma h\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})} \leq \frac{(t-\tau)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\|D_t^\gamma h\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})},$$

поскольку функция

$$\frac{(t-t_0)^\gamma - (\tau-t_0)^\gamma}{(t-\tau)^\gamma}$$

убывает по $\tau \in [t_0,t)$ при $\gamma \in (0,1)$. □

Замечание 2.3.1. Из определения нормы

$$\|h\|_{C^\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})} := \|h\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})} + \sup_{\substack{t,\tau\in[t_0,T]\\ t\neq\tau}} \frac{\|h(t)-h(\tau)\|_\mathcal{Z}}{|t-\tau|^\gamma}$$

и леммы 2.3.1 следует, что в ее условиях

$$\|h(t) - h(\tau)\|_\mathcal{Z} \leq \frac{\|D_t^\gamma z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(\gamma+1)}|t-\tau|^\gamma.$$

Следствие 2.3.1. *Пусть* $n-1 < \gamma < n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, n-\gamma)$, $g \in C^{n-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $D_t^{\gamma+\delta} g \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$. *Тогда* $D_t^\gamma g \in C^\delta([t_0,T]\mathcal{Z})$, *при этом для всех* $t,\tau \in [t_0,T]$

$$\|D_t^\gamma g(t) - D_t^\gamma g(\tau)\|_\mathcal{Z} \leq \frac{\|D_t^{\gamma+\delta} z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(\delta+1)}|t-\tau|^\delta.$$

Доказательство. Так как $g \in C^{n-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, имеем

$$J_t^{n-\gamma-\delta}\left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}D_t^k g(t_0)\right) \in C^{n-1}([t_0,T];\mathcal{Z}),$$

$$D_t^{n-1}J_t^{n-\gamma-\delta}\left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}D_t^k g(t_0)\right) =$$

$$= J_t^{n-\gamma-\delta} D_t^{n-1} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) \in AC([t_0, T]; \mathcal{Z})$$

как первообразная интегрируемой по Бохнеру функции,

$$D_t^k|_{t=t_0} J_t^{n-\gamma-\delta} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

поэтому

$$J_t^\delta D_t^{\gamma+\delta} g(t) = J_t^\delta D_t^n J_t^{n-\gamma-\delta} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) =$$

$$= D_t^n J_t^{n-\gamma} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) = D_t^\gamma g(t).$$

Следовательно, $D_t^\gamma g \in AC([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D_t^{\gamma+\delta} g = D_t^\delta D_t^\gamma g$. Осталось применить лемму 2.3.1 с функцией $h = D_t^\gamma g$. $\square$

Аналогично доказывается следующее подобное утверждение.

Следствие 2.3.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $g \in C^n([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\delta \in (0, 1)$, $D_t^{n+\delta} g \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Тогда $D_t^n g \in C^\delta([t_0, T]\mathcal{Z})$, при этом для всех $t, \tau \in [t_0, T]$*

$$\|D_t^n g(t) - D_t^n g(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{\|D_t^{n+\delta} z\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})}}{\Gamma(\delta+1)} |t-\tau|^\delta.$$

Доказательство. Имеем

$$J_t^\delta D_t^{n+\delta} g(t) = J_t^\delta D_t^{n+1} J_t^{1-\delta} \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) =$$

$$= D_t^n \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D_t^k g(t_0) \right) = D_t^n g(t) - D_t^n g(t_0),$$

поэтому $D_t^n g \in AC([t_0, T]; \mathcal{Z})$,

$$D_t^{n+\delta} g(t) = D_t^\delta D_t^n g(t) - D_t^\delta D_t^n g(t_0) = D_t^\delta D_t^n g(t).$$

Теперь применим лемму 2.3.1 с функцией $h = D_t^n g$. $\square$

Лемма 2.3.2. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ *плотно в* $\mathcal{Z}$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U; \mathcal{Z})$, $(t_0, z_1, z_2, \dots, z_r) \in U$. *Тогда функция* z, *для которой* $D^\beta z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ *при некотором* $\beta \in (\gamma_r, \alpha)$, *является решением задачи* (2.3.1), (2.3.2) *на отрезке* $[t_0, t_1]$, *если и только если при всех* $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D^{\gamma_1} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \in U$ *и выполняется равенство*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B^z(s) ds. \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Если $D^\beta z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при некотором $\beta \in (\gamma_r, \alpha)$, то в силу следствия 2.3.1 при $\gamma_r \notin \mathbb{N}$ и следствия 2.3.2 при $\gamma_r \in \mathbb{N}$ имеем $D^{\gamma_i} z \in C^{\beta-\gamma_r}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, поэтому отображение

$$t \to B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \tag{2.3.4}$$

принадлежит классу $C^{\beta-\gamma_r}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ в силу локальной липшицевости оператора B. По теореме 2.2.1 получим требуемое. $\square$

Как и в первой главе, введем обозначения

$$\tilde{z}(t) = z_0 + (t-t_0) z_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} z_2 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1},$$

$\tilde{z}_i = D^{\gamma_i}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $B^z(s) := B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \dots, D^{\gamma_r} z(s))$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \le m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ *плотно в* $\mathcal{Z}$, *при* $l = 0, 1, \dots, m-1$ $z_l \in \mathcal{D}$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U; \mathcal{Z})$ *локально липшицево по* $\bar{x}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_r) \in U$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *задача* (2.3.1), (2.3.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. По определению решения z на $[t_0, t_1]$ выполняется включение $D^\alpha z \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, поэтому при $\beta \in (\gamma_r, \alpha)$ $J_t^{\alpha-\beta} D_t^\alpha z = D_t^\beta z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$

(см. доказательство следствия 2.3.1). Поэтому достаточно доказать существование решения в пространстве

$$C^{m-1,\beta}([t_0,T];\mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z}) : D_t^\beta z \in C([t_0,T];\mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|z\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \|D_t^\beta z\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ при некотором $\beta \in (\gamma_r, \alpha)$.

Возьмем $\tau > 0$ и $\delta > 0$, такие, что $[t_0, t_0+\tau] \times S_\delta(\overline{\widetilde{z}}) \subset U$, где $\overline{\widetilde{z}} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \ldots, \widetilde{z}_r)$. Обозначим через $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ множество функций $z \in C^{m-1,\beta}([t_0, t_0+\tau];\mathcal{Z})$, для которых $\|D^{\gamma_i} z(t) - \tilde{z}_i\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$ при $t_0 \leq t \leq t_0+\tau$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Определим на $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ метрику $d(x,y) := \|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}$, тогда в силу леммы 1.4.3 $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ — полное метрическое пространство. Заметим, что $\widetilde{z} \in \mathcal{S}_{\tau,\delta}$ при малом $\tau > 0$.

При заданных $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, для $z \in \mathcal{S}_{\tau,\delta}$ определим отображение

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Y_0(t-s) B(s, D^{\gamma_1} z(s), \ldots, D^{\gamma_r} z(s)) ds,$$

$t \in [t_0, t_0+\tau]$. Поскольку отображение (2.3.4) лежит в $C^{\beta-\gamma_r}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ в силу локальной липшицевости оператора B и следствия 2.3.1 при $\gamma_r \notin \mathbb{N}$, следствия 2.3.2 при $\gamma_r \in \mathbb{N}$, по теореме 2.2.1 $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau];\mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(l)}(t_0) = z_l$ для $l = 0, 1, \ldots, m-1$.

Для $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $x \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{Lap}[D^\beta Z_l(t)x](\lambda) = \lambda^{\beta-l-1} R_\lambda \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right) x - \lambda^{\beta-l-1} x =$$

$$= \lambda^{\beta-l-1} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k} A_k x,$$

$$\left\| \lambda^{\beta-l-1} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k} A_k x \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{C\|x\|_{\mathcal{D}}}{|\lambda|^{\alpha-\beta+l+1-\alpha_{n_l-1}}},$$

$$D^\beta Z_l(0)x = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\beta-l-1}R_\lambda\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k}A_k e^{\lambda t}xd\lambda = 0,$$

так как для $k \le n_l - 1$ имеем $l > m_k - 1$, значит, $l \ge \alpha_k$, $\alpha - \beta + l + 1 - \alpha_k \ge \alpha - \beta + 1 > 1$. Поэтому $D^\beta Z_l(t)x \in C([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$.

По лемме 2.2.1

$$\|D^l Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|Y_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le Ct^{\alpha-l-1}, \quad l = 0,1,\dots,m-1, \tag{2.3.5}$$

$$D^l\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds|_{t=t_0} = \int\limits_{t_0}^{t} Y_l(t-s)B^z(s)ds|_{t=t_0} = 0, \;\; l = 0,1,\dots,m-1,$$

где функция $B^z(s)$ непрерывна по s на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$ в норме $\mathcal{Z}$. Поэтому при $i = 1,2,\dots,r$

$$\|D^{\gamma_i-m+l}Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|Y_{\gamma_i-m+l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le Ct^{m-\gamma_i-l+\alpha-1}, \quad l = 0,1,\dots,m, \tag{2.3.6}$$

$$D^{\gamma_i-m+l}Y_0(0) = \lim_{t\to 0+}Y_{\gamma_i-m+l}(t) = 0, \quad l = 0,1,\dots,m-1,$$

так как $m-\gamma_i-l+\alpha-1 \ge \alpha-\gamma_i > 0$ при $l = 0,1,\dots,m-1$. Следовательно, при $l = 0,1,\dots,m-1$

$$D^l|_{t=t_0}\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds = 0,$$

$$D^{\gamma_i-m+l}\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds = D^l\int\limits_{t_0}^{t} J^{m-\gamma_i}Y_0(t-s)B^z(s)ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} D^{\gamma_i-m+l}Y_0(t-s)B^z(s)ds,$$

$$D^{\gamma_i-m+l}|_{t=t_0}\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds = 0, \quad l = 0,1,\dots,m-1,$$

$$D^{\gamma_i}\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds = D^m\int\limits_{t_0}^{t} J^{m-\gamma_i}Y_0(t-s)B^z(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} Y_{\gamma_i}(t-s)B^z(s)ds,$$

в силу (2.3.6)

$$\left\|\lim_{t\to t_0+} D^{\gamma_i}\int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B^z(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le \lim_{t\to t_0+} C_1(t-t_0)^{\alpha-\gamma_i}\max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} = 0.$$

При этом

$$\max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} \le \max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^z(s)-B^{\tilde z}(s)\|_{\mathcal{Z}} + \max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^{\tilde z}(s)\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le q\sum_{i=1}^{r}\max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\gamma_i}z(s)-D^{\gamma_i}\tilde z(s)\|_{\mathcal{Z}} + \max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^{\tilde z}(s)\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le q\delta r + \max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^{\tilde z}(s)\|_{\mathcal{Z}} = C.$$

Таким образом, при $z_l\in\mathcal{D}$, $l=0,1,\dots,m-1$, $D^{\gamma_i}G(z)\in C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, при этом $D^{\gamma_i}G(z(t))|_{t=t_0}=\tilde z_i$, $i=1,2,\dots,r$, поэтому $G(z)\in S_{\tau,\delta}$ при достаточно малом $\tau>0$, не зависящем от z.

Для $x,y\in\mathcal{S}_{\tau,\delta}$, $l=0,1,\dots,m-1$ с учетом леммы 1.4.1 получаем

$$\|[G(x)]^{(l)}(t)-[G(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_{t_0}^{t} D^lY_0(t-s)[B^x(s)-B^y(s)]ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_l(t-t_0)^{\alpha-l}\sum_{j=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\gamma_j}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}} \le C\tau^{\alpha-l}d(x,y),$$

$$\|D^{\beta}G(x)(t)-D^{\beta}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_{t_0}^{t} D^{\beta}Y_0(t-s)[B^x(s)-B^y(s)]ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_{\beta}(t-t_0)^{\alpha-\beta}\sum_{j=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\gamma_j}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}} \le C\tau^{\alpha-\beta}d(x,y).$$

Таким образом, при достаточно малом $\tau>0$ для любых $x,y\in\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ имеем $d(G(x),G(y))\le d(x,y)/2$ и отображение G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$. Это единственное решение уравнения (2.3.3) в $C^{m-1,\beta}([t_0, t_0+\tau];\mathcal{Z})$, поэтому по лемме 2.3.2 это единственное решение задачи (2.3.1), (2.3.2) на выбранном отрезке $[t_0, t_0+\tau]$. $\square$

2.4. Глобальная разрешимость квазилинейного уравнения

Пусть $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^r \to \mathcal{Z}$ при некоторых $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$. Докажем теперь глобальное существование единственного решения, т. е. решения на любом заданном отрезке $[t_0, T]$.

Отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^r \to \mathcal{Z}$ называется липшицевым по $\bar{x} \in \mathcal{Z}^r$, если существует такое $q > 0$, что для любых $(t, \bar{x}), (t, \bar{y}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^r$ выполняется неравенство

$$\|B(t, \bar{x}) - B(t, \bar{y})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{i=1}^{r} \|x_i - y_i\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, *отображение* $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^r; \mathcal{Z})$ *липшицево по* $\bar{x}$. *Тогда задача* (2.3.1), (2.3.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, T]$.

Доказательство. При $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $\beta \in (\gamma_r, \alpha)$ зададим в пространстве $C^{m-1,\beta}([t_0, T];\mathcal{Z})$ отображение

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0)z_l + \int_{t_0}^{t} Y_0(t-s)B(s, D^{\gamma_1}z(s), D^{\gamma_2}z(s), \ldots, D^{\gamma_r}z(s))ds,$$

$t \in [t_0, T]$. Гельдеровость отображения $t \to B^z(t)$ доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2.3.1, поэтому $G(z) \in C^{m-1}([t_0, T];\mathcal{Z})$, для всех $k = 0, 1, \ldots, m-1$ $[G(z)]^{(k)}(t_0) = z_k$. Включение $D^\beta G(z) \in C([t_0, T];\mathcal{Z})$ доказывается так же, как в теореме 2.3.1. Поэтому $G(z) \in C^{m-1,\beta}([t_0, T];\mathcal{Z})$.

Как и при доказательстве теоремы 1.5.1, считаем, что $T - t_0 \geq 1$, в случае же $T - t_0 < 1$ дальнейшие рассуждения останутся справедливыми после замены $T - t_0$ на 1. Для $t \in [t_0, T]$, $j \in \mathbb{N}$, $y, z \in C^{m-1,\beta}([t_0, T];\mathcal{Z})$ по индукции докажем неравенство

$$\|G^j(x) - G^j(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq \frac{c^j(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+j-1}}{(j-1)!}\|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \quad (2.4.7)$$

при некотором $c > 0$, $\alpha_0 := \max\{m-1, \gamma_r\}$.

Действительно, для $j = 1$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем в силу (2.3.5) и леммы 1.4.1

$$\|[G(x)]^{(l)}(t) - [G(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-l-1}\|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq$$

$$\leq C_2 q\|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0},$$

а с учетом (2.3.6)

$$\|D^{\beta}G(x)(t) - D^{\beta}G(yz)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|B^x(s) - B^y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq$$

$$\leq C_2 q\|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0}.$$

Поэтому

$$\|G(x)-G(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq C_2(m+1)q\|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^{\alpha}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0}.$$

где $m+1$ — количество слагаемых в определении нормы в $C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})$.

Далее при $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\|[G^2(x)]^{(l)}(t) - [G^2(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-l-1}\|B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq$$

$$\leq C_2 q(T-t_0)^{\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} \|G(x) - G(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,s];\mathcal{Z})} ds \leq$$

$$\leq C_2^2(m+1)q^2(T-t_0)^{2\alpha}\|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+1},$$

$$\|D^{\beta}G^2(x)(t) - D^{\beta}G^2(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq C_1 \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\beta-1} \|B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq$$

$$\leq C_2 q (T-t_0)^{\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} \|G(x) - G(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,s];\mathcal{Z})} ds \leq$$

$$\leq C_2^2 (m+1) q^2 (T-t_0)^{2\alpha} \|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} (t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+1},$$

$$\|G^2(x) - G^2(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq (C_2(m+1)q)^2 (T-t_0)^{2\alpha} \|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} (t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+1}.$$

Продолжая аналогичным образом, имеем

$$\|G^3(x) - G^3(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq (C_2(m+1)q)^3 (T-t_0)^{3\alpha} \|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,t];\mathcal{Z})} \frac{(t-t_0)^{\alpha-\alpha_0+2}}{2}.$$

В предположениии, что неравенство (2.4.7) выполнено при константе $c = C_2(m+1)q(T-t_0)^{\alpha}$, $j = p$ получим справедливость такого неравенства при $j = p+1$.

Из (2.4.7) следует, что при $j \in \mathbb{N}$

$$\|G^j(x) - G^j(y)\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,T];\mathcal{Z})} \leq \frac{c^j (T-t_0)^{\alpha-\alpha_0+j-1}}{(j-1)!} \|x-y\|_{C^{m-1,\beta}([t_0,T];\mathcal{Z})}.$$

Поэтому если j достаточно велико, то G^j является сжимающим отображением в пространстве $C^{m-1,\beta}([t_0,T];\mathcal{Z})$, а значит, это отображение по теореме о неподвижной точке имеет единственную неподвижную точку в этом пространстве. Она также является единственной неподвижной точкой в пространстве $C^{m-1,\beta}([t_0,T];\mathcal{Z})$ отображения G, а значит, и единственным решением задачи (2.3.1), (2.3.2) на $[t_0,T]$ в силу леммы 2.3.2. $\square$

2.5. Приложения к начально-краевым задачам

Полученные результаты используются для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени.

2.5.1. Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора

Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_1} a_p\lambda^p$, $P_2^k(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_2^k} b_p^k\lambda^p$, $a_p, b_p^k \in \mathbb{R}$, $a_{\nu_1} \neq 0$, $b^k_{\nu_2^k} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\nu_0 := \max\{\nu_2^k : k = 1, 2, \ldots, n\} > \nu_1$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda v)(\xi) = \sum_{|q|\le 2\rho} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}v(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_jv)(\xi) = \sum_{|q|\le \rho_j} b_{jq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}v(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \ \ b_{jq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1+\cdots+q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_\rho$ регулярно эллиптичен [45]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ имеет область определения $D_{\Lambda_1} = H^{2\rho}_{\{B_j\}}(\Omega) := \{v \in H^{2\rho}(\Omega) : B_jv(\xi) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$, $\Lambda_1 v := \Lambda v$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [45]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля. Обозначим через $\{\varphi_s : s \in \mathbb{N}\}$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_s : s \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Возьмем $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \le 1 < \alpha < 2$, $h : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ и рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, 0) = u_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{2.5.1}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi, t) = 0,\ \ p = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1,\ \ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{2.5.2}$$

$$P_1(\Lambda)D_t^\alpha u(\xi, t) = \sum_{k=1}^n P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T]. \tag{2.5.3}$$

Положим $\mathcal{X} = \{v \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0,\ p = 0, 1, \ldots, \nu_1 - 1,\ j = 1, 2, \ldots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L = P_1(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M_k = P_2^k(\Lambda) \in$

$\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_k} = \{v \in H^{2\rho\nu_2^k}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0, p = 0,1,\dots,\nu_2^k - 1, j = 1,2,\dots,\rho, \xi \in \partial\Omega\}$, $k = 1,2,\dots,n$.

Если $P_1(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (2.5.1)–(2.5.3) представима в виде задачи (2.2.1), (2.2.2), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_k = L^{-1}M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, $f(t) = L^{-1}h(\cdot,t)$, $z_0 = u_0(\cdot)$, $z_1 = u_1(\cdot)$. Поэтому $\mathcal{D} = \{v \in H^{2\rho\nu_0}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0, p = 0,1,\dots,\nu_0 - 1, j = 1,2,\dots,\rho, \xi \in \partial\Omega\}$ — плотное в $\mathcal{X}$ множество.

Лемма 2.5.1. *Пусть в условиях данного параграфа $\nu_0 > \nu_1$, $\alpha \in (0,2)$, $\alpha - \alpha_1 < 2$ и выполняются следующие условия:*

(i) *в случае нечетного $\nu_0 - \nu_1$ при $\nu_2^k = \nu_0$ выполняется $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1} > 0$;*

(ii) *в случае четного $\nu_0 - \nu_1$ при $\nu_2^k = \nu_0$ выполняется $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1} < 0$.*

Тогда $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$.

Доказательство. Для $v \in \mathcal{D}$

$$\left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right) v = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^\alpha Q_s(\lambda)\langle v, \varphi_s\rangle \varphi_s,$$

где

$$Q_s(\lambda) := 1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} \frac{P_2^k(\lambda_s)}{P_1(\lambda_s)}.$$

При фиксированном $s \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} Q_s(\lambda) = 1$. Выберем для $N \in \mathbb{N}$ настолько большое $R > 0$, что $|Q_s(\lambda)| \geq 1/2$ при $s = 1,2,\dots,N$, $|\lambda| > R$.

Так как $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = -\infty$, при $s \to \infty$

$$\frac{P_2^k(\lambda_s)}{P_1(\lambda_s)} \sim a_{\nu_1}^{-1} b^k_{\nu_2^k} \lambda_s^{\nu_2^k - \nu_1},\ k = 1,2,\dots,n,$$

поэтому для фиксированного λ при $s \to \infty$

$$Q_s(\lambda) \sim 1 - \sum_{\nu_2^k = \nu_0} \lambda^{\alpha_k - \alpha} a_{\nu_1}^{-1} b^k_{\nu_2^k} \lambda_s^{\nu_0 - \nu_1}. \tag{2.5.4}$$

При достаточно больших s $\lambda_s < 0$ в силу свойств $\sigma(\Lambda_1)$, поэтому в силу условий (i), (ii) данной леммы все коэффициенты при степенях λ в выражении

(2.5.4) отрицательные. Выберем $a_0 > R$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/(\alpha-\alpha_1))$ такими, чтобы шар $B_R := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\}$ лежал слева от сектора S_{θ_0,a_0}. Тогда при $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, поскольку множества $(S_{\theta_0,a_0})^{\alpha_k-\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, являются подмножествами сектора $S_{(\alpha-\alpha_1)\theta_0,0}$, имеем

$$|Q_s(\lambda)| \geq \operatorname{dist}(-1, S_{(\alpha-\alpha_1)\theta_0,0}) = \sin(\pi - (\alpha-\alpha_1)\theta_0) = \sin((\alpha-\alpha_1)\theta_0) > 0.$$

Таким образом, для каждого $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\left\| \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right) v \right\|_{\mathcal{X}} \geq \sin((\alpha-\alpha_1)\theta_0)|\lambda|^\alpha \|v\|_{\mathcal{X}},$$

следовательно, существует обратный оператор $R_\lambda = \left(\lambda^\alpha I - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ и для каждого $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{C}{|\lambda|^{\alpha-1}|\lambda-a|}$.

Для $v \in \mathcal{D}$, $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем при $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\left\| R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-\alpha} A_k \right) v \right\|_{\mathcal{X}}^2 \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\left(1 + \sum\limits_{k=n_l}^{n} |\lambda|^{2(\alpha_k-\alpha)} \frac{|P_2^k(\lambda_s)|^2}{|P_1(\lambda_s)|^2}\right)(1+\lambda_s^{2\nu_1})|\langle v, \varphi_s\rangle|^2}{|\lambda|^{2\alpha}|Q_s(\lambda)|^2} \leq$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_2|\lambda_s|^{2(\nu_0-\nu_1)}\left(|\lambda_s|^{-2(\nu_0-\nu_1)} + \sum\limits_{\nu_2^j=\nu_0} |a_{\nu_1}|^{-2}|b^j_{\nu_2^j}|^2|\lambda|^{2(\alpha_k-\alpha)}\right)(1+\lambda_s^{2\nu_1})|\langle v, \varphi_s\rangle|^2}{|\lambda|^{2\alpha}|\lambda_s|^{2(\nu_0-\nu_1)}\left|\lambda_s^{-(\nu_0-\nu_1)} - \sum\limits_{\nu_2^j=\nu_0} a_{\nu_1}^{-1} b^j_{\nu_2^j} \lambda^{\alpha_k-\alpha}\right|^2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_3(1+\lambda_s^{2\nu_1})|\langle v, \varphi_k\rangle|^2}{|\lambda|^{2(\alpha-1)}|\lambda-a|^2} \leq \frac{C_3\|v\|_{\mathcal{X}}^2}{|\lambda|^{2(\alpha-1)}|\lambda-a|^2}.$$

$\square$

В силу теоремы 2.2.1 при любых $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, при условии $h \in C^\gamma([t_0, T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0, 1]$, существует единственное решение задачи (2.5.1)–(2.5.3).

Пример. Возьмем $P_1(\lambda)=\lambda^2$, $P_2^1(\lambda)=b$, $P_2^2(\lambda)=c_0+c_1\lambda^3$, $d=1$, $\Omega=(0,\pi)$, $\rho=1$, $\Lambda u=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$, $B_1=I$, $\alpha_1=1/4$, $\alpha_2=1$, $\alpha=3/2$, $h\equiv 0$. Тогда $m=2$ и задача (2.5.1)–(2.5.3) имеет вид

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}D_t^{3/2}u(\xi,t)=bD_t^{1/4}u(\xi,t)+\left(c_0+c_1\frac{\partial^6}{\partial\xi^6}\right)D_t^1u(\xi,t),\ \ (\xi,t)\in(0,\pi)\times\mathbb{R}_+,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(\pi,t)=\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}(0,t)=\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}(\pi,t)=0,\ \ t\in\mathbb{R}_+,$$

$$u(\xi,0)=u_0(\xi),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,0)=u_1(\xi),\ \ \xi\in(0,\pi).$$

2.5.2. Один класс начально-краевых задач для квазилинейных уравнений

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi,0)=u_l(\xi),\ l=0,1,\dots,m-1,\quad \xi\in\Omega, \tag{2.5.5}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi,t)=0,\ \ p=0,1,\dots,\nu_0-1,\ \ j=1,2,\dots,\rho,\ \ (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{2.5.6}$$

$$\begin{gathered}P_1(\Lambda)D_t^{\alpha}u(\xi,t)=\sum_{k=1}^n P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t)+\\ +H(\xi,D_t^{\gamma_1}u(\xi,t),D_t^{\gamma_2}u(\xi,t),\dots,D_t^{\gamma_r}u(\xi,t)),\ \ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],\end{gathered} \tag{2.5.7}$$

при $H:\Omega\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$, $\nu_1<\nu_0$.

Положим $\mathcal{X}:=\{v\in H^{2\rho\nu_1+\rho_0}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\ j=1,2,\dots,\rho,\ p=0,1,\dots,\nu_1-1,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $\rho_0\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Y}:=H^{\rho_0}(\Omega)$; $L:=P_1(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k:=P_2^k(\Lambda)\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_k}=\{v\in H^{2\rho\nu_2^k}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\ j=1,2,\dots,\rho,\ p=0,1,\dots,\nu_2^k-1,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $k=1,2,\dots,n$.

Если $P_1(\lambda_s)\neq 0$ для всех $s\in\mathbb{N}$, то задача (2.5.5)–(2.5.7) имеет вид (2.3.1), (2.3.2), где $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $A_k=L^{-1}M_k\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, $z_l=u_l(\cdot)$, $l=0,1,\dots,m-1$, $B(y_1,y_2,\dots,y_r)=L^{-1}H(\cdot,y_1,y_2,\dots,y_r)$.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\le 1<\alpha<2$, $\alpha-\alpha_1<2$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r<\alpha$, $B_1=I$, *спектр* $\sigma(A_1)$ *не содержит начала координат и нулей* *многочлена* P_1, $2\rho\nu_1+\rho_0 > d/2$, $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $H \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^r;\mathbb{R})$, $\nu_0 > \nu_1$ *и выполняются следующие условия:*

(i) *в случае нечетного* $\nu_0 - \nu_1$ *при* $\nu_2^k = \nu_0$ *выполняется* $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1} > 0$;

(ii) *в случае четного* $\nu_0 - \nu_1$ *при* $\nu_2^k = \nu_0$ *выполняется* $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1} < 0$.

Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (2.5.5)–(2.5.7). *Если все частные производные* H *по* y_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *ограничены, то единственное решение задачи* (2.5.5)–(2.5.7) *существует на всем отрезке* $[t_0, T]$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.7.2, с использованием теорем 1.4.1, 2.5.1, 2.3.1 и 2.4.1 получим требуемое. $\square$

Пример. В условиях примера из предыдущего раздела начально-краевая задача

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi,t) = \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}(0,t) = \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}(\pi,t) = 0, \ \ t \in (0,T],$$

$$u(\xi,0) = u_0(\xi), \ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,0) = u_1(\xi), \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,0) = u_2(\xi), \ \ \xi \in (0,\pi),$$

для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} D_t^{3/2} u(\xi,t) = bD_t^{1/4} u(\xi,t) + \left(c_0 + c_1 \frac{\partial^6}{\partial \xi^6}\right) D_t^1 u(\xi,t) +$$

$$+ d_1 \cos D_t^{-7/2} u(\xi,t) + d_2 \operatorname{arctg} D_t^{4/3} u(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in (0,\pi)\times(0,T],$$

однозначно разрешима на всем отрезке $[0, T]$.

2.5.3. Некоторые начально-краевые задачи для систем уравнений динамики вязкоупругих сред

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(\xi,0) = v_l(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.5.8}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{2.5.9}$$

$$D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi\Delta D_t^\beta v(\xi,t)+\nu\Delta D_t^\gamma v(\xi,t)+\kappa\Delta D_t^\delta v(\xi,t)-r(\xi,t)+ \\ +h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{2.5.10}$$

$$\nabla\cdot v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{2.5.11}$$

в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi,\nu,\kappa\in\mathbb{R}$, $m-1<\alpha\le m\in\{1,2\}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, некоторые из чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ могут быть отрицательными. Здесь скорость $v=(v^1,v^2,\dots,v^d)$ и градиент давления $r=(r^1,r^2,\dots,r^d)=\nabla p$ неизвестны, функция $h:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^d$ задана.

Если $\alpha=\beta=1$, $\gamma=0$, $\delta<0$, то система (2.5.10), (2.5.11) является линеаризацией обобщенной системы Осколкова динамики вязкоупругой жидкости с ядром $K(s,t)=\kappa(t-s)^{-\delta-1}/\Gamma(-\delta)$ в интегральном операторе (см. систему (2.1.1), (2.1.2) в [122]). При $\alpha=1$, $\beta>0$, $\gamma=0$, $\kappa=0$ это будет линеаризованная система динамики жидкости Кельвина — Фойгта (см. [103] для $\beta=1$ и [95] для дробного $\beta>0$; если, кроме того, $\nu=0$, то (2.5.10), (2.5.11) — линеаризованная система динамики жидкости Скотта-Блэра.

Положим $\mathbb{L}_2:=(L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1:=(H^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2:=(H^2(\Omega))^d$, замкнутое подпространство $\mathcal{L}:=\{z\in(C_0^\infty(\Omega))^d:\nabla\cdot z=0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Введем обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2:=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$, через $\mathbb{H}_\pi$ обозначим ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в пространстве $\mathbb{L}_2$, $\Sigma:\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi=I-\Sigma:\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\pi$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $B:=\Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, который сгущается только при $-\infty$ [24].

Система (2.5.10), (2.5.11) эквивалентна уравнению

$$D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi BD_t^\beta v(\xi,t)+\nu BD_t^\gamma v(\xi,t)+\kappa BD_t^\delta v(\xi,t)+\Sigma h(\xi,t), \\ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{2.5.12}$$

при

$$r(\xi,t)=\chi\Pi\Delta D_t^\beta v(\xi,t)+\nu\Pi\Delta D_t^\gamma v(\xi,t)+\kappa\Pi\Delta D_t^\delta v(\xi,t)+\Pi h(\xi,t), \\ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T].$$

Поэтому будем рассматривать задачу (2.5.8), (2.5.9), (2.5.12).

Если $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$, $\alpha - \delta < 2$, то возьмем $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma$, $A_1 = \kappa B$, $A_2 = \nu B$, $A_3 = \chi B$ являются замкнутыми плотно определенными операторами, $\mathcal{D} = D_B = \mathbb{H}^2_\sigma$. По аналогии с доказательством леммы 2.5.1, используя разложение по собственным функциям, нетрудно показать, что при $\chi, \nu, \kappa > 0$ выполняется включение $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}^3_{\alpha,G}$ и по теореме 2.2.1 для любых $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\Sigma h \in C^\gamma([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$, $\gamma \in (0, 1]$, существует единственное решение задачи (2.5.8), (2.5.9), (2.5.12). Следовательно, (2.5.8)–(2.5.11) также имеет единственное решение.

Пусть $\beta > \alpha > \gamma > \delta$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, тогда, поскольку спектр оператора B не содержит нуля, перепишем (2.5.12) в виде

$$D^\beta_t v(\xi, t) = \chi^{-1} B^{-1} D^\alpha_t v(\xi, t) - \chi^{-1} \nu D^\gamma_t v(\xi, t) - \chi^{-1} \kappa D^\delta_t v(\xi, t) - B^{-1} \Sigma h(\xi, t).$$

Положим $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma$, $A_1 = \chi^{-1} B^{-1}$, $A_2 = -\chi^{-1} \nu I$, $A_3 = -\chi^{-1} \kappa I$ — ограниченные операторы и по теореме 1.3.1 для любых $v_0, v_1 \in \mathbb{H}_\sigma$ при $\Sigma h \in C([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$ задача (2.5.8), (2.5.9), (2.5.12), а значит, и задача (2.5.8)–(2.5.11) имеет единственное решение.

3. Вырожденные эволюционные уравнения с производными Герасимова — Капуто

В третьей главе исследованы вопросы существования и единственности решения начальных задач для уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто и с вырожденным оператором при старшей из них. Новизна используемого подхода состоит в следующем.

Вырожденное уравнение с одной производной в работах предшественников содержит два оператора (при производной и при искомой функции) и по этим операторам строятся пары инвариантных подпространств (в двух пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, откуда ($\mathcal{X}$) и куда ($\mathcal{Y}$) действуют операторы), что подразумевает согласованное с подпространствами действие операторов из уравнения. Исходное уравнение с использованием пар подпространств редуцируется к системе двух уравнений на двух подпространствах, одно из которых является невырожденным, а второе вырожденное, но имеет простую структуру, например, вообще не содержит производных, является алгебраическим.

В случае же нескольких операторов в уравнении первая мысль — построить аналогичные подпространства по всему набору операторов. Однако это оказалось невозможным из алгебраических соображений (невозможно построить аналогичные случаю двух операторов проекторы в силу принципиального отсутствия аналога резольвентного тождества для пучков нескольких операторов). Новизна подхода данной работы состоит в том, что пары инвариантных подпространств строятся по паре операторов при двух старших производных, а действие остальных операторов согласовывается с полученными подпространствами дополнительными условиями. Причем предложены такие условия согласования довольно общего вида, проверка выполнения которых осуществлена, например, в задаче для системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде. В итоге исходное вырожденное уравнение редуцируется к системе двух невырожденных уравнений на двух подпространствах.

Такой подход осуществлен и в случае спектрально ограниченной пары операторов при старших производных и в случае секториальной пары, его можно назвать принципиально новым. Поскольку получаемые два уравнения имеют разный порядок, то начальная задача для исходного уравнения имеет довольно экзотический вид: несколько младших условий Коши задается для всей искомой функции, а начальные условия для нескольких старших производных заданы, вообще говоря, не для всей функции, а только для ее проекции на одно из подпространств.

3.1. Вырожденные линейные уравнения со спектрально ограниченной парой операторов

Будем предполагать, что $n \in \mathbb{N}$, $L, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_{M_n} — область определения оператора M_n, на которой задана норма графика $\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M_n \cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Обозначим $\rho^L(M_n) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M_n) := (\mu L - M_n)^{-1}L$, $L^L_\mu(M_n) := L(\mu L - M_n)^{-1}$.

Оператор M_n называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M_n)) \,.$$

В этом случае пару операторов (L, M_n) будем также называть спектрально ограниченной.

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M_n определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M_n)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M_n)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}), \tag{3.1.1}$$

где $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [119, с. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_q $(M_{k,q})$ обозначим сужение оператора L (M_k) на

$\mathcal{X}^q$ ($D_{M_{n,q}} := D_{M_n} \cap \mathcal{X}^r$ при $k = n$), $q = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При этом известно (см. [119, с. 90, 91]), что $LP = QL$, $M_n Px = QM_n x$ для $x \in D_{M_n}$, поэтому $M_{n,1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1\big)$, $M_{n,0} \in \mathcal{C}l\big(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0\big)$, $L_q \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q\big)$, $q = 0, 1$; кроме того, в рассматриваемой ситуации существуют операторы $M_{n,0}^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0\big)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1\big)$. Оператор M_n будем называть $(L, 0)$-ограниченным, если L_0 — нулевой оператор.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{aligned} x^{(l)}(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \\ (Px)^{(l)}(0) = x_l, \quad l = m_n, m_n + 1, \ldots, m - 1, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

для линейного неоднородного уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k D_t^{\alpha_k} x(t) + g(t), \tag{3.1.3}$$

которое называется вырожденным в случае $\ker L \neq \{0\}$. Предполагается, что, как и прежде, $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $g \in ([0, T]; \mathcal{Y})$.

Решением задачи (3.1.2), (3.1.3) будем называть такую функцию $x \in AC^{m_n}([0, T]; \mathcal{X})$, для которой $Px \in AC^m([0, T]; \mathcal{X})$, $D_t^{\alpha_k} x \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $k = 1, 2 \ldots, n$, $D_t^\alpha Lx, M_n D_t^{\alpha_n} x \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, выполняются равенства (3.1.2) и (3.1.3) при всех $t \in [0, T]$.

Замечание 3.1.1. Заметим, что при условии $(L, 0)$-ограниченности оператора M_n гладкость функции Px такая же, как у функции Lx, поскольку $Px = L_1^{-1} Lx$, $Lx = LPx$.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ $(L, 0)$-*ограничен,* $M_k P = QM_k$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, $x_l \in \mathcal{X}$ *при* $l = 0, 1, \ldots, m_n - 1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n + 1, \ldots, m - 1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.1.2), (3.1.3).

Доказательство. Нетрудно показать, что из условий $M_kP = QM_k$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ сразу следует, что $M_{k,q} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q\big)$, $q = 0, 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Подействуем на (3.1.3) оператором $L_1^{-1}Q \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}^1)$ и получим уравнение

$$D_t^{\alpha} v(t) = \sum_{k=1}^{n} L_1^{-1} M_k D_t^{\alpha_k} v(t) + L_1^{-1} Q g(t), \tag{3.1.4}$$

где $v(t) = Px(t)$. Если же аналогичным образом используем оператор $M_{n,0}^{-1}Q_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}^0)$, то получится уравнение

$$D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1} M_k D_t^{\alpha_k} w(t) - M_{n,0}^{-1} Q_0 g(t), \tag{3.1.5}$$

$w(t) = P_0x(t)$. При этом использованы равенства $M_kP_0 = M_k - QM_k = Q_0M_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Уравнения (3.1.4) и (3.1.5) снабжены начальными условиями

$$v^{(l)}(0) = Px_l, \ \ l = 0, 1, \dots, m-1, \tag{3.1.6}$$

$$w^{(l)}(0) = P_0x_l, \ \ l = 0, 1, \dots, m_n-1. \tag{3.1.7}$$

По теореме 1.3.1 каждая из задач (3.1.4), (3.1.6) и (3.1.5), (3.1.7) имеет единственное решение, при этом оно имеет вид соответственно

$$v(t) = \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t) Px_l + \int_0^t X_1(t-s) L_1^{-1} Q g(s) ds$$

и

$$w(t) = -\sum_{l=0}^{m_n-1} X_{l,0}(t) P_0 x_l - \int_0^t X_0(t-s) M_{n,0}^{-1} Q_0 g(s) ds,$$

где для $t > 0$

$$X_{l,1}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^1} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} L_1^{-1} M_{k,1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1} L_1^{-1} M_{k,1}\right) e^{\lambda t} d\lambda, \quad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$X_1(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha}I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}L_1^{-1}M_{k,1}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$X_{l,0}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n}I-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_k}M_{n,0}^{-1}M_{k,0}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\lambda^{\alpha_n-l-1}I-\sum_{k=(n-1)_l}^{n-1}\lambda^{\alpha_k-l-1}M_{n,0}^{-1}M_{k,0}\right)e^{\lambda t}d\lambda,\quad l=0,1,\dots,m_n-1,$$

$$X_0(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n}I-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_k}M_{n,0}^{-1}M_{k,0}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Числа $(n-1)_l$ определяются здесь по $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1},m_n$ так же, как n_l определены через $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,m$. Контуры γ^1, γ^0 строятся так же, как контур γ для невырожденного случая (см. §1.2), но с использованием вместо r_0 константы

$$r_{0,1} := \left(\max\left\{1, 2n\left\|L_1^{-1}M_{k,1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)} : k=1,2,\dots,n\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}},$$

$$r_{0,0} := \left(\max\left\{1, 2(n-1)\left\|M_{n,0}^{-1}M_{k,0}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)} : k=1,2,\dots,n-1\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}}$$

соответственно. □

Замечание 3.1.2. Из доказательства теоремы 3.1.1 следует, что задача Коши

$$x^{(l)}(0)=x_l,\ l=0,1,\dots,m-1,$$

для уравнения (3.1.3) разрешима лишь при выполнении дополнительных условий

$$x_{m_n+l}=w^{(m_n+l)}(0),\quad l=0,1,\dots,m-m_n-1,$$

связывающих между собой начальные данные задачи.

Замечание 3.1.3. Нетрудно заметить, что если оператор M_n $(L,0)$-ограничен, условия $(Px)^{(l)}(0)=x_l\in\mathcal{X}^1$ при $l=m_n,m_n+1,\dots,m-1$ эквивалентны условиям $(Lx)^{(l)}(0)=y_l=Lx_l\in\mathcal{Y}^1$.

3.2. Вырожденные квазилинейные уравнения со спектрально ограниченной парой операторов

Рассмотрим теперь начальную задачу

$$x^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1,$$
$$(Px)^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1, \tag{3.2.1}$$

для вырожденного квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{k=1}^{n} M_k D_t^{\alpha_k} x(t) + N(t, D_t^{\gamma_1} x(t), D_t^{\gamma_2} x(t), \dots, D_t^{\gamma_r} x(t)), \tag{3.2.2}$$

т. е. в случае $\ker L \neq \{0\}$. Предполагается, как прежде, $n, r \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r < \alpha$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^r$, $N \in C(U, \mathcal{Z})$.

Решением задачи (3.2.1), (3.2.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем функцию $x \in AC^{m_n}([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, для которой $Px \in AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, $D_t^\alpha Lx, M_n D_t^{\alpha_n} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $D_t^{\alpha_k} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, $k = 1, 2 \dots, n$, $D_t^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, $i = 1, 2, \dots, r$, выполнены включение $(t, D_t^{\gamma_1} x(t), D_t^{\gamma_2} x(t), \dots, D_t^{\gamma_r} x(t)) \in U$, равенство (3.2.2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ и условия (3.2.1).

Обозначим $V = U \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^r)$, $\tilde{v}_i := D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0} \tilde{v}(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, где

$$\tilde{v}(t) := Px_0 + (t - t_0)Px_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} Px_2 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} Px_{m-1}.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ $(L, 0)$*-ограничен,* $M_k P = QM_k$*,* $k = 1, 2, \dots, n-1$*,* $N : U \to \mathcal{Y}$*, для каждого* $(t, z_1, z_2, \dots, z_r) \in U$*, такого, что* $(t, Pz_1, Pz_2, \dots, Pz_r) \in U$*, выполняется* $N(t, z_1, z_2, \dots, z_r) = N_1(t, Pz_1, Pz_2, \dots, Pz_r)$ *для некоторого оператора* $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$*, который локально липшицев по* $v_1, v_2, \dots, v_r$*,* $(t_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_r) \in V$*,* $x_l \in \mathcal{X}^1$ *для* $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$*. Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Из условий $M_k P = QM_k$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ следует, что $M_{k,q} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q)$, $q = 0, 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Действуя на уравнение

(3.2.2) оператором $L_1^{-1}Q \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X}^1)$, получим уравнение

$$D_t^{\alpha}v(t) = \sum_{k=1}^{n} L_1^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}v(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D_t^{\gamma_1}v(t), \dots, D_t^{\gamma_r}v(t)), \qquad (3.2.3)$$

где $v(t) = Px(t)$. Действуя $M_{n,0}^{-1}Q_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, получаем

$$D_t^{\alpha_n}w(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}w(t) - M_{n,0}^{-1}Q_0N_1(t, D_t^{\gamma_1}v(t), \dots, D_t^{\gamma_r}v(t)), \ (3.2.4)$$

где $w(t) = P_0x(t)$.

В силу (3.2.1) уравнениям (3.2.3) и (3.2.4) соответствуют начальные условия

$$v^{(l)}(t_0) = Px_l, \ l = 0, 1, \dots, m-1, \qquad (3.2.5)$$

$$w^{(l)}(t_0) = P_0x_l, \ l = 0, 1, \dots, m_n-1, \qquad (3.2.6)$$

соответственно. По теореме 1.4.1 задача Коши (3.2.3), (3.2.5) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда уравнение (3.2.4) является линейным неоднородным относительно w и по теореме 1.3.1 задача Коши (3.2.6) для этого уравнения однозначно разрешима. $\square$

Обозначим $W = U \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^0)^r)$, $\tilde{w}_i := D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde{w}(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, где

$$\tilde{w}(t) := P_0x_0 + (t-t_0)P_0x_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!}P_0x_2 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m_n-1}}{(m_n-1)!}P_0x_{m_n-1}.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть оператор $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L, 0)$-ограничен, $M_kP = QM_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, $N : U \to \mathcal{Y}$, для всех $(t, z_1, z_2, \dots, z_r) \in U$, таких что $(t, P_0z_1, P_0z_2, \dots, P_0z_r) \in U$ выполняется $N(t, z_1, z_2, \dots, z_r) = N_0(t, P_0z_1, P_0z_2, \dots, P_0z_r)$ для некоторого оператора $N_0 \in C(W;\mathcal{Y})$, который является локально липшицевым по $w_1, w_2, \dots, w_r$, $(t_0, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_r) \in W$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ для $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (3.2.1), (3.2.2) на $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, сведем задачу (3.2.1), (3.2.2) к задаче (3.2.5), (3.2.6) для системы уравнений

$$D_t^{\alpha}v(t)=\sum_{k=1}^{n}L_1^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}v(t)+L_1^{-1}QN_0(t,D_t^{\gamma_1}w(t),\dots,D_t^{\gamma_r}w(t)), \quad (3.2.7)$$

$$D_t^{\alpha_n}w(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}M_{n,0}^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}w(t)-M_{n,0}^{-1}Q_0N_0(t,D_t^{\gamma_1}w(t),\dots,D_t^{\gamma_r}w(t)) \quad (3.2.8)$$

при $v(t)=Px(t)$, $w(t)=P_0x(t)$. Так как $\gamma_r<\alpha_n$, по теореме 1.4.1 задача Коши (3.2.6), (3.2.8) имеет единственное решение на некотором отрезке $[t_0,t_1]$, а по теореме 1.3.1 существует единственное решение задачи (3.2.5) для линейного уравнения (3.2.7) на $[t_0,t_1]$. □

Обозначим $\tilde{x}_i:=D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde{x}(t)$, $i=1,2,\dots,r$, где

$$\tilde{x}(t):=x_0+(t-t_0)x_1+\frac{(t-t_0)^2}{2!}x_2+\dots+\frac{(t-t_0)^{m_n-1}}{(m_n-1)!}x_{m_n-1}.$$

Теорема 3.2.3. *Пусть* $L,M_k\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k=1,2,\dots,n-1$, *оператор* $M_n\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP=QM_k$, $k=1,2,\dots,n-1$, *отображение* $N\in C(U;\mathcal{Y}^1)$ *локально липшицево по* $y_1,y_2,\dots,y_r$, $(t_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_r)\in U$, $x_l\in\mathcal{X}^1$ *при* $l=m_n,m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда при некотором* $t_1>t_0$ *существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Аналогично доказательству двух предыдущих теорем получаем

$$\begin{gathered}D_t^{\alpha}v(t)=\sum_{k=1}^{n}L_1^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}v(t)+\\ +L_1^{-1}QN(t,D_t^{\gamma_1}(v(t)+w(t)),\dots,D_t^{\gamma_r}(v(t)+w(t))),\end{gathered} \quad (3.2.9)$$

$$D_t^{\alpha_n}w(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}M_{n,0}^{-1}M_kD_t^{\alpha_k}w(t). \quad (3.2.10)$$

Тогда по теореме 1.3.1 существует единственное решение задачи Коши (3.2.6), (3.2.10) на $[t_0,\infty)$, и по теореме 1.4.1 задача (3.2.5), (3.2.9) имеет единственное решение на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Мы здесь использовали тот факт, что нелинейное отображение

$$(v_1, v_2, \dots, v_r) \to L_1^{-1} Q N(t, v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_r + w_r)$$

при заданных $w_1, w_2, \dots, w_r$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1. $\square$

Теорема 3.2.4. *Пусть $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, оператор $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ $(L, 0)$-ограничен, $M_k P = Q M_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, отображение $N \in C(U; \mathcal{Y}^0)$ локально липшицево по $y_1, \dots, y_r$, $(t_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_r) \in U$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ при $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Здесь мы имеем систему уравнений

$$D_t^{\alpha} v(t) = \sum_{k=1}^{n} L_1^{-1} M_k D_t^{\alpha_k} v(t), \tag{3.2.11}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1} M_k D_t^{\alpha_k} w(t) + \\ + M_0^{-1} Q_0 N(t, D_t^{\gamma_1}(v(t) + w(t)), \dots, D_t^{\gamma_r}(v(t) + w(t))). \end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Из теоремы 1.3.1 следует однозначная разрешимость задачи (3.2.5), (3.2.11) и в силу теоремы 1.4.1 существует единственное решение задачи (3.2.6), (3.2.12), поскольку $\gamma_r < \alpha_n$. $\square$

Если же отображение $N \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^r; \mathcal{Z})$, получим аналогичные утверждения о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений.

Теорема 3.2.5. *Пусть оператор $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ $(L, 0)$-ограничен, $M_k P = Q M_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $N : U \to \mathcal{Y}$, для каждого $(t, z_1, z_2, \dots, z_r) \in U$, такого, что $(t, P z_1, P z_2, \dots, P z_r) \in U$, выполняется $N(t, z_1, z_2, \dots, z_r) = N_1(t, P z_1, P z_2, \dots, P z_r)$ для некоторого оператора $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$, который липшицев по $v_1, v_2, \dots, v_r$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0, T]$.

Теорема 3.2.6. *Пусть оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, $N : U \to \mathcal{Y}$, *для всех* $(t,z_1,z_2,\dots,z_r) \in U$, *таких что* $(t,P_0z_1,P_0z_2,\dots,P_0z_r) \in U$ *выполняется* $N(t,z_1,z_2,\dots,z_r) = N_0(t,P_0z_1,P_0z_2,\dots,P_0z_r)$ *для некоторого оператора* $N_0 \in C(W;\mathcal{Y})$, *который является липшицевым по* $w_1,w_2,\dots,w_r$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n,m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0,T]$.

Теорема 3.2.7. *Пусть* $L,M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *отображение* $N \in C(U;\mathcal{Y}^1)$ *липшицево по* $y_1,y_2,\dots,y_r$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *при* $l = m_n,m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0,T]$.

Теорема 3.2.8. *Пусть* $L,M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, *отображение* $N \in C(U;\mathcal{Y}^0)$ *липшицево по* $y_1,y_2,\dots,y_r$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *при* $l = m_n,m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2.1), (3.2.2) *на* $[t_0,T]$.

3.3. Линейная обратная задача для вырожденного уравнения со спектрально ограниченной парой операторов

Рассмотрим линейную обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D_t^{\alpha}Lx(t) = \sum_{j=1}^{n} M_jD_t^{\alpha_j}x(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{3.3.1}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\dots,n$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$\begin{gathered} x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0,1,\dots,m_n-1, \\ (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n,m_n+1,\dots,m-1, \end{gathered} \tag{3.3.2}$$

и условием переопределения

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{3.3.3}$$

где $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации.

Решением задачи (3.3.1), (3.3.2) (при заданном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть функцию $x \in AC^{m_n}([0, T]; \mathcal{X})$, для которой $Px \in AC^m([0, T]; \mathcal{X})$, $D_t^{\alpha_k} x \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $k = 1, 2 \dots, n$, $D_t^\alpha Lx, M_n D_t^{\alpha_n} x \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, выполняются равенства (3.3.1) при всех $t \in [0, T]$ и (3.3.2).

Решением обратной задачи (3.3.1)–(3.3.3) (при неизвестном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть пару $(x(t), u)$, где $u \in \mathcal{Y}$, функция $x(t)$ является решением задачи (3.3.1), (3.3.2) при этом $u \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющим условию переопределения (3.3.3). Для краткости решением также будем называть только соответствующее u.

Задача (3.3.1)–(3.3.3) называется корректной, если для любых $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1, 2, \dots, m_n - 1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$, $x_T \in \mathcal{X}$ существует единственное решение $(x(t), u)$ задачи (3.3.1)–(3.3.3), при этом

$$\|u\|_{\mathcal{Y}} \le C \left(\sum_{l=1}^{m-1} \|x_l\|_{\mathcal{X}} + \|x_T\|_{\mathcal{X}} \right),$$

где C не зависит от $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1, 2, \dots, m_n - 1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$.

Если оператор M_n $(L, 0)$-ограничен и выполняются условия $M_k P = QM_k$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, то задача (3.3.1)–(3.3.3) эквивалентна системе двух задач на дополняющих друг друга подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D_t^\alpha v(t) = \sum_{j=1}^{n} L_1^{-1} M_{j,1} D_t^{\alpha_j} v(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \quad t \in [0; T], \tag{3.3.4}$$

$$v^{(l)}(0) = v_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1, \tag{3.3.5}$$

$$\int_0^T v(t)d\mu(t) = v_T, \tag{3.3.6}$$

и

$$D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} D_t^{\alpha_j} w(t) - \varphi(t) M_{n,0}^{-1} u^0, \quad t \in [0, T], \tag{3.3.7}$$

$$w^{(l)}(0) = w_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \tag{3.3.8}$$

$$\int_0^T w(t) d\mu(t) = w_T, \tag{3.3.9}$$

где $v(t) = Px(t)$, $w(t) = P_0 x(t)$, $v_l = Px_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $w_l = P_0 x_l$, $l = 0, 1, \ldots, m_n - 1$, $v_T = Px_T$, $w_T = P_0 x_T$, $u^1 = Qu$, $u^0 = Q_0 u$. Таким образом, обе обратные задачи (3.3.4)–(3.3.6) и (3.3.7)–(3.3.9) являются невырожденными, а следовательно, по теореме 1.6.1 они корректны тогда и только тогда, когда существует $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$ и $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ соответственно. При этом решения имеют вид

$$u^0 = \chi_0^{-1} \psi_0, \quad u^1 = \chi_1^{-1} \psi_1,$$

где

$$\psi_0 = w_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m_n - 1} X_{l,0}(t) w_l d\mu(t), \quad \chi_0 = -\int_0^T \int_0^t X_0(t-s) M_{n,0}^{-1} \varphi(s) ds d\mu(t)$$

$$\psi_1 = v_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t) v_l d\mu(t), \quad \chi_1 = \int_0^T \int_0^t X_1(t-s) L_1^{-1} \varphi(s) ds d\mu(t),$$

вид операторов $X_{l,0}(t)$, $X_0(t)$, $X_{l,1}(t)$, $X_1(t)$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, см. в §2.1. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, оператор $M_n \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ $(L, 0)$-ограничен, $M_k P = QM_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (3.3.1)–(3.3.3) корректна в том и только в том случае, когда существуют $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. При этом решение имеет вид $u = \chi_0^{-1} \psi_0 + \chi_1^{-1} \psi_1$.*

3.4. Секториальные пары операторов

Определение 3.4.1. [57]. *Пара* $(L, M) \in (\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y}))^2$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, *если*

(i) *существуют* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ *и* $a_0 \geq 0$, *такие, что для всех* $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ *имеем* $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) *для каждых* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ *существует константа* $K = K(\theta, a) > 0$, *такая, что для всех* $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\max\{\|R^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}}.$$

Для удобства пару операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ будем называть также секториальной. Введем также обозначение

$$\mathcal{H}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi) \\ a_0 \geq 0}} \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0).$$

Замечание 3.4.1. В случае существования обратного оператора $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ имеем $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если и только если $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Из псевдорезольвентного тождества, справедливого как для $R^L_\mu(M)$, так и для $L^L_\mu(M)$, следует, что подпространства $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\mathrm{im} L^L_\mu(M)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$. Обозначим $\ker R^L_\mu(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M) := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$ ($\mathrm{im} L^L_\mu(M)$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$), а через L_q (M_q) обозначим сужение оператора L (M) на $D_{L_q} := D_L \cap \mathcal{X}^q$ ($D_{M_q} := D_M \cap \mathcal{Y}^q$) при $q = 0, 1$.

Далее будем использовать следующую теорему о парах инвариантных подпространств для секториальной пары операторов (L, M).

Теорема 3.4.1. [57]. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор* P (Q) *на подпространство* $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ *вдоль* $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ *имеет вид* $P := s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR_n^L(M)$ $(Q := s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL_n^L(M))$;

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$;

(v) $\forall x \in D_L$ $Px \in D_L$ *и* $LPx = QLx$;

(vi) $\forall x \in D_M$ $Px \in D_M$ *и* $MPx = QMx$;

(vii) *пусть* $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$, *тогда* $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \mathrm{im}L_1\}$ *плотно в* $\mathcal{X}$;

(viii) *пусть* $T := M_1L_1^{-1} : D_T \to \mathcal{Y}^1$, *тогда* $D_T := \{y \in \mathrm{im}L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$ *плотно в* $\mathcal{Y}$;

(ix) *если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *тогда* $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, *более того,* $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(x) *если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *тогда* $T \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$, *кроме,* $T \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

3.5. Вырожденные линейные уравнения с секториальной парой операторов

Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_n, L \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_{M_n}, D_L — области определения операторов M_n, L, соответственно, снабженные соответствующими нормами графика, $\ker L \neq \{0\}$.

Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $g \in C([0,T];\mathcal{Y})$. Некоторые из α_k могут быть отрицательны. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} x^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \\ (Px)^{(l)}(t_0) = x_l, \quad l = m_n, m_n + 1, \ldots, m-1, \end{gathered} \tag{3.5.1}$$

для линейного неоднородного уравнения

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} M_k x(t) + g(t), \tag{3.5.2}$$

которое называется вырожденным в случае $\ker L \neq \{0\}$. Проектор P определен в теореме 3.4.1.

Решением задачи (3.5.1), (3.5.2) назовем функцию $x \in AC^{m_n}([0,T];\mathcal{X})$, для которой $Px \in AC^{m}([0,T];\mathcal{X})$, $D_t^{\alpha_k} x \in C((0,T];\mathcal{X})$, $k = 1,2,\dots,n$, $D_t^{\alpha} Lx, M_n D_t^{\alpha_n} x \in C((0,T];\mathcal{Y}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Y})$, $D_t^{\alpha_k} x \in C((0,T];\mathcal{X})$, выполнены равенство (3.5.2) для всех $t \in (0,T]$ и условия (3.5.1).

Лемма 3.5.1. *Пусть* $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *для некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha > \alpha_n \geq 0$. *Тогда для всех* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > \max\{1, a_0^{\alpha/(\alpha-\alpha_n)}\}$ *существует* $K_1(\theta, a) > 0$, *такое, что*

$$\max\{\|(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1} L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K_1(\theta, a)}{|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > \max\{1, a_0^{\alpha/(\alpha-\alpha_n)}\}$, $\mu \in S_{\theta,a}$, $\lambda = \mu^{1-\alpha_n/\alpha}$ в смысле главной ветви степенной функции. Тогда $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, поскольку $1 - \alpha_n/\alpha \in (0,1)$. Следовательно,

$$\|(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1} L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = |\mu|^{-\alpha_n} \|R^L_{\mu^{\alpha-\alpha_n}}(M_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = |\mu|^{-\alpha_n} \|R^L_{\lambda^\alpha}(M_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq$$

$$\leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}|\mu|^{\alpha_n}} = \frac{K(\theta, a)}{|\mu^{1-\alpha_n/\alpha} - a||\mu|^{(1-\alpha_n/\alpha)(\alpha-1)}|\mu|^{\alpha_n}} \leq \frac{K_1(\theta, a)}{|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}}.$$

Аналогично можно получить неравенство для $\|L(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}$. $\square$

Для отрицательного α_n можем получить аналогичный результат.

Лемма 3.5.2. *Пусть* $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *для некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha > 0 > \alpha_n > \alpha(1 - 2\theta_0/\pi)$. *Тогда для всех* $\theta \in (\pi/2, \alpha\theta_0/(\alpha - \alpha_n))$, $a > \max\{1, a_0\}$ *существует* $K_1(\theta, a) > 0$, *такое, что*

$$\max\{\|(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1} L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K_1(\theta, a)}{|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Здесь $1 - \alpha_n/\alpha > 1$, поэтому для $\theta \in (\pi/2, \alpha\theta_0/(\alpha - \alpha_n))$, $a > \max\{1, a_0\}$, $\mu \in S_{\theta,a}$ имеем $\lambda = \mu^{1-\alpha_n/\alpha} \in S_{\theta_0,a_0}$. Оставшаяся часть доказательства такая же, как и для предыдущей леммы. $\square$

Имеем L_q ($M_{k,q}$) это сужение L (M_k) на $D_{L_q} := D_L \cap \mathcal{X}^q$ (на $D_{M_{k,q}} := D_{M_k} \cap \mathcal{X}^q$ для $k = 1, 2, \ldots, n$), $q = 0, 1$. По теореме 3.4.1 $LP = QL$ для $x \in D_L$, $M_n P x = Q M_n x$ для $x \in D_{M_n}$, следовательно, $M_{n,q} \in \mathcal{C}l\big(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q\big)$, $L_q \in \mathcal{L}\big(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q\big)$, $q = 0, 1$. Кроме того, существуют $M_{n,0}^{-1} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0\big)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l\big(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1\big)$.

Теорема 3.5.1. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > -\alpha$. Тогда для некоторых $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0]$, $a_1 \geq a_0$ $(M_{1,1}L_1^{-1}, M_{2,1}L_1^{-1}, \ldots, M_{n,1}L_1^{-1}) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_1, a_1)$.*

Доказательство. Так как $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ по теореме 3.4.1 (x), то $M_{k,1}L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. По лемме 3.5.1 для $\alpha_n \geq 0$ или по лемме 3.5.2 в случае $\alpha_n \in (\alpha(1 - 2\theta_0/\pi), 0)$ для некоторого $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0]$ и достаточно большого $a_1 \geq a_0$ при всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= (\mu^\alpha I - \mu^{\alpha_n} M_{n,1} L_1^{-1})^{-1} \left(I - \sum_{k=1}^{n-1} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1} (\mu^\alpha I - \mu^{\alpha_n} M_{n,1} L_1^{-1})^{-1}\right)^{-1},$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1} (\mu^\alpha I - \mu^{\alpha_n} M_{n,1} L_1^{-1})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} |\mu|^{\alpha_k} \|M_{k,1} L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)} \left\| L(\mu^\alpha L - \mu^{\alpha_n} M_n)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} |\mu|^{\alpha_k - \alpha + 1} \|M_{k,1} L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)} K_1(\theta, a)}{|\mu - a|} < q < 1$$

для некоторого $q \in (0,1)$. Следовательно,

$$\left\|\left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)} \leq \frac{K_2(\theta, a)}{(1-q)|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}}.$$

Наконец,

$$\left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right)^{-1}\left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-\alpha} M_{k,1} L_1^{-1}\right) =$$

$$= \mu^{-\alpha}\left(I + \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right),$$

$$\left\|\left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} M_{k,1} L_1^{-1}\right)^{-1}\left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-\alpha} M_{k,1} L_1^{-1}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)} \leq$$

$$\leq |\mu|^{-\alpha}\left(1 + \frac{K_2(\theta, a)}{(1-q)|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}} . \sum_{k=1}^{n_l-1} |\mu|^{\alpha_k} \|M_{k,1} L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1)}\right) \leq \frac{K_3(\theta, a)}{|\mu - a||\mu|^{\alpha-1}}.$$

□

Теорема 3.5.2. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M_k P = Q M_k + Q_0 N_k P$ для некоторых $N_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > \alpha(1 - 2\theta_0/\pi)$, $g \in C([0,T]; \mathcal{Y})$, $Qg \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Y})$, $\gamma \in (0,1]$, $x_l \in D_{M_{n,1}} \dot{+} \mathcal{X}^0$ для $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $x_l \in D_{M_{n,1}}$ при $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (3.5.1), (3.5.2).

Доказательство. Заметим, что $M_k P_0 = M_k(I - P) = M_k - Q M_k - Q_0 N_k P = Q_0(M_k - N_k P)$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$. Положим $P_0 x(t) := w(t)$, $y(t) := Lx(t) = L_1 P x(t) + L_0 w(t) = L_1 P x(t)$, тогда $x(t) = Px(t) + w(t) = L_1^{-1} y(t) + w(t)$. Следовательно, для $k = 1, 2, \dots, n-1$ $M_k x(t) = M_k(L_1^{-1} y(t) + w(t)) = (Q M_k + Q_0 N_k P) L_1^{-1} y(t) + Q_0(M_k - N_k P) w(t) = (Q M_k + Q_0 N_k) L_1^{-1} y(t) + Q_0 M_k w(t)$.

Подействовав оператором $M_{n,0}^{-1}Q_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X}^0)$ на обе части исследуемого уравнения, приведем задачу (3.5.1), (3.5.2) к системе

$$D_t^{\alpha}y(t) = \sum_{k=1}^{n} QM_{k,1}L_1^{-1}D_t^{\alpha_k}y(t) + Qg(t), \tag{3.5.3}$$

$$\begin{gathered} D_t^{\alpha_n}w(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1}Q_0M_{k,0}D_t^{\alpha_k}w(t) - \\ -\sum_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1}Q_0N_kL_1^{-1}D_t^{\alpha_k}y(t) - M_{n,0}^{-1}Q_0g(t) \end{gathered} \tag{3.5.4}$$

с начальными условиями

$$y^{(l)}(0) = L_1Px_l,\ l = 0,1,\dots,m-1, \tag{3.5.5}$$

$$w^{(l)}(0) = P_0x_l,\ l = 0,1,\dots,m_n-1. \tag{3.5.6}$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{D} := \bigcap\limits_{k=1}^{n} D_{M_{k,1}L_1^{-1}} = D_{M_{n,1}L_1^{-1}}$ с нормой графика оператора $D_{M_{n,1}L_1^{-1}}$. Поскольку $x_l \in D_{M_{n,1}}\dot{+}\mathcal{X}^0$, то $L_1Px_l \in D_{M_{n,1}L_1^{-1}}$ для $l = 0,1,\dots,m_n-1$. Следовательно, по теореме 2.2.1 существует единственное решение задачи (3.5.3), (3.5.5), если учесть утверждение теоремы 3.5.1. Задача (3.5.4), (3.5.6) имеет единственное решение по теореме 1.3.1, поскольку операторы $M_{n,0}^{-1}Q_0M_{k,0}$, $k = 1,2,\dots,n-1$, ограничены и $\sum\limits_{k=1}^{n-1} M_{n,0}^{-1}Q_0N_kL_1^{-1}D_t^{\alpha_k}y + M_{n,0}^{-1}Q_0g \in C([0,T];\mathcal{X}^0)$ — известная функция. $\square$

3.6. Приложения

3.6.1. Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $m,n,q \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \le m$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, L, M_k — $(q \times q)$-матрицы с элементами из $\mathbb{C}$, $k = 1,2,\dots,n$, $\det L = 0$. Рассмотрим вырожденную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t^{\alpha}Lx(t) = \sum_{k=1}^{n} M_kD_t^{\alpha_k}x(t) + g(t), \quad t \ge 0, \tag{3.6.1}$$

где $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^q(t))^T$ и $g(t) = (g^1(t), g^2(t), \dots, g^q(t))^T$ — неизвестная и заданная вектор-функции соответственно со значениями в $\mathbb{C}^q$ (символ ^{T} означает транспонирование).

Возьмем $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$, тогда условие (L,p)-ограниченности оператора M_n равносильно требованию $\det(\mu L - M_n) \not\equiv 0$, при этом $p \le q-1$. Проекторы P и Q определим через матрицы L и M_n по формулам (3.1.1). Тогда по теореме 3.1.1 начальная задача

$$\begin{gathered} x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \\ (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1, \end{gathered} \tag{3.6.2}$$

где $x_l = (x_l^1, x_l^2, \dots, x_l^q)^T \in \mathbb{C}^q$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $P_0 x_l = 0$ при $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$, для системы уравнений (3.6.1) с функцией $g \in C([0,T];\mathbb{C}^q)$ имеет единственное решение.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $N^j \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{qr};\mathbb{C})$, $j = 1, 2, \dots, q$, $N = (N^1, N^2, \dots, N^q)^T$. Применяя результаты §3.2, можно исследовать локальную и глобальную однозначную разрешимость начальной задачи (3.6.2) для вырожденной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t^\alpha L x(t) = \sum_{k=1}^n M_k D_t^{\alpha_k} x(t) + N(t, D_t^{\gamma_1} x(t), D_t^{\gamma_2} x(t), \dots, D_t^{\gamma_r} x(t)).$$

3.6.2. Начально-краевые задачи для вырожденных уравнений с многочленами от эллиптического оператора

Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_1} a_p \lambda^p$, $P_2^k(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu_2^k} b_p^k \lambda^p$, $a_p, b_p^k \in \mathbb{C}$, $a_{\nu_1} \ne 0$, $b_{\nu_2^k}^k \ne 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\nu_0 := \max\{\nu_2^k : k = 1, 2, \dots, n\} \le \nu_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим уравнение с краевыми условиями (1.7.5), (1.7.6):

$$B_j \Lambda^p u(\xi, t) = 0, \;\; p = 0, 1, \dots, \nu_1 - 1, \;\; j = 1, 2, \dots, \rho, \;\; (\xi, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{3.6.3}$$

$$P_1(\Lambda)D_t^{\alpha}u(\xi,t)=\sum_{k=1}^{n}P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t)+h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times[0,T]. \quad (3.6.4)$$

Предположим, что $P_1(\lambda_s)=0$ при некоторых $s\in\mathbb{N}$, тогда при условии, что многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$, оператор M_n $(L,0)$-ограничен (см. [53]), при этом проекторы (3.1.1) имеют вид

$$P=\sum_{P_1(\lambda_s)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_s\rangle\varphi_s,\quad Q=\sum_{P_1(\lambda_s)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_s\rangle\varphi_s, \quad (3.6.5)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия с учетом замечания 3.1.3 зададим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi,0)=u_l(\xi),\ l=0,1,\dots,m_n-1,\quad \xi\in\Omega,\\ &\frac{\partial^l P_1(\Lambda)u}{\partial t^l}(\xi,0)=y_l(\xi),\ l=m_n,m_n+1,\dots,m-1,\quad \xi\in\Omega, \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

тогда задача (3.6.3), (3.6.4), (3.6.6) представима в виде (3.1.2), (3.1.3) со следующими пространствами и операторами:

$$\mathcal{X}=\{v\in H^{2\rho\nu_1}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\,p=0,1,\dots,\nu_1-1,\,j=1,\dots,\rho,\,\xi\in\partial\Omega\},$$

$\mathcal{Y}=L_2(\Omega)$, $L=P_1(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k=P_2^k(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k=1,2,\dots,n$. Из теоремы 3.1.1 следует однозначная разрешимость задачи (3.6.3), (3.6.4), (3.6.6) при любых начальных данных $u_l\in\mathcal{X}$, $l=0,1,\dots,m_n-1$, $y_l\in L_2(\Omega)$, $l=m_n,m_n+1,\dots,m-1$, таких, что $\langle y_l,\varphi_s\rangle=0$ при $P_1(\lambda_s)=0$, и $h\in C([0,T];L_2(\Omega))$.

Пусть $a_p,b_p^k\in\mathbb{R}$, в случае $\nu_1\geq\nu_k$, $k=1,2,\dots,n-1$, $\nu_1<\nu_n$ имеем $M_k=P_2^k(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k=1,2,\dots,n-1$, $M_n=P_2^n(\Lambda)\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_n}:=\{v\in H^{2\rho\nu_n}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\,p=0,1,\dots,\nu_n-1,\,j=1,\dots,\rho,\,\xi\in\partial\Omega\}$. Тогда по теореме 7 из [57] $(L,M_n)\in\mathcal{H}_\alpha$ в одном из двух случаев:

(i) если $(-1)^{\nu_n-\nu_1}b_{\nu_n}/a_{\nu_1}<0$ и многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$, то $(L,M_n)\in\mathcal{H}_\alpha$ при любом $\alpha\geq 1$;

(ii) если $(-1)^{\nu_n-\nu_1}b_{\nu_n}/a_{\nu_1}<0$, многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$ и $\max\limits_{P_1(\lambda_s)\neq 1}\frac{P_2^n(\lambda_s)}{P_1(\lambda_s)}<1$, то $(L,M_n)\in\mathcal{H}_\alpha$ при любом $\alpha\in(0,1)$.

При этом $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ (см. [57, теорема 7]), а из вида проекторов (3.6.5) следует, что $M_k P = Q M_k$, т. е. $N_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, в условиях теоремы 3.5.2. Действительно,

$$P_2^k(\Lambda)P = \sum_{P_2(\lambda_s)\neq 0} P_2^k(\lambda_s)\langle \cdot, \varphi_s\rangle \varphi_s = Q P_2^k(\Lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, в любом из двух случаев из теоремы 3.5.2 следует однозначная разрешимость задачи (3.6.3), (3.6.4), (3.6.6) при условии $\alpha_n > \alpha(1-2\theta_0/\pi)$ при любых начальных данных $u_l \in D_{M_n}$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_l \in L[D_{M_n}]$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$, и $h \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$.

Пример. Пусть $P_1(\lambda) \equiv \lambda(\lambda+9)$, $n = 2$, $P_2^1(\lambda) = b$, $P_2^2(\lambda) = 1 + \lambda^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha = 4/3$. Тогда $m = 2$, $m_2 = 1$ и задача (3.6.3)–(3.6.6) имеет вид

$$D_t^{4/3}\left(\tfrac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9\tfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) u(\xi,t) = b D_t^{1/4} u(\xi,t) + \left(b_0 + b_1 \tfrac{\partial^{2\kappa}}{\partial \xi^{2\kappa}}\right) D_t^1 u(\xi,t),$$
$$(\xi,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}_+,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi,t) = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(\xi,0) = u_0(\xi), \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) u(\xi,0) = y_1(\xi), \ \xi \in (0,\pi).$$

При $\kappa = 0, 1, 2$ применимо утверждение из первой части данного параграфа, а при $\kappa = 3$ и больше — утверждение из второй его части, при этом краевые условия примут вид

$$\frac{\partial^{2p} u}{\partial \xi^{2p}}(0,t) = \frac{\partial^{2p} u}{\partial \xi^{2p}}(\pi,t) = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+, \quad p = 0, 1, \dots, \kappa - 1.$$

3.6.3. Обратная начально-краевая задача для вырожденного уравнения

При $\nu_1 \geq \nu_0$ рассмотрим уравнение

$$P_1(A) D_t^\alpha u(\xi,t) = \sum_{k=1}^n P_2^k(A) D_t^{\alpha_k} u(\xi,t) + \varphi(t) h(\xi), \ (\xi,t) \in \Omega \times [0,T], \quad (3.6.7)$$

с неизвестными функциями u и h, снабженное краевыми условиями (3.6.3), начальными условиями (3.6.6) и условием переопределения

$$\int_0^T u(\xi,T)d\mu(t) = u_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{3.6.8}$$

Задача (3.6.3), (3.6.6)–(3.6.8) представима (с точностью до замечания 3.1.3) в виде (3.3.1)–(3.3.3) с выбранными выше для случая $\nu_1 \geq \nu_0$ пространствами $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и операторами L, M_k, $k = 1, 2, \dots, n$, $u = h(\cdot) \in \mathcal{Y}$. По теореме 3.3.1 задача (3.6.3), (3.6.6)–(3.6.8) корректна тогда и только тогда, когда существует такое $c > 0$, что при всех $s \in \mathbb{N}$, для которых $P_1(\lambda_s) \neq 0$,

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^1} \left(\lambda^\alpha P_1(\lambda_s) - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} P_2^k(\lambda_s) \right)^{-1} P_1(\lambda_s) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \right| \geq c, \tag{3.6.9}$$

а при всех $s \in \mathbb{N}$, для которых $P_1(\lambda_s) = 0$,

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^0} \left(\sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} P_2^k(\lambda_s) \right)^{-1} P_2^n(\lambda_s) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \neq 0. \tag{3.6.10}$$

При этом учитывается конечность числа условий (3.6.10), следующая из конечнократности спектра оператора Λ_1.

Пример. Пусть $P_1(\lambda) = \lambda(\lambda+9)$, $\nu_1 = 2$, $P_2^1(\lambda) = b$, $P_2^2(\lambda) = 1 + \lambda$, $\nu_0 = 1$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi \equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t \in (0, T)$, $\mu(T) = 1$. Тогда $m = 3$, $m_2 = 2$, $\lambda_s = -s^2$ при $s \in \mathbb{N}$, $P_1(\lambda_3) = 0$ и задача (3.6.3), (3.6.6)–(3.6.8) имеет вид

$$D_t^{5/2} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 9 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v(\xi,t) = b D_t^{1/4} v(\xi,t) + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) D_t^{4/3} v(\xi,t) + h(\xi),$$

$$(\xi, t) \in (0, \pi) \times [0, T],$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\pi,t) = 0, \ \ t \in [0,T],$$

$$v(\xi,0)=v_0(\xi),\ \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,0)=v_1(\xi),\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}+9\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)v(\xi,0)=v_2(\xi),\ \xi\in(0,\pi),$$
$$v(\xi,T)=v_T(\xi),\ \xi\in(0,\pi),$$

где $v_0,v_1,v_T\in\mathcal{X}$, $v_2\in\mathcal{Y}^1$. Необходимые и достаточные условия (3.6.9), (3.6.10) ее разрешимости есть

$$\left|\int\limits_{\gamma^1}\Big((s^4-9s^2)\lambda^{7/2}-b\lambda^{5/4}-(1-s^2)\lambda^{7/3}\Big)^{-1}(s^4-9s^2)(e^{\lambda t}-e^{\lambda(t-T)})d\lambda\right|\geq c$$

при $s\in\mathbb{N}\setminus\{3\}$,

$$\int\limits_{\gamma^0}\Big(b\lambda^{5/4}-8\lambda^{7/3}\Big)^{-1}(e^{\lambda t}-e^{\lambda(t-T)})d\lambda\neq 0.$$

3.6.4. Примеры вырожденных квазилинейных систем уравнений

Рассмотрим примеры вырожденных систем уравнений в частных производных, иллюстрирующие четыре рассмотренных случая в разделе 3.2.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k x_1}{\partial t^k}(\xi,t_0)=x_{1k}(\xi),\ k=0,1,\dots,m-1,\ \xi\in\Omega, \tag{3.6.11}$$

$$\frac{\partial^k x_2}{\partial t^k}(\xi,t_0)=x_{2k}(\xi),\ k=0,1,\dots,m_n-1,\ \xi\in\Omega, \tag{3.6.12}$$

$$x_i(\xi,t)=0,\ (\xi,t)\in\partial\Omega\times[t_0,t_1],\ i=1,2, \tag{3.6.13}$$

$$\begin{gathered}D_t^\alpha\triangle x_1=\sum_{k=1}^n a_kD_t^{\alpha_k}x_1+h_1\left(\xi,t,D_t^{\gamma_1}x_1,D_t^{\gamma_1}x_2,\dots,D_t^{\gamma_r}x_1,D_t^{\gamma_r}x_2\right),\\ 0=\sum_{k=1}^n b_kD_t^{\alpha_k}x_2+h_2\left(\xi,t,D_t^{\gamma_1}x_1,D_t^{\gamma_1}x_2,\dots,D_t^{\gamma_r}x_2\right),\ (\xi,t)\in\Omega\times[t_0,t_1],\end{gathered} \tag{3.6.14}$$

где $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\leq m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $m_n-1<\alpha_n\leq m_n$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r$.

Пусть $A := \sum\limits_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}$ — оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v(\xi) = 0,\, \xi \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$, $\{\varphi_s\}$ ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система его собственных функций, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_s\}$, пронумерованным в порядке невозрастания с учетом их кратности.

Редуцируем задачу (3.6.11)–(3.6.14) к (3.2.1), (3.2.2), возьмем пространства

$$\mathcal{X} = H_0^2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^2, \tag{3.6.15}$$

и операторы

$$L = \begin{pmatrix} \triangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M_k = \begin{pmatrix} a_k I & 0 \\ 0 & b_k I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6.16}$$

Лемма 3.6.1. *Пусть заданы пространства* (3.6.15) *и операторы* (3.6.16), $b_n \neq 0$. *Тогда оператор M_n $(L,0)$-ограничен и проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.17}$$

Доказательство. Если $\mu \neq a_n \lambda_s^{-1}$ для всех $s \in \mathbb{N}$, тогда

$$(\mu L - M_n)^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s \begin{pmatrix} (\mu\lambda_s - a_n)^{-1} & 0 \\ 0 & -b_n^{-1} \end{pmatrix},$$

следовательно, для $|\mu| > |a_n||\lambda_1|^{-1}$ оператор $(\mu L - M_n)^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ — ограничен,

$$R_\mu^L(M_n) = \sum_{s=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s \begin{pmatrix} \lambda_s(\mu\lambda_s - a_n)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_\mu^L(M_n) = \sum_{s=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s \begin{pmatrix} \lambda_s(\mu\lambda_s - a_n)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих равенств в силу формул (3.1.1) и теоремы о вычетах следует вид проекторов (3.6.17), поскольку для достаточно больших $|\mu|$

$$\lambda_s(\mu\lambda_s - a_n)^{-1} = \mu^{-1}(1 - a_n\mu^{-1}\lambda_s^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_n^j \mu^{-j-1}\lambda_s^{-j}.$$

Следовательно, $\mathcal{X}^1 = H_0^2(\Omega) \times \{0\}$, $\mathcal{X}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega)$, $\mathcal{Y}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega)$, $L_0 = 0$ и оператор M_n $(L, 0)$-ограничен. $\square$

Первая формула в (3.6.17) подразумевает, что начальные условия (3.6.11), (3.6.12) имеют вид (3.2.1). При подходящих условиях гладкости на функции h_1 и h_2 система уравнений

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha}\triangle x_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k D_t^{\alpha_k} x_1 + h_1\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_1, D_t^{\gamma_2} x_1, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_1\right), \\ &0 = \sum_{k=1}^{n} b_k D_t^{\alpha_k} x_2 + h_2\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_1, D_t^{\gamma_2} x_1, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_1\right) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям теорем 3.2.1 и 3.2.5; система

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha}\triangle x_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k D_t^{\alpha_k} x_1 + h_1\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_2, D_t^{\gamma_2} x_2, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_2\right), \\ &0 = \sum_{k=1}^{n} b_k D_t^{\alpha_k} x_2 + h_2\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_2, D_t^{\gamma_2} x_2, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_2\right), \ \gamma_r < \alpha_n, \end{aligned}$$

соответствует теоремам 3.2.2 и 3.2.6; условия теорем 3.2.3 и 3.2.7 справедливы для системы

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha}\triangle x_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k D_t^{\alpha_k} x_1 + h_1\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_1, D_t^{\gamma_1} x_2, D_t^{\gamma_2} x_1, D_t^{\gamma_2} x_2, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_2\right), \\ &0 = \sum_{k=1}^{n} b_k D_t^{\alpha_k} x_2; \end{aligned}$$

теоремы 3.2.4 и 3.2.8 применимы к системе уравнений

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha}\triangle x_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k D_t^{\alpha_k} x_1, \\ &0 = \sum_{k=1}^{n} b_k D_t^{\alpha_k} x_2 + h_2\left(\xi, t, D_t^{\gamma_1} x_1, D_t^{\gamma_1} x_2, \ldots, D_t^{\gamma_r} x_1, D_t^{\gamma_r} x_2\right), \ \gamma_r < \alpha_n. \end{aligned}$$

3.6.5. Начально-краевая задача для системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(\xi,0)=v_0(\xi),\quad (m-1)\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,0)=(m-1)v_1(\xi),\quad \xi\in\Omega, \tag{3.6.18}$$

$$\tau(\xi,0)=\tau_0(\xi),\quad (m-1)\frac{\partial \tau}{\partial t}(\xi,0)=(m-1)\tau_1(\xi),\quad \xi\in\Omega, \tag{3.6.19}$$

$$v(\xi,t)=0,\quad \tau(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{3.6.20}$$

для линеаризованной системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi D_t^\alpha\Delta v(\xi,t)+\nu\Delta v(\xi,t)+\kappa D_t^\delta\Delta v(\xi,t)-r(\xi,t)+\\ +h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \end{gathered} \tag{3.6.21}$$

$$\nabla\cdot v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{3.6.22}$$

$$D_t^\alpha \tau(\xi,t)=\varrho\triangle\tau(\xi,t)+\varsigma v_n(\xi,t)+f(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{3.6.23}$$

где $m-1<\alpha\le m\in\{1,2\}$, $\delta<0$, $\chi,\nu,\kappa,\varrho,\varsigma\in\mathbb{R}$, $\triangle$ — оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega):=\{w\in H^2(\Omega):w(\xi)=0,\ \xi\in\partial\Omega\}$, плотной в $L_2(\Omega)$.

Замечание 3.6.1. Во вторых условиях в (3.6.18), (3.6.19) множитель $m-1$ означает отсутствие этих условий при $\alpha\in(0,1]$ и наличие их при $\alpha\in(1,2)$.

Замечание 3.6.2. Если $\chi=0$, то система уравнений (3.6.21)–(3.6.23) — представляет собой линейное приближение системы уравнений термоконвекции в вязкой среде. В частности для $\chi=0,\alpha=1$ и $\kappa=0$ мы имеем линеаризацию системы уравнений Буссинеска, моделирующую термоконвекцию в вязких средах. Операторные методы, близкие к методам настоящей работы, используются для исследования начально-краевой задачи и некоторых задач управления для линеаризованной системы Буссинеска в [31].

Положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 \times L_2(\Omega) = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times L_2(\Omega), \tag{3.6.24}$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi B & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \kappa B & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \kappa\Pi\Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} \nu B & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta & -I & \mathbb{O} \\ \varsigma P_n & \mathbb{O} & \varrho\triangle \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \Sigma h(\cdot,t) \\ \Pi h(\cdot,t) \\ f(\cdot,t) \end{pmatrix}, \ t \in [0,T]. \tag{3.6.25}$$

Здесь P_n — проектор, действующий по правилу $(v_1, v_2, \dots, v_n) \to v_n$. Тогда $L, M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_2 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_2} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \times H_0^2(\Omega)$. Имеем $x(t) \in \mathcal{X}$, где $x(t) = (v(\cdot,t), r(\cdot,t), \tau(\cdot,t))$.

Лемма 3.6.2. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\chi, \nu, \varsigma \in \mathbb{R}$, $\chi \notin \sigma(B)$, $\varrho > 0$, *пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *имеют вид* (3.6.24), *операторы* L *и* M_2 *определяются через* (3.6.25). *Тогда* $(L, M_2) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *для некоторых* $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, *при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$, $\mathcal{X}^1 = \{(z, \nu\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}z, w) : z \in \mathbb{H}_\sigma^2,\ w \in L_2(\Omega)\}$, $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^1 = \{(z, -\chi\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}z, w) : z \in \mathbb{H}_\sigma,\ w \in L_2(\Omega)\}$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Доказательство. Банаховы пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — рефлексивны, поскольку являются гильбертовыми пространствами. Операторы $(I-\chi B)^{-1} : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}_\sigma^2$, $(I-\chi B)^{-1}B = B(I-\chi B)^{-1} : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}_\sigma$, $(I-\chi B)^{-1}B = B(I-\chi B)^{-1} : \mathbb{H}_\sigma^2 \to \mathbb{H}_\sigma^2$ ограничены, поэтому мы можем выбрать $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$, такие, что круг $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq 2^{-1/\alpha}|\nu|^{1/\alpha} \max\{\|(I-\chi B)^{-1}B\|_{\mathbb{H}_\sigma}^{1/\alpha}, \|(I-\chi B)^{-1}B\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}^{1/\alpha}\}\}$ находится вне сектора S_{θ_1,a_0}. Тогда для $\mu \in S_{\theta_1,a_0}$ с помощью ряда Неймана получаем

$$\|(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}\|_{\mathbb{H}_\sigma}\le\frac{1}{|\mu|^\alpha-|\nu|\|(I-\chi B)^{-1}B\|_{\mathbb{H}_\sigma}}\le\frac{2}{|\mu|^\alpha}. \quad (3.6.26)$$

$$\|(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}\le\frac{1}{|\mu|^\alpha-|\nu|\|(I-\chi B)^{-1}B\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}}\le\frac{2}{|\mu|^\alpha}. \quad (3.6.27)$$

Возьмем $\alpha\in[1,2)$, $\delta\in(0,\pi(1/\alpha-1/2))$, $\theta_0=\min\{\theta_1,\pi/2+\delta\}$. Тогда $(\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$ для всех $\mu\in S_{\theta_0,a_0}$, поскольку спектр оператора $\varrho\triangle$ с областью определения $H_0^2(\Omega)$ веществен и отрицателен. Более того, для $w\in L_2(\Omega)$

$$\|(\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}w\|^2_{L_2(\Omega)}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|\langle w,\varphi_s\rangle|^2}{|\mu^\alpha-\varrho\lambda_s|^2}\le\frac{\|w\|^2_{L_2(\Omega)}}{\sin^2\theta_0|\mu|^{2\alpha}}, \quad (3.6.28)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\{\lambda_s\}$ — собственные значения оператора $\triangle$ с областью определения $H_0^2(\Omega)$, $\{\varphi_s\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций.

Так для $\mu\in S_{\theta_0,a_0}$

$$\mu^0\alpha L-M_2=\begin{pmatrix}\mu^\alpha(I-\chi B)-\nu B & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ -\mu^\alpha\chi\Pi\Delta-\nu\Pi\Delta & I & \mathbb{O}\\ -\varsigma P_n & \mathbb{O} & \mu^\alpha I-\varrho\triangle\end{pmatrix},$$

$$(\mu^\alpha L-M_2)^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\mu^\alpha\chi\Pi\Delta+\nu\Pi\Delta)(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}(I-\chi B)^{-1} & I & \mathbb{O}\\ \varsigma(\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}P_n(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}\end{pmatrix},$$

$$R^L_{\mu^\alpha}(M)=$$

$$\begin{pmatrix}(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (\mu^\alpha\chi\Pi\Delta+\nu\Pi\Delta)(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}-\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \varsigma(\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}P_n(\mu^\alpha I-\nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha I-\varrho\triangle)^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$
= \begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - \nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}(\mu^\alpha I - \nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \varsigma(\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1}P_n(\mu^\alpha I - \nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1} \end{pmatrix},
$$

$$
L^L_{\mu^\alpha}(M) =
$$

$$
\begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - \nu B(I-\chi B)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}(\mu^\alpha I - \nu B(I-\chi B)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \varsigma(\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1}P_n(\mu^\alpha I - \nu(I-\chi B)^{-1}B)^{-1}(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & (\mu^\alpha I - \varrho\triangle)^{-1} \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, $R^L_{\mu^\alpha}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L^L_{\mu^\alpha}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. Используя (3.6.26)–(3.6.28), получаем, что $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$.

При $\alpha \in (0, 1)$ доказательство аналогично.

Проекторы P, Q и подпространства $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im} Q$ можно вычислить по теореме 3.4.1.

Нетрудно заметить, что $L[\mathcal{X}^1] = \mathcal{Y}^1$, поэтому $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$. $\square$

Теорема 3.6.1. *Пусть* $\alpha \in (0, 2)$, $\chi, \nu, \kappa, \varsigma \in \mathbb{R}$, $\chi \notin \sigma(B)$, $\varrho > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $\tau_0 \in H_0^2(\Omega)$ *для* $\alpha \in (0, 1]$, $v_0, v_1 \in \mathbb{H}_\sigma$, $\tau_0, \tau_1 \in H_0^2(\Omega)$ *при* $\alpha \in (1, 2)$; $h \in C([0, T]; \mathbb{L}_2)$, $\Sigma h \in C^\gamma([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$, $f \in C^\gamma([0, T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0, 1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.6.18)–(3.6.23).

Доказательство. Сведем задачу (3.6.18)–(3.6.23) к (3.5.1), (3.5.2) при $n = 2$, используя операторы (3.6.25) в пространствах (3.6.24). Заметим, что в этом случае $\alpha_1 = \delta < 0$, $\alpha_2 = 0$, $m_2 = 0$, следовательно, условия (3.5.1) имеют вид $Px(0) = x_0$ для $\alpha \in (0, 1]$, $Px(0) = x_0$, $D^1 Px(0) = x_1$ для $\alpha \in (1, 2)$, что эквивалентны условиям (3.6.18), (3.6.19) ввиду вида проектора P (см. лемму 3.6.2). Здесь $m = 1$ для $\alpha \in (0, 1]$ и $m = 2$ для $\alpha \in (1, 2)$. Следовательно, для $m = 1$ последнее условие в (3.6.18), и в (3.6.19) отсутствует.

Проверим выполнение условий теоремы 3.5.2. Согласно лемме 3.6.2 $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, причем $(v_0, \nu\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}v_0, \tau_0), (v_1, \nu\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}v_1, \tau_1) \in D_{M_{n,1}}$ в условиях настоящей теоремы. Имеем также

$$
Qg(t) = (\Sigma h(\cdot, t), -\chi\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1}\Sigma h(\cdot, t), f(\cdot, t)) \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Y}).
$$

Наконец,

$$M_1P - QM_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \kappa\Pi\Delta(I-\chi B)^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} := N_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}).$$

Очевидно, что $N_1 = Q_0N_1P$. По теореме 3.5.2 получаем требуемое утверждение. $\square$

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стали теоремы о существовании и единственности классического решения для начальных задач для широких классов линейных и квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто, с ограниченными или с замкнутыми операторами в линейной части уравнения. Рассмотрены как разрешенные относительно старшей производной уравнения, так и уравнения, содержащие вырожденный линейный оператор при этой производной. В последнем случае используемые условия на пару операторов при двух старших производных в уравнении позволяют вырожденное уравнение редуцировать к паре уравнений, разрешенных относительно старшей производной.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности решения для начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для ряда начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно старшей дробной производной по времени.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях:

1) исследование вопросов существования и единственности сильных решений аналогичных задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто;

2) исследование новых классов обратных задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто: задач с зависящим от времени неизвестным параметром, нелинейных обратных задач;

3) исследование вопросов управляемости уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто;

4) исследование различных задач оптимального управления для систем, динамика которых описывается уравнениями с несколькими производными Герасимова — Капуто.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

3. $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых, определенных в пространстве $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

4. Область определения оператора A обозначается через D_A, его ядро — через $\ker A$, образ — через imA.

5. Через $L_q(\Omega;\mathcal{X})$ и $W_q^l(\Omega;\mathcal{X})$, $q \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, обозначаются пространства Лебега и Соболева соответственно функций $u : \Omega \to \mathcal{X}$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство; $H^l(\Omega;\mathcal{X}) := W_2^l(\Omega;\mathcal{X})$, $l \in \mathbb{N}$.

6. Символами I и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

7. Символ $\Box$ лежит в конце доказательства.

Список литературы

[1] Бондарь, Л. Н. Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения Соболева / Л. Н. Бондарь, Г. В. Демиденко // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 5. — С. 998–1012.

[2] Бояринцев, Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.

[3] Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

[4] Булатов, М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М. В. Булатов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 360–372.

[5] Газизов, Р. К. Групповая классификация и симметрийные редукции нелинейного трехмерного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Уфимск. мат. журн. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 14–28.

[6] Газизов, Р. К. Симметрийный подход к дифференциальным уравнениям дробного порядка / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Мат. моделирование и краевые задачи. — 2008. — № 3. — С. 59–61.

[7] Газизов, Р. К. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукащук // Уфимск. мат. журн. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 54–68.

[8] Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Прикл. математика и механика. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 251–260.

[9] Глушак, А. В. О корректности задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 9. — С. 13–24.

[10] Глушак, А. В. О свойствах задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // Мат. заметки. — 2007. — Т. 82, вып. 5. — С. 665–677.

[11] Глушак, А. В. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара / А. В. Глушак, Т. А. Манаенкова // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1294–1304.

[12] Глушак, А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Глушак, В. А. Попова // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, № 5. — С. 684–693.

[13] Демиденко, Г. В. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши-Ковалевской / Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 26. — С.42–76.

[14] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[15] Егоров, И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

[16] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[17] Кайкина, Е. И. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 61–114.

[18] Кайкина, Е. И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев // Функц. анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 14–26.

[19] Кожанов, А. И. Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1335–1346.

[20] Кожанов, А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

[21] Кожанов, А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 2. — С. 359–376.

[22] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 240 с.

[23] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011. — 376 с.

[24] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

[25] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

[26] Мамчуев, М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка / М. О. Мамчуев. — Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. — 200 с.

[27] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

[28] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

[29] Нахушев, А. М. Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. — Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. — 299 с.

[30] Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992. — 352 с.

[31] Плеханова, М. В. Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска / М. В. Плеханова, А. Ф. Исламова // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 565–576.

[32] Псху, А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Мат. сб. — 2011. — Т. 202, № 4. — С. 111–122.

[33] Псху, А. В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1076–1082.

[34] Псху, А. В. О продолжении решений дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 133–136.

[35] Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М.: Наука, 2005. — 199 с.

[36] Псху, А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 141–182.

[37] Пятков, С. Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай / С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 678–693.

[38] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[39] Свиридюк, Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, вып. 4 (298). — С. 47–74.

[40] Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.

[41] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

[42] Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М.: Физматлит, 2019. — 224 с.

[43] Соболев, С. Л. Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 82, № 2. — С. 205–208.

[44] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.

[45] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[46] Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 510 с.

[47] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

[48] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2011. — Вып. 7, № 4 (211). — С. 100–110.

[49] Федоров, В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

[50] Федоров, В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 131–160.

[51] Федоров, В. Е. Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 426–448.

[52] Федоров, В. Е. О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределенного порядка / В. Е. Федоров // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 489. — С. 113–129.

[53] Федоров, В. Е. Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 702–712.

[54] Федоров, В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.

[55] Федоров, В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

[56] Федоров, В. Е. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. — 2018. — Т. 149. — С. 103–112.

[57] Федоров, В. Е. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, No 2. — С. 93–107.

[58] Федоров, В. Е. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сиб. матем. журн. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143–1162.

[59] Федоров, В. Е. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 461–477.

[60] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[61] Чистяков, В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

[62] Ahmad, B. Multi-term fractional differential equations with nonlocal boundary conditions / B. Ahmad, N. Alghamdi, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas // Open Mathematics. — 2018. — Vol. 16, iss. 1. — P. 0127.

[63] Alvarez-Pardo, E. Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions / E. Alvarez-Pardo, C. Lizama // Electronic Journal of Differential Equations. — 2014. — Vol. 2014, No. 39. — P. 1–10.

[64] Ashurov, R. R. Inverse problem of determining the order of the fractional derivative in the Rayleigh — Stokes equation / R. R. Ashurov, O. Mukhiddinova // Fractional Calculus and Applied AnalysisЭта ссылка отключена. — 2023. — Vol. 26, no. 4. — P. 1691–1708.

[65] Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.

[66] Caputo, M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent. II / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1967. — Vol. 13, No. 5. — P.529–539.

[67] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type / K. Diethelm. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 247 p.

[68] Favini, A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. — 1979. — Vol. 12, No. 3–4. — P. 511–536.

[69] Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York, etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.

[70] Favini, A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations / A. Favini, A. Yagi // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1993. — Vol. CLXIII. — P. 353–384.

[71] Fedorov, V. E. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order / V. E. Fedorov, N. D. Ivanova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20, No. 3. — P. 706–721.

[72] Fedorov, V. E. On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces / V. E. Fedorov, M. Kostić // Eurasian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 9, No. 3. — P. 33–57.

[73] Fedorov, V. E. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative / V. E. Fedorov, R. R. Nazhimov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2019. — Vol. 22, No. 2. — P. 271–286.

[74] Fedorov, V. E. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivative in Banach spaces / V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Symmetry. — 2021. — Vol. 13. — P. 1058.

[75] Fedorov, V. E. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations / V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, M. Kostić // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2020. — Vol. 29, No. 2. — P. 173–184.

[76] Fedorov, V. E. On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann — Liouville derivatives / V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. M. Turov // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, No. 1.

[77] Fedorov, V. E. Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1502–1512.

[78] Fedorov V. E. A class of quasilinear equations with Riemann — Liouville derivatives and bounded operators / V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien // Axioms. — 2022. — Vol. 11, No. 3. — P. 96.

[79] Gazizov, R. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Lukashchuk. In: Fractional Differential Equations, ed. by A. Kochubei, Y. Luchko. Vol. 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2019. P. 353–382.

[80] Hassard, B. D. Theory and Applications of Hopf Bifurcation / B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[81] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — Singapore: WSPC, 2000. —465 p.

[82] Hopf, E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen / E. Hopf // Mathematische Nachrichten. — 1950–1951. — Vol. 4. — P. 213–231.

[83] Jiang, H. Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo — Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain / H. Jiang, F. Liu, I. Turner, K. Burrage // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 389, No. 2. — P. 1117–1127.

[84] Karczewska, A. Solutions to stochastic fractional oscillation equations / A. Karczewska, C. Lizama // Applied Mathematics Letters. — 2010. — Vol. 2. — P. 1361–1366.

[85] Kato, T. Pertubation Theory for Linear Operators / T. Kato. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1966. — 623 p.

[86] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.

[87] Kostić, M. Abstract Degenerate Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Београд : Математички институт САНУ, 2020. — 516 p.

[88] Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 458 p.

[89] Kostin, A. B. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation / A. B. Kostin, S. I. Piskarev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2021. — Vol. 29, no.‘2. — P. 267–281.

[90] Leray, J. Essai sur le mouvement plans d'un liquide visqueux que limitent des parois / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1934. — Ser. IX, vol. XIII, fasc. 4. — P. 331–418.

[91] Li, C.-G. Abstract multi-term fractional differential equations / C.-G. Li, M. Kostiȅ, M. Li // Kragujevac Journal of Mathematics. — 2014. — Vol. 38, No. 1. — P. 51–71.

[92] Liu, F. Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffussion equation / F. Liu, M. M. Meerschaert, R. J. McGough, P. Zhuang, Q. Liu // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 16, No. 1. — P. 9–25.

[93] Lizama, C. Fractional relaxation equations on Banach spaces / C. Lizama, H. Prado // Applied Mathematics Letters. — 2010. — Vol. 23. — P. 137–142.

[94] Ma, W. Simultaneous recovery of two time-dependent coefficients in a multi-term time-fractional diffusion equation / W. Ma, L. Sun // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2024. — Vol. 24, iss. 1. — P. 59–83.

[95] Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — Vol. 193. — P. 133–160.

[96] Mamchuev, M. Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order / M. Mamchuev // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, iss. 9. — P. 1475.

[97] Melnikova, I. V. Abstract Cauchy Problems: Three Approahes / I. V. Melnikova, A. Filinkov. — Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman & Hall / CRC, 2001. — 242 p.

[98] Miller, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York: John Wiley & Sons, 1993. — 384 p.

[99] Nishimoto, K. Fractional Calculus and Its Applications / K. Nishimoto. — Koriyama: Nihon University, 1990. — 284 p.

[100] Novozhenova, O. G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union / O. G. Novozhenova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20. — P. 790–809.

[101] Oldham, K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. — Boston: Academic Press, 1974. — 234 p.

[102] Orlovsky, D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space / D. G. Orlovsky // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, No. 1. — P. 55–63.

[103] Oskolkov, A. P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin—Voight fluids and Oldroyd fluids / A. P. Oskolkov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1989. — Vol. 179. — P. 137–182.

[104] Oseen, C. W. Hydrodynamik / C. W. Oseen. — Leipzig: Akad. Verl.-Ges., 1927. — 337 p.

[105] Plekhanova, M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2017. — Vol. 40, iss. 17. — P. 6138–6146.

[106] Plekhanova, M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions / M. V. Plekhanova // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020101.

[107] Plekhanova, M. V. Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative / M. V. Plekhanova // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2016. — Vol. 9, No. 3. — P. 833–847.

[108] Plekhanova, M. V. Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 81–93.

[109] Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego; Boston: Academic Press, 1999. — 340 p.

[110] Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'unmouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica. — 1885. — Vol. 7. — P. 259–380.

[111] Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. — Basel: Springer, 1993. — 366 p.

[112] Pyatkov, S. G. Operator Theory: Nonclassical Problems / S. G. Pyatkov. — Utrecht; Boston: VSP, 2002. — 346 p.

[113] Rossikhin, Yu. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. — 2010. — Vol. 63. — 010701 p.

[114] Shishkina, E. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 592 p.

[115] Showalter, R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. — 1975. — Vol. 6, No. 1. — P. 25–42.

[116] Sidorov, N. Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. — 568 p.

[117] Singh, V. Existence results for multi-term time-fractional impulsive differential equations with fractional order boundary conditions / V. Singh, D. N. Pandey // Malaya Journal of Matematik. — 2017. — Vol. 5, No. 4. — P. 625–635.

[118] Singh, V. Mild solutions for multi-term time-fractional impulsive differential systems / V. Singh, D. N. Pandey // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2018. — Vol. 18, No. 3. — P. 307–318.

[119] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 216 p.

[120] Tarasov, V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. — New York: Springer, 2011. — 450 p.

[121] Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Basel: Springer Basel AG, 2011. — 539 p.

[122] Zvyagin, V. G. The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin — Voigt fluids / V. G. Zvyagin, M. V. Turbin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 168, No. 2. — P. 157–308.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих периодических изданий, и приравненные к ним

[123] Федоров, В. Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными / В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг // Мат. заметки Сев.-Восточ. федер. ун-та. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 85–104. (Scopus).

[124] Boyko, K. V. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives / K. V. Boyko, V. E. Fedorov //

Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 46, No. 6. — P. 1293–1302. (Web of Science, Scopus).

[125] Fedorov, V. E. Degenerate multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives in the sectorial case / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Mathematics. — 2022. Vol. 10, No. 4699. — 24 p. (Web of Science, Scopus).

[126] Fedorov, V. E. Some classes of quasilinear equations with Gerasimov — Caputo derivatives / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. DEMMCA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. Vol. 423. — P. 1–16. (Scopus).

[127] Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с секториальным набором операторов при производных Герасимова — Капуто / В. Е. Федоров, К. В. Бойко // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 248–259. (Web of Science, Scopus).

Fedorov, V. E. Quasilinear equations with a sectorial set of operators at Gerasimov — Caputo derivatives / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2023. Vol. 321, No. 1. — P. 78–89. (Web of Science, Scopus).

[128] Бойко, К. В. Линейные и квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Челяб. физ.-мат. журн. — 2024. — Т. 9, вып. 1. — С. 5–22. (Scopus).

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[129] Бойко, К. В. Обратная задача для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 213. — С. 38–46.

[130] Бойко, К. В. Разрешимость задачи Коши для одного класса линейных уравнений с несколькими дробными производными / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2021. — С. 17–18.

[131] Бойко, К. В. Вырожденные квазилинейные уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): материалы 3-й Междунар. конф. — Иркутск: Издательство ИГУ, 2021. — С. 12–13.

[132] Бойко, К. В. Линейное уравнение с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии информатики и физики: материалы VI Междунар. науч. конф. — Нальчик: Издательство «Принт Центр», 2021. — С. 50.

[133] Бойко, К. В. Обратная задача для уравнения с дробными производными / К. В. Бойко // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2022. — С. 15–16.

[134] Бойко, К. В. Обратная задача для вырожденного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2022: тез. докл. — Владимир: Аркаим, 2022. — С. 93–94.

[135] Бойко, К. В. Вырожденное линейное уравнение с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Девятая Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям: тез. докл. — Москва: РУДН, 2022. — С. 130–131.

[136] Бойко, К. В. Вырожденные квазилинейные уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022): материалы 4-й Междунар. конф. — Иркутск: Издательство ИГУ, 2022. — С. 11–13.

[137] Бойко, К. В. О разрешимости линейного неоднородного уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто в секториальном случае / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя математическая школа-2022: материалы Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ, 2022. — С. 145–147.

[138] Бойко, К. В. Аналитические разрешающие семейства для уравнения с производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Вещественный, комплексный и функциональный анализ и связанные темы: сб. тез. Междунар. конф. — Курск: Издательство КГУ, 2022. — С. 4–6.

[139] Бойко, К. В. Один класс квазилинейных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф. — Ташкент: «Университет», 2022. — С. 84–85.

[140] Boyko, K. V. Local solutions of quasilinear equations with Gerasimov — Caputo derivatives. Sectorial case / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // Book of Abstracts of International Online Conference One-Parameter Semigroups of Operators — Nizhny Novgorod, 2023. — P. 6–8.

[141] Бойко, К. В. Решение неоднородного уравнения с дробными производными / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 24–25.

[142] Бойко, К. В. Нелокальное решение квазилинейного уравнения / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // X Международная конференция по математическому моделированию: тез. докл. — Якутск: Северо-Восточный федеральный университет, 2023. — С. 33.

[143] Бойко, К. В. Вырожденное дробное дифференциальное уравнение с производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Уфимская осенняя математическая школа-2023: материалы Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 25–27.

[144] Бойко, К. В. Локальное решение квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто. Секториальный случай / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф. — Ташкент: Фергана, 2023. — С. 331–333.

[145] Бойко, К. В. Глобальное решение квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто. Секториальный случай / К. В. Бойко // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии информатики и физики: материалы междунар. науч. конф. — Нальчик: Издательство «Принт Центр», 2023. — С. 71.

[146] Бойко, К. В. Решение неоднородного уравнения с дробными производными и гельдеровой неоднородностью / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 16–17.

[147] Бойко, К. В. Вопросы существования и единственности локального решения квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации: сб. материалов Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 12–13.