Федеральное государственное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Дроздов Дмитрий Алексеевич

Анализ на самоподобных множествах с конечным пересечением

1.1.1 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н, доцент
Тетенов Андрей Викторович

Новосибирск — 2024

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена актуальным вопросам современного анализа, лежащим на стыке геометрической теории меры, фрактальной геометрии, теории графов и теории функции действительного переменного. В диссертации исследуются самоподобные множества на плоскости и в пространстве, самоподобные дендриты и фрактальные k-кубы.

0.1 История вопроса и основные направления

0.1.1 Самоподобные множества

Геометрическая теория множеств целой и дробной размерности развивается уже более века, при этом множества дробной размерности встречаются и во многих других разделах математики, таких как теория чисел и нелинейные дифференциальные уравнения. Начало систематическому изучению таких множеств было положено работой [30] Б. Мандельброта 1975 года. В этой работе такие множества были применены для описания природных явлений, а также впервые введён термин «фрактал». Термин «фрактал» происходит от латинских fractus (дробный) и frangere (ломать), которыми и описывается суть фрактала как нерегулярного и «изломанного» множества.

Мандельброт дал первое определение фрактала как множества, размерность Хаусдорфа которого превосходит топологическую, но он сам признал его неполным. На практике строго определить фрактал не так просто. К. Фальконер [15] даёт несколько признаков, которым могут удовлетворять фракталы. Для того, чтобы можно было назвать объект A фракталом, он должен характеризоваться какими-либо из свойств, перечисленных ниже.

1. A имеет тонкую структуру, т. е. содержит сложные структурные элементы на любых масштабах;

2. A слишком неоднородно, чтобы описываться на традиционном геометрическом языке;

3. A самоподобно в том или ином смысле, т. е. имеет повторяющуюся структуру в разных масштабах;

4. «Фрактальная» размерность (например, размерность Хаусдорфа или клеточная размерность) множества A превышает его топологическую размерность и зачастую является не натуральным числом;

5. A можно построить через рекурсивные или итеративные схемы (что позволяет моделировать фракталы на компьютерах).

Важным разделом фрактальной геометрии является теория самоподобных множеств. На протяжении всей работы мы будем рассматривать именно самоподобные множества. Понятие самоподобия упоминается довольно давно, так, например, в 1904 году Хельге фон Кох [24] строит непрерывную кривую, не имеющую касательной ни в одной из своих точек, а в 1905 году Чезаро [9] указывает на её самоподобие. Из более поздних примеров самоподобных множеств можно указать на П. Леви [28], который в 1939 году описал самоподобные кривые, состоящие из n копий одинакового размера.

Дж. Хатчинсон в 1981 году [18] дал строгое определение самоподобного множества K как множества, являющегося объединением $\bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$ образов самого себя относительно отображений из системы сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \ldots, m\}$. Такое K также будем называть аттрактором системы $\mathcal{S}$. В этой работе он ввёл систему понятий и чёткий математический аппарат к исследованию таких множеств. Работа Хатчинсона послужила основой для множества дальнейших исследований.

Р. Молдин и С. Вильямс [31] разработали концепцию граф-ориентированных систем подобий, аттрактором которых является система компактов, каждый из которых может состоять не только из своих копий, но и из копий других компактов системы.

В 1996 году М. Моран [35] определил бесконечно-порождённые самоподобные множества и указал условия, при которых их свойства аналогичны свойствам конечнопорождённых самоподобных множеств.

В теории самоподобных множеств часто возникает вопрос о вычислении фрактальной размерности самоподобного множества. Под фрактальной размерностью обычно подразумевают одну из нескольких размерностей: размерность Минковского (или т.н. клеточная размерность), упаковочная размерность, размерность Ассуада, размерность Хаусдорфа и некоторые другие. Для некоторых фракталов эти размерности могут совпадать, но в общем случае они не эквивалентны.

Фрактальная размерность самоподобного множества $K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$ почти всегда зависит как от коэффициентов подобия $\mathrm{Lip}(S_i)$ отображений системы $\mathcal{S}$, так и от взаимного расположения и структуры пересечения копий самоподобного множества. Условия отделимости систем сжимающих подобий, порождающих эти фракталы, помогают определить то, насколько сильно расположение и структура пересечений копий самоподобного множества влияют на его фрактальную размерность. Среди условий отделимости наиболее часто применяются условие открытого множества (OSC) и слабое условие отделимости (WSP).

П. Моран в 1946 году [36] ввёл условие открытого множества (OSC) для самоподобных множеств на прямой, а Дж. Хатчинсон [18] применил введённое Мораном условие открытого множества к системам сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ для любого натурального n.

Мы говорим, что система сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ удовлетворяет условию открытого множества, если существует открытое множество O такое, что множества $\{O_i = S_i(O) | S_i \in \mathcal{S}\}$ содержатся в O и попарно друг с другом не пересекаются. Если система $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами подобия $r_1, \ldots, r_m$ удовлетворяет условию открытого множества, то хаусдорфова размерность аттрактора этой системы равна его размерности подобия s, которая является решением уравнения Морана

$$r_1^s + \ldots + r_m^s = 1.$$

Условие открытого множества справедливо далеко не всегда. Но и в случае, когда система $\mathcal{S}$ удовлетворяет OSC, его проверка может быть сопряжена с определёнными трудностями. Например, открытое множество может иметь очень сложную структуру или состоять из бесконечного числа связных компонент [1]. Поэтому К. Бандт и З. Граф в 1992 году [2] нашли алгебраический аналог для OSC и ввели алгебраическое условие, основанное на ассоциированном семействе подобий $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Это условие состоит в том, что $\mathrm{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})}$. Авторы показали, что оно эквивалентно тому, что для системы $\mathcal{S}$ с размерностью подобия s, s-мерная мера Хаусдорфа её аттрактора положительна, то есть

$$\mathrm{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow H^s(K) > 0.$$

Более того, при выполнении этого условия пересечения копий самоподобного множества K имеют нулевую меру.

Условие открытого множества можно усилить требованием, согласно которому открытое множество O и аттрактор K системы $\mathcal{S}$ имеют непустое пересечение. Так получается сильное условие открытого множества (SOSC). В 1994 г. А. Шиф [42] показал, что все три условия — SOSC, OSC и условие положительности меры Хаусдорфа в размерности подобия — эквивалентны.

В 1996 году М. Цернер [47] ввёл слабое условие отделимости (WSP). Самоподобное множество удовлетворяет WSP, если тождественное отображение Id не является предельной точкой в ассоциированном семействе подобий $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, то есть $\mathrm{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})} \setminus \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Для самоподобных множеств, удовлетворяющих WSP, можно модифицировать уравнение Морана так, что решение этого уравнения будет совпадать с размерностью Хаусдорфа. Для систем сжимающих подобий, не удовлетворяющих WSP, вычисление размерности Хаусдорфа их аттракторов может быть непростой задачей.

0.1.2 Дендриты

Дендритом называют локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг. Вообще говоря, слово «дендрит» является термином из общей топологии [25, 26]. Согласно обзору [10] Я. Харатоника и В. Харатоника, история исследований в этой области охватывает более чем 75 лет.

В теории самоподобных множеств с самого её начала предпринимались попытки выработать некоторые подходы к самоподобным дендритам. В 1985 году М. Хата [17] показал, что нетривиальный самоподобный дендрит имеет бесконечное множество концевых точек. В 1990 году К. Бандт [5] показал, что кратчайшие дуги, соединяющие пары точек самоподобной границы в посткритически конечном самоподобном множестве, являются аттракторами граф-ориентированных систем, а множество возможных значений размерностей таких дуг конечно. Такие дуги с минимальной размерностью и мерой называются кратчайшими дугами. В случае самоподобных дендритов, эти результаты описывают главные дуги.

К. Бандт также рассмотрел [3] факторизацию индексного пространства, приводящую к появлению дендритов. Дж. Кигами в своей работе [23] применил к дендритам методы гармонического анализа на фракталах.

В работах последней четверти XX века рассматривались несколько важных примеров самоподобных дендритов. К ним можно отнести дерево Хаты [17], множество Вичека или пентадендрит [33]. Тем не менее, долгое время отсутствовали удобные геометрические методы, позволяющие целенаправленно конструировать системы сжимающих подобий, аттракторы которых являлись бы дендритами. Позднее, в статье [54] были описаны методы задания и геометрические свойства самоподобных дендритов в $\mathbb{R}^d$ — вопросы, до 2017 года ещё недостаточно освещённые в теории самоподобных фракталов. Для этого был построен и исследован класс P-полиэдральных дендритов в $\mathbb{R}^d$. Такие дендриты K определяются как аттракторы систем $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, переводящих заданный полиэдр $P \subset \mathbb{R}^d$ в полиэдры $P_i \subset P$, попарные пересечения которых либо пусты, либо одноточечны и при этом являются общими вершинами полиэдров P_i, а граф попарных пересечений системы полиэдров P_i ацикличен. Эти же авторы в работе [41] более подробно изучили стягиваемые P-полигональные системы — двумерный частный случай P-полиэдральных систем и привели примеры изоморфизмов между аттракторами двух геометрически различных полигональных систем. Это привело к поиску более широкого класса дендритов путём ослабления условий, задающих стягиваемые P-полигональные системы. Исследование такого класса дендритов является одной из целей данной работы.

Говоря о полигональных системах, нельзя не упомянуть о полигаскетах, описанных К. Бандтом и Й. Штанке в работе [5] и Р. Стритчартсом в работах [43, 44], которые хоть и не являются дендритами, но для их построения использовались схожие геометрические методы. Для полигаскетов ими также были описаны кратчайшие дуги, соединяющие пару точек полигаскета и имеющих минимальную размерность и меру. Кратчайшие дуги позднее будут применены в работах [54, 41] для построения главных дуг и главного дерева самоподобного дендрита, являющегося аттрактором полигональных систем.

Проверка того, является ли самоподобное множество дендритом, связана со структурой попарных пересечений копий этого аттрактора. Следует начать с результатов М. Хаты [17], который в 1985 году доказал для самоподобного множества критерий связности. Опишем эквивалентную формулировку этого критерия.

Рассмотрим для самоподобного множества его граф пересечений, в котором вершинам графа соответствуют копии самоподобного множества, а рёбра соединяют вершины, для которых соответствующие копии имеют непустое пересечение. М. Хата показал, что самоподобное множество K связно тогда и только тогда, когда его граф пересечений связен. При этом, если K связно, то оно локально связно и линейно связно.

В дальнейшем К. Бандт и К. Келлер в работе [3] показали, что если у самоподобного множества копии пересекаются не более чем по одной точке и его граф пересечений есть дерево, то это множество является дендритом. Для дендритов, в которых по одной точке пересекались более двух копий, ими была сформулирована идея двудольного графа пересечений. Завершил доказательство этой идеи А. В. Тетенов [45], определив двудольный граф пересечений, в котором одной доле соответствуют копии аттрактора, а другой доле — точки попарных пересечений этих копий. Ребром в графе могут соединятся только точки разных долей, если соответствующая точка пересечения лежит в соответствующей копии. Таким образом было получено необходимое и достаточное условие того, что самоподобные множества с одноточечным пересечением являются дендритами.

Данная диссертация в значительной степени посвящена изучению самоподобных дендритов. Во второй главе определяются обобщённые полигональные системы и даются условия, при которых аттрактор такой системы будет дендритом. В третьей главе представлен алгоритм, выявляющий среди фрактальных кубов дендриты с одноточечным пересечением. В четвёртой главе более рассматриваются фрактальные квадраты, являющиеся дендритами, в частности, их самоподобные границы и главные деревья.

0.1.3 Фрактальные квадраты

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости. Разобьём этот квадрат на n^2 равных квадратов с ребром $1/n$, и в этом множестве квадратов разбиения выберем какое-то непустое подмножество. Построим систему $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ гомотетий, переводящих единичный квадрат в выбранные квадраты. Аттрактор K этой системы мы будем называть *фрактальным квадратом.* Широко известными примерами фрактальных квадратов являются множество Вичека и ковёр Серпинского.

Фрактальные квадраты являются самоподобным частным случаем самоаффинных *ковров Бедфорда-МакМаллена*. Последние, в свою очередь, являются двумерным аналогом самоаффинных *губок Серпинского*. Самоподобную губку Серпинского называют фрактальным кубом.

В 1984 году независимо друг от друга Т. Бедфорд [7] и К. МакМаллен [32] определили и рассмотрели класс самоаффинных множеств, которые впоследствии стали называть коврами Бедфорда-МакМаллена. Одним из их результатов была формула для вычисления хаусдорфовой размерности таких множеств.

Как оказалось, размерность и мера ковров Бедфорда-МакМаллена и их многомерных аналогов обладает более сложным поведением по сравнению со своими самоподобными частными случаями. Так, Ю. Перес [38] в 1994 году показал, что мера Хаусдорфа (в своей размерности) у ковров Бедфорда-МакМаллена может быть не σ-конечной. Позднее Ю. Перес и Р. Кеньон [21] вывели формулу хаусдорфовой размерности для губок Серпинского. М. Елекес с соавторами [14] рассматривали меры на самоаффинных губках и на пересечениях губок при смещениях. Подробный обзор и сравнение различных фрактальных размерностей (Хаусдорфа, клеточная, упаковочная, Ассуада и др.) для губок Серпинского в 2021 году привёл Дж. Фрейзер [16]. Т. Зайцева и В. Протасов (2022) исследовали структуру многомерных периодических замощений.

В 2013 году К.-С. Лау, Дж. Дж. Луо и Х. Рао [27] рассмотрели топологические свойства замощений плоскости фрактальными квадратами. Л. Кристеа и Б. Штайнски выпустили цикл работ [11, 12, 13], посвящённый выделению и исследованию поддуг во фрактальных квадратах и фрактальных треугольниках. Они выделили один класс фрактальных квадратов, являющихся дендритами, назвав их лабиринтными фракталами и изучали случайные фракталы, принадлежащие этому классу. Дж.-Ц. Сяо [46] строил и изучал несвязные фрактальные квадраты с конечным числом компонент, для этого он особым образом модифицировал граф пересечений.

В третьей главе данной диссертации рассматривается структура и свойства пересечения пары фрактальных k-кубов. В четвёртой главе более подробно рассмотрены самоподобная граница, свойство одноточечного пересечения и главное дерево у нетривиальных односвязных фрактальных квадратов.

0.2 Научная новизна. Теоретическая и практическая ценность.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Найдено необходимое условие, при котором аттрактор обобщённой полигональной системы является дендритом.

2. Доказано, что при достаточно малом $\delta = \delta(\mathcal{S}) > 0$ аттрактор любой (удовлетворяющей условию совпадения параметров) δ-деформации $\mathcal{S}'$ полигональной системы $\mathcal{S}$ является дендритом, изоморфным аттрактору системы $\mathcal{S}$.

3. Получена формула, выражающая пересечение двух фрактальных k-кубов в терминах их множеств единиц. Найдены условия, при которых такое пересечение будет пустым, конечным, счётным и несчётным. Для конечного пересечения получена оценка мощности.

4. Разработан алгоритм, позволяющий проверить, является ли фрактальный k-куб дендритом с одноточечным пересечением.

5. Доказано, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты являются дендритами со свойством одноточечного пересечения.

6. Доказано, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты допускают ровно семь возможных топологических типов главного дерева.

Перечисленные результаты являются новыми.

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения самоподобных множеств, фрактальных кубов, ковров Бедфорда-МакМаллена и губок Серпинского. Результаты работы могут быть использованы специалистами по комплексному, действительному и функциональному анализу, топологии и фрактальной геометрии.

Результаты, полученные на основе полигональных дендритов и фрактальных квадратов, могут иметь практическое применение в радиофизике [51, 39], во фрактальной реконструкции сигналов и радиолокационных изображений [52, 53], в материаловедении [19] и в других областях физики, химии и биологии.

0.3 Апробация результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в шести изданиях [57, 58, 59, 60, 61, 62], пять из которых [57, 58, 59, 61, 62] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Результаты всех работ получены авторами совместно при равном вкладе и являются неделимыми.

Результаты и основные положения диссертации докладывались на семинаре «Геометрическая теория функций» ИМ СО РАН (руководители: проф. А. Д. Медных, чл.-корр. РАН А. Ю. Веснин, проф. В. В. Асеев); на семинаре «Теория графов» ИМ СО РАН (руководители: к.т.н. Е. В. Константинова, к.ф.-м.н. А. А. Добрынин); на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» ИМ СО РАН (руководитель акад. И. А. Тайманов).

Результаты диссертации были представлены на международных конференциях «Dynamics in Siberia» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2021, 2024); на Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, НГУ, 2021); на Международной школе-конференции «Комплексный анализ и его приложения» (Геленджик, КубГУ, 2021); на Международной школе-конференции «Siberian summer conference: Current developments in Geometry» (Новосибирск, НГУ, ИМ СО РАН, 2021); на Международной конференции «AMS Fall Western Virtual Sectional Meeting» (University of New Mexico, 2021); на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022» (Москва, МГУ, 2022); на Международной конференции «AMS Spring Western Virtual Sectional Meeting» (University of Denver, 2022); на Международной конференции «023w: Геометрия и топология трёхмерных многообразий» (Сочи, МЦ Сириус, 2022); на Международной конференции по геометрическому анализу, посвященной памяти Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2022); на Второй конференции Математических центров России (Москва, МГУ, МИАН, 2022); на Международной конференции «030w: Geometric and Algebraic Methods in Knot Theory» (Сочи, МЦ Сириус, 2023); на Школе-конференции по геометрическому анализу (Новосибирск, НГУ, 2023); на Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2023).

0.4 Содержание диссертации

Перейдём к описанию структуры работы и точным формулировкам основных результатов. Диссертация выполнена в издательской системе LaTeX, содержит 85 страниц и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Список литературы приведён в алфавитном порядке. Изображения построены в программе IFStile и с помощью макропакета PGF/Tikz для системы LaTeX.

В **первой главе** вводятся базовые понятия теории самоподобных множеств.

Определение 1.1. (J. Hutchinson (1981), см. [18]) *Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ — система (инъективных) сжимающих отображений полного метрического пространства (X, d). Непустое компактное множество $K \subset X$ называется аттрактором системы $\mathcal{S}$, если*

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K).$$

Мы также называем множество K самоподобным (инвариантным) относительно системы $\mathcal{S}$.

На протяжении всей работы особый интерес будут представлять самоподобные множества, являющиеся дендритами.

Определение 1.6. (К. Куратовский, [25]; J. Charatonik, W. Charatonik, [10]) Дендрит — *это локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.*

Простой замкнутой дугой мы называем непрерывный иньективный образ окружности.

Самоподобной границей аттрактора K называется множество ∂K всех таких точек $x \in K$, что для некоторой композиции $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1} \dots S_{j_n}$ отображений системы $\mathcal{S}$ образ $S_{\mathbf{j}}(x)$ содержится в пересечении пары копий аттрактора K.

Определение 1.13. *Пусть K — самоподобный дендрит с конечной самоподобной границей ∂K. Минимальный поддендрит $\hat{\gamma} \subset K$, содержащий ∂K, называется* главным деревом *дендрита K.*

Если в самоподобном множестве его копии попарно пересекаются не более чем по одной точке, то мы говорим, что такое множество обладает свойством одноточечного пересечения. Первым удобным классом самоподобных дендритов с одноточечным пересечением являются аттракторы стягиваемых полигональных систем.

Определение 1.11. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — гомеоморфный диску ограниченный многоугольник, а $\mathcal{V}_P = \{A_1, \dots, A_{n_P}\}$ — множество его вершин. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ – такая система подобий в $\mathbb{R}^2$, что:*

(D1) *для любого $i \in I$ множество $P_i = S_i(P) \subset P$;*

(D2) *для любых неравных $i, j \in I$, $P_i \bigcap P_j = \mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}$, а $\#(\mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}) \leqslant 1$;*

(D3) $\mathcal{V}_P \subset \bigcup\limits_{i \in I} S_i(\mathcal{V}_P)$;

(D4) *множество $\widetilde{P} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$ стягиваемо.*

Такая система $\mathcal{S}$, удовлетворяющая условиям $(\mathbf{D1} - \mathbf{D4})$, называется стягиваемой P-полигональной системой подобий.

Теорема 1.12. *Аттрактор K стягиваемой P-полигональной системы подобий $\mathcal{S}$ является дендритом.*

Обнаружить самоподобные дендриты с одноточечным пересечением позволяет двудольный граф пересечений.

Определение 1.9. *Пусть $K = K(\mathcal{S})$ — самоподобное множество, обладающее свойством одноточечного пересечения.* Двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ *системы $\mathcal{S}$ — это двудольный граф с долями $\mathcal{K} = \{K_i : \ i \in I\}$*

(белые вершины) и $\mathcal{P} = \{p: \ p \in K_i \cap K_j, \ i, j \in I, i \neq j\}$ *(чёрные вершины), и с множеством рёбер* $E = \{(K_i, p): \ p \in K_i\}$.

Теорема 1.10. *Пусть* $K = K(\mathcal{S})$ *— самоподобный континуум со свойством одноточечного пересечения. Если граф пересечений* $\hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ *системы* $\mathcal{S}$ *является деревом, то её аттрактор* K *— дендрит с одноточечным пересечением.*

Во **второй главе** получен более широкий класс полигональных дендритов. Для этого были ослаблены требования, накладываемые на стягиваемые полигональные системы.

Определение 2.1. *Система* $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$*, удовлетворяющая условиям* **D2-D4** *Определения 1.11, называется обобщенной* P*-полигональной системой подобий.*

Основные результаты главы затрагивают те обобщённые полигональные системы, которые являются δ-деформациями стягиваемых полигональных систем.

Определение 2.4. *Пусть* $\delta > 0$. *Обобщенная* P'*-полигональная система* $\mathcal{S}' = \{S'_1, ..., S'_m\}$ *называется* δ*-деформацией* P*-полигональной системы* $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$*, если существует биекция* $f : \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k} \to \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P'_k}$ *такая, что*

a) $f|_{\mathcal{V}_P}$ *продолжается до гомеоморфизма* $\tilde{f} : P \to P'$;

b) $|f(x) - x| < \delta$ *для любого* $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k}$;

c) $f(S_k(x)) = S'_k(f(x))$ *для любого* $k \in I$ *и* $x \in \mathcal{V}_P$.

Аттрактор K обобщённой полигональной системы $\mathcal{S}$ уже не обязан быть дендритом, поэтому для $\mathcal{S}$ требуется дополнительно проверить, что равенство $S_i(K) \cap S_j(K) = P_i \cap P_j$ выполняется. В таком случае аттрактор K стягиваемой полигональной системы $\mathcal{S}$ и аттрактор K' её δ-деформации $\mathcal{S}'$ изоморфны.

Рассмотрим дугу Γ с концами в точках A, B и такое сжимающее подобие S, что $S(A) = A$. Если $S(\Gamma) \subset \Gamma$, то мы говорим, что Γ инвариантна относительно подобия S.

Параметром инвариантной дуги Γ *относительно конца* A называется отношение $\lambda := \dfrac{\alpha}{\ln \rho}$, где $\alpha = \Delta \underset{z \in \Gamma \setminus S(\Gamma)}{\mathrm{Arg}} (z - A)$ и $\rho = \mathrm{Lip}(S)$.

Мы будем говорить, что обобщённая полигональная система система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию совпадения параметров*, если для каждого $x = S_i(P) \cap S_j(P)$ (при $i \neq j$) все инвариантные дуги $\gamma_i \subset S_i(K)$ и $\gamma_j \subset S_j(K)$) с концом в x имеют относительно x одинаковые параметры.

Основные результаты главы формулируются в следующих теоремах.

Теорема2.17 (о совпадении параметров)**.** *Пусть аттрактор K обобщённой полигональной системы $\mathcal{S}$ является дендритом. Тогда система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию совпадения параметров.*

Теорема 2.23 (о малых деформациях)**.** *Для каждой полигональной системы $\mathcal{S}$ существует такое $\delta(\mathcal{S}) > 0$, что для всякой её δ-деформации $\mathcal{S}'$, удовлетворяющей условию совпадения параметров, аттрактор системы $\mathcal{S}'$ является дендритом, изоморфным аттрактору системы $\mathcal{S}$.*

В **третьей главе** рассматриваются фрактальные k-кубы, структура пересечения их копий, а также пересечение пары фрактальных k-кубов. В конце главы описывается последовательность действий, по которым можно определить, является ли данный фрактальный куб дендритом с одноточечным пересечением.

Определение 3.1 (см. [37, 27])**.** *Пусть $D = \{d_1, \ldots, d_r\}$, $d_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^k$, где $n \geqslant 2$, а $1 < \#D < n^k$.* Фрактальным k-кубом порядка n с множеством единиц D *называют компактное множество $K \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее равенству*

$$K = \frac{K + D}{n} = \bigcup_{d_i \in D} \frac{d_i + K}{n}.$$

Пусть $A = \{-1, 0, 1\}^k$. Каждому вектору $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in A$ соответствует единственная грань единичного k-куба $P = [0, 1]^k$, задаваемая равенством $P_{\boldsymbol{\alpha}} = P \cap (P + \boldsymbol{\alpha})$. Такое соответствие между множеством Aи множеством граней k-куба P является взаимно-однозначным. Мы будем говорить, что $\boldsymbol{\alpha} \sqsubseteq \boldsymbol{\beta}$ если и только если $P_{\boldsymbol{\alpha}} \supseteq P_{\boldsymbol{\beta}}$.

Пусть K^1 и K^2 — фрактальные k-кубы порядка n с множествами единиц D^1 и D^2. Гранью $K^i_{\boldsymbol{\alpha}}$ фрактального k-куба K^i называется множество $K^i \cap P_{\boldsymbol{\alpha}}$. Для любого $\boldsymbol{\alpha} \in A$ символом $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ обозначим пересечение $K^1_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K^2_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}) = K^1 \cap (K^2 + \boldsymbol{\alpha})$ пары граней фрактальных k-кубов K^1 и K^2. Первый результат этой главы выражает пересечение $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ в терминах множеств $F_{\boldsymbol{\beta}}$ (где $\boldsymbol{\beta} \sqsupseteq \boldsymbol{\alpha}$) и множеств единиц D^1 и D^2.

Теорема 3.7. *Семейство множеств $\{F_{\boldsymbol{\alpha}} = K^1 \cap (K^2 + \boldsymbol{\alpha}) \ : \ \boldsymbol{\alpha} \in A\}$ удовлетворяет системе Σ уравнений*

$$F_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcup_{\boldsymbol{\beta} \sqsupseteq \boldsymbol{\alpha}} \frac{F_{\boldsymbol{\beta}} + G_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}}{n}, \text{ где } G_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = D^1 \cap (D^2 + n\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}). \tag{3.3}$$

Отношения между множествами $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ описываются *структурным графом* Γ_Σ с множеством вершин $\{\boldsymbol{\alpha} \in A \ : \ F_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing\}$ и множеством рёбер $\{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ :$

$\boldsymbol{\alpha} \sqsubseteq \boldsymbol{\beta}, G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \neq \varnothing, F_{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing\}$, где ребро $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ направлено из $\boldsymbol{\alpha}$ в $\boldsymbol{\beta}$ и отмечено $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.

Мы пишем $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$, если Γ_Σ содержит направленный путь из $\boldsymbol{\alpha}$ в $\boldsymbol{\beta}$, и $\boldsymbol{\beta} \succ \boldsymbol{\alpha}$, если при этом $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. Обозначим через $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ подграф графа Γ_Σ с множеством вершин $\{\boldsymbol{\beta} \,:\, \boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}\}$.

Следующая оценка множества $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ является вторым результатом главы.

Теорема 3.11.

(1) *Если $\# G_{\boldsymbol{\beta}} > 1$ для некоторого $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$, то $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ несчётно.*

(2a) *Если $\# G_{\boldsymbol{\beta}} \leqslant 1$ для любого $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$, то $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ не более чем счетно.*

(2b) *Если при этом $\exists\, \boldsymbol{\beta}' \succ \boldsymbol{\beta}$ такое, что $\# G_{\boldsymbol{\beta}} = 1$ и $F_{\boldsymbol{\beta}'} \neq \varnothing$, то $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ счетно.*

(3) *Если $\# G_{\boldsymbol{\beta}} = 1$ для всех максимальных вершин $\boldsymbol{\beta}$ в $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$, и $G_{\boldsymbol{\alpha}_i} = \varnothing$ для всех остальных вершин $\boldsymbol{\alpha}_i$ в $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$, то $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ конечно. В этом случае $\# F_{\boldsymbol{\alpha}}$ не превосходит сумму произведений $\prod\limits_{j=1}^{p-1} \# G_{\boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\alpha}_{j+1}}$, взятых по всем цепочкам $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta}$ максимальна в $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$.*

(4) *Если все $\boldsymbol{\alpha}_i \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$ образуют единственную цепочку $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p$, в которой $G_{\boldsymbol{\alpha}_j} = \varnothing$ и $\# G_{\boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\alpha}_{j+1}} = 1$, $\# G_{\boldsymbol{\alpha}_p} = 1$ для всех $j \leqslant p-1$, то $\# F_{\boldsymbol{\alpha}} = 1$.*

Далее будем полагать, что $K = K^1 = K^2$. Тогда $F_{\boldsymbol{\alpha}} = K \cap (K + \boldsymbol{\alpha})$. Фрактальный k-куб K является множеством с одноточечным пересечением, если для каждого $\boldsymbol{\alpha} \succ 0$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно.

Чтобы проверить, является ли фрактальный k-куб K дендритом с одноточечным пересечением, нужно выполнить следующие шаги.

1. Найдём все множества $G_{\boldsymbol{\alpha}}, G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ и выпишем систему уравнений Σ.
2. Построим структурный граф Γ_Σ и рассмотрим подграф Γ_0.
3. Проверим, является ли K множеством с одноточечным пересечением. Если это не так, то K — это не дендрит с одноточечным пересечением.
4. Построим двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ для фрактального куба K, сопоставив белым вершинам векторы из D. Тогда для каждого $\boldsymbol{\alpha} \sqsupset 0$ пара белых вершин $d, d + \boldsymbol{\alpha}$ соединена рёбрами с общей чёрной вершиной, если $d \in G_{0\boldsymbol{\alpha}}$. Теорема 3.14 и следствие 3.15 позволит обнаружить случаи, когда чёрная вершина в $\hat{\Gamma}$ соединена более чем с двумя белыми вершинами.
5. Проверим, является ли граф $\hat{\Gamma}$ деревом. Если $\hat{\Gamma}$ — дерево, то K — дендрит с одноточечным пересечением.

В **четвёртой главе** были рассмотрены главные деревья нетривиальных односвязных фрактальных квадратов.

Фрактальные квадраты являются частным случаем фрактальных k-кубов при $k = 2$, поэтому их более глубокое изучение в значительной степени опирается на результаты предыдущей главы.

Если у самоподобного дендрита конечная самоподобная граница, то главные деревья таких дендритов имеют конечное число концов. Тогда мы можем перечислить все топологические типы главных деревьев. Это позволит разбить все фрактальные квадраты на конечное число классов согласно форме главного дерева.

Первый результат текущей главы заключается в следующем.

Предложение 4.6. *Всякий односвязный фрактальный квадрат K либо совпадает с P, либо является дендритом. В последнем случае K со свойством одноточечного пересечения.*

Из этого следует, что фрактальный квадрат K является дендритом тогда и только тогда, когда его двудольный граф пересечений является деревом.

В дальнейшем, говоря «односвязный фрактальный квадрат», мы будем иметь ввиду «нетривиальный (то есть не совпадающий с P) односвязный фрактальный квадрат».

Для фрактального квадрата K с множеством единиц D мы определим множество $A_D = \{\boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{(0,0)\} : G_{0\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing, \ F_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing\}$. Тогда самоподобная граница ∂K фрактального квадрата K есть объединение $\partial K = \bigcup\limits_{\boldsymbol{\alpha} \in A_D} F_{\boldsymbol{\alpha}}$. Если при этом K — дендрит, то для любого $\boldsymbol{\alpha} \in A_D$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно.

Следующая теорема группирует односвязные фрактальные квадраты по типам в зависимости от расположения точек их самоподобной границы.

Теорема 4.9. *Пусть K — нетривиальный фрактальный квадрат, не являющийся отрезком. Тогда $\#\partial K \in \{3, \ 4, \ 6\}$.*
Если $\#\partial K = 4$, то $\partial K = F_{\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{-\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{\boldsymbol{\beta}} \cup F_{-\boldsymbol{\beta}}$, где пара $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ принимает одно из следующих значений:

A. $\boldsymbol{\alpha} = (1,0)$, $\boldsymbol{\beta} = (0,1)$;

B. $\boldsymbol{\alpha} = (1,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,-1)$;

C. $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,1), \ (1,-1)\}, \boldsymbol{\beta} \in \{(1,0), \ (0,1)\}$.

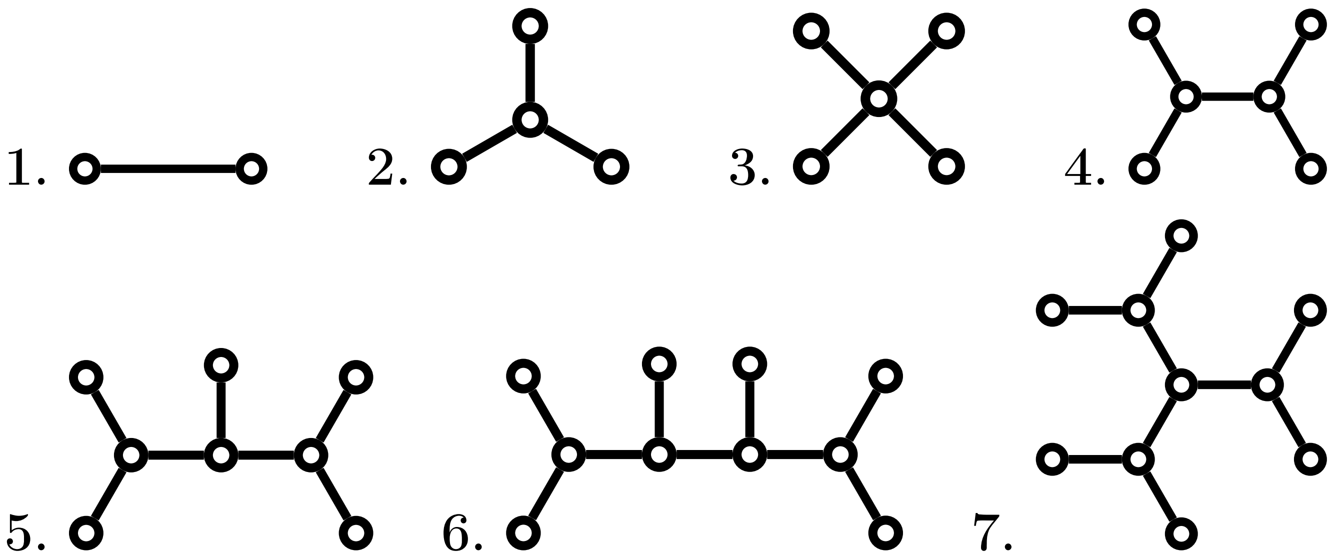
Если $\#\partial K = 3$ или $\#\partial K = 6$, то

D. $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_{\boldsymbol{\beta}} \cup F_{-\boldsymbol{\beta}}$, *где* $\boldsymbol{\beta} \in \{(1,1), \ (1,-1)\}$.

Зная мощность самоподобной границы односвязных фрактальных квадратов, можно перечислить все топологические типы их главных деревьев. Поскольку $\#\partial K \leqslant 6$, в главном дереве не может быть более 6 концов.

Пусть K — нетривиальный фрактальный квадрат. Лемма 4.10 указывает для K комбинации векторов, которые не могут встречаться в множестве единиц D. Согласно лемме 4.11, $Ord(x, K) \leqslant 2$ для любой угловой точки x. Теорема 4.12 указывает количество угловых точек для каждого типа самоподобной границы. Теорема 4.13 оценивает порядок ветвления произвольной точки $x \in K$ и гласит, что $Ord(x, K) \leqslant 4$ для любого $x \in K$. Согласно предложению 4.14, если ∂K типу **D6** и γ — его главное дерево, то $Ord(x, \gamma) \leqslant 2$ для любого $x \in \partial K$ и $Ord(x, \gamma) \leqslant 3$ для любого $x \in \gamma$. Эти свойства ограничивает перечень допустимых типов главного дерева и позволяет сформулировать последний результат главы.

Теорема 4.15. *Для нетривиальных односвязных фрактальных квадратов существует только 7 топологических типов главного дерева, модели которых показаны ниже.*



Если мы будем классифицировать односвязные фрактальные квадраты по типу главного дерева, то мы получим 7 классов.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Самоподобные множества и дендриты

1.1.1 Самоподобные множества

Базовым понятием в теории самоподобных множеств является понятие аттрактора системы сжимающих отображений.

Определение 1.1. (J. Hutchinson (1981), см. [18]) *Пусть* $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *— система (инъективных) сжимающих отображений полного метрического пространства* (X, d)*. Непустое компактное множество* $K \subset X$ *называется аттрактором системы* $\mathcal{S}$*, если*

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K).$$

Мы также называем множество K *самоподобным (инвариантным) относительно системы* $\mathcal{S}$*.*

Определение 1.2. *Для системы* $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ *сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$ *равенством* $T(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(A)$ *задаётся оператор Хатчинсона* T *на пространстве* $C(\mathbb{R}^n)$ *непустых компактов в* $\mathbb{R}^n$ *.*

Согласно Теореме Хатчинсона, аттрактор K существует и единственен для $\mathcal{S}$, а для любого компактного множества $A \subset X$ последовательность $T^n(A)$ сходится к K. Это действительно так, ведь если $C(\mathbb{R}^n)$ — полное метрическое гиперпространство непустых компактов из $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа, то оператор Хатчинсона T системы $\mathcal{S}$ в этом пространстве является сжимающим отображением, а значит T имеет в нём единственную неподвижную точку $K = T(K)$, которой и является аттрактор системы $\mathcal{S}$.

Подобием мы называем преобразование евклидова пространства, при котором для любых двух точек A, B и их образов A', B' имеет место соотношение

$|A'B'| = q \cdot |AB|$ при некотором фиксированном $q \neq 0$, называемым *коэффициентом подобия.* Тогда подобие можно представить как суперпозицию гомотетии, параллельного переноса и ортогонального преобразования. На протяжении всей главы предполагается, что отображения $S_i \in \mathcal{S}$ являются сжимающими подобиями, а множество X — это $\mathbb{R}^2$. Поэтому мы будем использовать комплексные обозначения для точки на плоскости, поэтому каждое подобие может быть записано как $S_j(z) = q_j e^{i\alpha_j}(z - z_j) + z_j$, где $q_j = \operatorname{Lip} S_j$ и $z_j = \operatorname{fix}(S_j)$.

Как уже говорилось выше, коэффициент $q_j = \operatorname{Lip} S_j$ мы называем *коэффициентом подобия* отображения S_j. Для системы $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ обозначим $q_{min} = \min\{q_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ и $q_{max} = \max\{q_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ — минимальный и максимальный коэффициенты подобия отображений системы $\mathcal{S}$.

Важным и полезным инструментом при описании и изучении самоподобного множества является индексная параметризация точек и копий самоподобного множества. Пусть дана система $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$. Тогда $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ — это *множество индексов* системы $\mathcal{S}$, в то время как $I^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n$ мы называем *множеством всех мультииндексов конечной длины* $\mathbf{j} = j_1 j_2 \ldots j_n$. Длина n мультииндекса $\mathbf{j} = j_1 ... j_n$ обозначается как $|\mathbf{j}|$, а $\mathbf{ij}$ обозначает конкатенацию соответствующих мультииндексов. Мы говорим, что $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, если $\mathbf{j} = \mathbf{il}$ с некоторым $\mathbf{l} \in I^*$, то есть слово $\mathbf{i}$ является началом слова $\mathbf{j}$. Если $\mathbf{i} \not\sqsubset \mathbf{j}$ и $\mathbf{j} \not\sqsubset \mathbf{i}$, то $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ называем *несравнимыми.*

Для мультииндекса $\mathbf{j} \in I^*$ мы пишем $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1 j_2 \ldots j_n} = S_{j_1} S_{j_2} \ldots S_{j_n}$ и для аттрактора $K = K(\mathcal{S})$ мы обозначим $S_{\mathbf{j}}(K)$ как $K_{\mathbf{j}}$ и будем называть $K_{\mathbf{j}}$ *копией степени* n самоподобного множества K. Тогда если $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, то $K_{\mathbf{j}} \subset K_{\mathbf{i}}$.

Вместе с системой $\mathcal{S}$ мы можем рассматривать её n-ное измельчение $\mathcal{S}^{(n)} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^n\}$, оператор Хатчинсона которой равен T^n. Мы также обозначим через $G_{\mathcal{S}} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$ полугруппу, порожденную системой $\mathcal{S}$.

Обозначим $I^\infty = \{\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \mid \alpha_i \in I\}$ как *индексное пространство* и мультииндекс бесконечной длины $\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty$ назовём *строкой.* Тогда пусть $\pi : I^\infty \to K$ — так называемое *индексное отображение*, переводящее строку $\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty$ в точку $x = \pi(\boldsymbol{\alpha}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$.

Если $\pi(\boldsymbol{\alpha}) = x$, то $\boldsymbol{\alpha}$ называем *адресом* точки x. Для каждого адреса $\boldsymbol{\alpha}$ точки $x \in K$, точка $x_n = S^{-1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x)$ называется n-м предшественником точки x, а последовательность $x_1, x_2, ...$ называется последовательностью предшественников точки x.

1.1.2 Размерность и связность самоподобного множества

В теории самоподобных множеств часто возникает вопрос о вычислении их фрактальной размерности, например размерности Хаусдорфа. В случае самоподобных множеств мы можем воспользоваться оценкой размерности Хаусдорфа $\dim_H(K) \leqslant s$, где s — *размерность подобия* системы $\mathcal{S}$. Это значение s является решением уравнения Морана $q_1^s + \ldots + q_m^s = 1$.

Такая оценка размерности становится равенством $\dim_H(K) = s$, если копии $K_i, i \in I$ самоподобного множества K пересекаются друг с другом «не слишком сильно», или, говоря более формально, если система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию открытого множества.*

Определение 1.3 (J. Hutchinson (1981), см. [18])**.** *Будем говорить, что система $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ удовлетворяет* условию открытого множества *(OSC), если существует непустое открытое множество $O \subset X$ такое, что*
(1) $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ для любых различных $S_i, S_j \in \mathcal{S}$;
(2) $S_i(O) \subset O$ для любого $S_i \in \mathcal{S}$.

Тогда, если система сжимающих подобий $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию открытого множества, то хаусдорфова размерность аттрактора этой системы равна его размерности подобия s (см. [18, 15]).

Структура пересечений копий самоподобного множества связана не только с размерностью Хаусдорфа, но ещё и влияет на связность самоподобного множества. Самоподобное множество может быть связным, несвязным и даже вполне несвязным, и для проверки самоподобного множества на связность мы можем воспользоваться критерием связности М. Хаты [17, Theorem 4.6]. Однако нам удобнее и нагляднее будет использовать интерпретацию критерия связности, для которой нужно построить простой граф пересечений.

Определение 1.4. *Обозначим как $\tilde{\Gamma}(\mathcal{S})$ граф, вершинам которого соответствуют копии $\{S_i(K) : \ S_i \in \mathcal{S}\}$, а пара вершин $S_i(K)$, $S_j(K)$ соединена ребром, если $S_i(K) \cap S_j(K) \neq \varnothing$. Назовём такой граф* простым графом пересечений *для $K(\mathcal{S})$.*

Теорема 1.5. *Аттрактор $K(\mathcal{S})$ системы $\mathcal{S}$ связен тогда и только тогда, когда его простой граф пересечений $\tilde{\Gamma}(\mathcal{S})$ связен. Если аттрактор $K(\mathcal{S})$ связен, то он локально связен и линейно связен.*

Как видно на рисунке 1.1, треугольник Серпинского связен, поскольку его простой граф пересечений связен.

1.1.3 Критическое множество и самоподобная граница

Пусть $\mathcal{C} := \{x : \ x \in S_i(K) \cap S_j(K), \ i, j \in I, i \neq j\}$ — объединение всех попарных пересечений $S_i(K) \cap S_j(K)$ (при $i \neq j$) копий первого порядка самоподобного множества K. Назовём такое $\mathcal{C}$ *критическим множеством.* Каждая точка критического множества имеет как минимум два адреса в индексном пространстве.

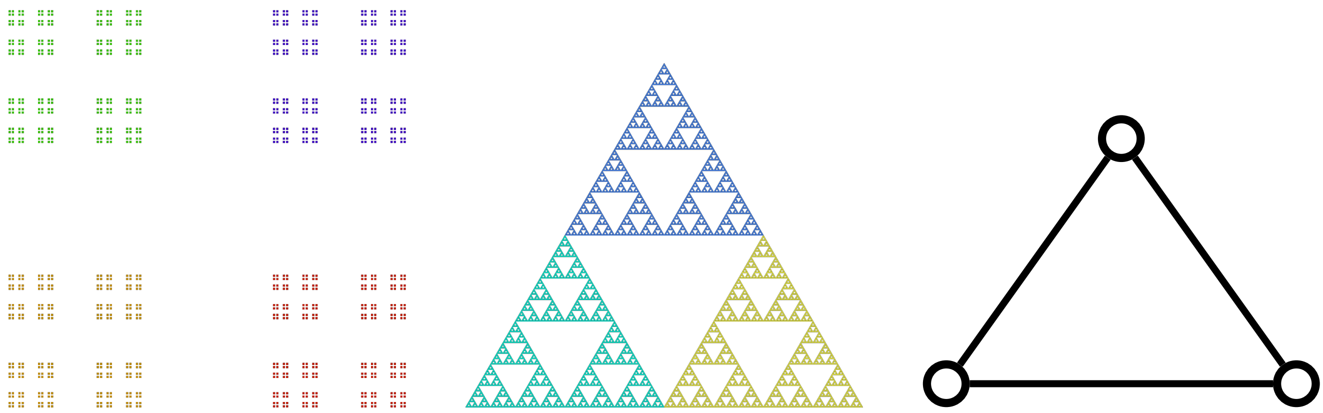


Рис. 1.1: Вполне несвязное множество (слева), треугольник Серпинского и его граф пересечений.

Множество $\partial K := \{x \in K :$ для некоторого $\mathbf{j} \in I^*$ верно $S_{\mathbf{j}}(x) \in \mathcal{C}\}$ назовём *самоподобной границей* для K. Говоря иначе, самоподобная граница ∂K — это множество всех предшественников для точек из $\mathcal{C}$.

Для любой копии $S_{\mathbf{j}}(K)$ (при $\mathbf{j} \in I^*$) мы можем найти множество её граничных точек $\partial K_{\mathbf{j}} = \{K_{\mathbf{j}} \cap \bigcup_{\mathbf{i}} K_{\mathbf{i}} \ : \ \mathbf{i} \in I^*,\ \mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ несравнимы$\}$, по которым копия $K_{\mathbf{j}}$ пересекается со всеми остальными копиями $K_{\mathbf{i}}$ (при несравнимых мультииндексах $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$). Прообраз $S_{\mathbf{j}}^{-1}(\partial K_{\mathbf{j}})$ этого множества граничных точек содержится в самоподобной границе ∂K.

Вообще, для любых несравнимых $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ точка $x \in K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}}$ является образом некоторых точек $x', x'' \in \partial K$ из критического множества относительно отображений $S_{\mathbf{i}}, S_{\mathbf{j}}$, то есть

$$x = S_{\mathbf{i}}(x') = S_{\mathbf{j}}(x'').$$

Посткритическое множество $\mathcal{P}$ системы $\mathcal{S}$ — это множество всех таких адресов $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \in I^\infty$, что для некоторых $\mathbf{j} \in I^*$ справедливо $S_{\mathbf{j}}(\pi(\boldsymbol{\alpha})) \in \mathcal{C}$. Это значит, что критическое множество представляет из себя множество всех адресов точек самоподобной границы. Для посткритического множно дать эквивалентную формулировку, согласно которой $\mathcal{P} = \{\sigma^k(\boldsymbol{\alpha}) : \pi(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{C}, k \in \mathbb{N}\}$, где отображение $\sigma^k : I^\infty \to I^\infty$ определяется как $\sigma^k(\alpha_1\alpha_2\ldots) = \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots$

Система $\mathcal{S}$ называется *посткритически конечной* [22], если её посткритическое множество $\mathcal{P}$ конечно. Таким образом, если система $\mathcal{S}$ посткритически конечна, то она имеет конечную самоподобную границу $\partial K = \pi(\mathcal{P})$. Обратное неверно, поскольку точка самоподобной границы может иметь бесконечное число адресов.

Пример 1.1. Рассмотрим самоподобный дендрит со следующего рисунка и отметим синим цветом точки критического множества и красным самоподобную границу. Каждая точка критического множества имеет как минимум два адреса. В данном примере все адреса точек критического множества периодические,

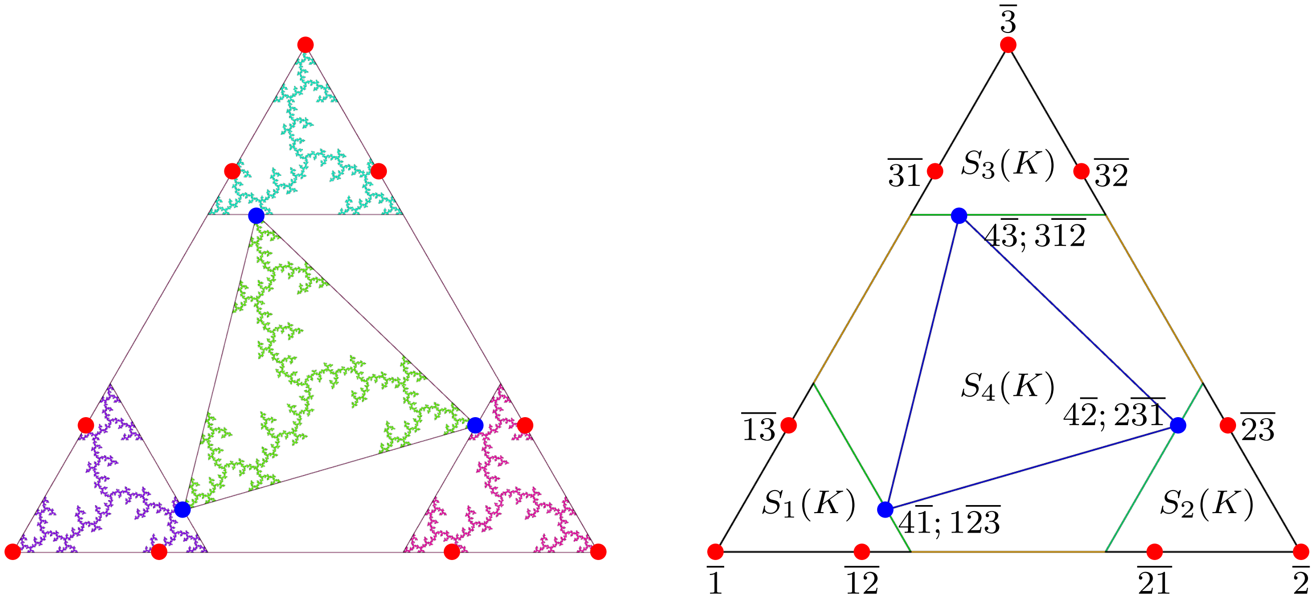


Рис. 1.2: Самоподобный дендрит, его критическое множество и самоподобная граница.

поэтому посткритическое множество конечно (а значит конечна и самоподобная граница).

Обозначим точки $x = \pi(4\overline{1}) = \pi(1\overline{23})$, $y = \pi(4\overline{2}) = \pi(2\overline{31})$ и $z = \pi(4\overline{3}) = \pi(3\overline{12})$. Самоподобную границу будут образовывать последовательности предшественников этих трёх точек по каждому адресу. Так у точки x предшественниками будут точки $\pi(\overline{1})$, $\pi(\overline{23})$ и $\pi(\overline{32})$. У точки y предшественниками будут точки $\pi(\overline{2})$, $\pi(\overline{31})$ и $\pi(\overline{13})$. И, соответственно, у точки z предшественниками будут точки $\pi(\overline{12})$, $\pi(\overline{21})$ и $\pi(\overline{3})$.

1.1.4 Дендриты

На протяжении всей работы особый интерес для меня будут представлять самоподобные множества, являющиеся денритами.

Определение 1.6. (К. Куратовский, [25]; J. Charatonik, W. Charatonik, [10]) Дендрит — *это локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.*

Простая замкнутая дуга — это непрерывный инъективный образ окружности. Дендриты обладают некоторыми примечательными свойствами:

1. Любые две точки дендрита можно соединить единственной лежащей в этом дендрите жордановой дугой;
2. Любое связное подмножество дендрита само является дендритом;
3. Пересечение любых связных подмножеств дендрита связно;

Порядок $Ord(p, X)$ точки p (см. [26]) относительно дендрита X называют *порядком ветвления*.

Теорема 1.7 (J. Charatonik, W. Charatonik (1998), см. [10]). *Порядок* $Ord(p, X)$ *точки* p *относительно дендрита* X *совпадает с числом компонент множества* $X \setminus \{p\}$.

Точки порядка 1 в дендрите X называется *концами* в X; точки с порядком 2 называется *разбивающими точками*; точки же с порядком не менее 3 называются *точками ветвления* в X.

Континуум X будет дендритом тогда и только тогда, когда X локально связно и любые две точки соединяются единственной дугой.

Для простого графа пересечений и критерия связности не важно, по какому множеству пересекаются копии, важен сам факт того, что пересечение непусто. Но в самоподобном дендрите пара копий пересекается либо по пустому, либо по связному множеству, то есть по поддендриту. Удобнее же всего строить и изучать случаи с одноточечным пересечением.

Определение 1.8. *Набор компактов* $\mathcal{A} = \{A_i,\ i \in I\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *обладает* свойством одноточечного пересечения*, если для любых* $i \neq j \in I$*, пересечение* $P_{ij} = A_i \cap A_j$ *не более чем одноточечно.*

Мы можем определить наличие такого свойства у аттрактора системы сжимающих подобий следующим образом. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — система сжимающих отображений в полном метрическом пространстве X, а K — её аттрактор. Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \{K_1, \ldots, K_m\}$. Соответственно систему отображений $\mathcal{S}$ будем называть *системой со свойством одноточечного пересечения*, если система $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ является системой множеств с одноточечным пересечением.

Определение 1.9. *Пусть* $K = K(\mathcal{S})$ *— самоподобное множество, обладающее свойством одноточечного пересечения.* Двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ *системы* $\mathcal{S}$ *— это двудольный граф с долями* $\mathcal{K} = \{K_i : \ i \in I\}$ *и* $\mathcal{P} = \{p : \ p \in K_i \cap K_j,\ i, j \in I, i \neq j\}$*, и с множеством рёбер* $E = \{(K_i, p) : p \in K_i\}$.

В графе $\hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ первой доле (белым вершинам) соответствуют копии самоподобного множества, а второй доле (чёрным вершинам) соответствуют все точки из попарных пересечений копий самоподобного множества. Мы соединяем ребром белую и чёрную вершину, если соответствующая точка пересечения содержится в соответствующей копии.

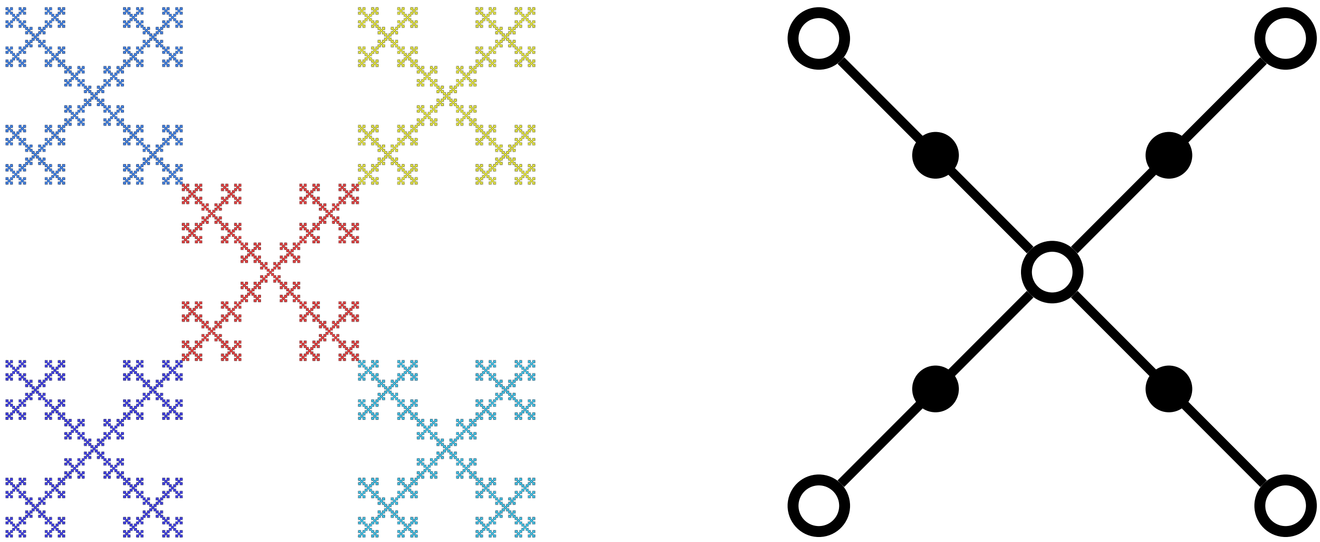


Рис. 1.3: Самоподобный дендрит (слева) и его двудольный граф пересечений (справа).

Преимущество двудольного графа пересечений перед простым графом пересечений состоит в том, что тройке копий, пересекающихся по одной точке, в первом графе соответствует подграф в форме дерева, в то время как во втором графе мы получаем цикл из трёх вершин. Это особенно полезно для следующей теоремы, позволяющей проверить, является ли самоподобное множество дендритом.

Теорема 1.10 (Tetenov A. V. (2021),см. [45, Th.1.7])**.** *Пусть $K = K(\mathcal{S})$ — самоподобный континуум со свойством одноточечного пересечения. Если граф пересечений $\hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ системы $\mathcal{S}$ является деревом, то её аттрактор K — дендрит с одноточечным пересечением.*

Именно такие самоподобные дендриты с одноточечным пересечением мы и будем рассматривать во второй главе. И первым удобно задаваемым классом самоподобных дендритов с одноточечным пересечением являются аттракторы полигональных систем.

1.2 Стягиваемые полигональные системы

Самюэль М., Тетенов А. В. и Ваулин Д. А. в своей работе [41] рассматривают самоподобные дендриты, являющиеся аттракторами стягиваемых полигональных систем, которые задаются следующим образом.

Определение 1.11. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — гомеоморфный диску ограниченный многоугольник, а $\mathcal{V}_P = \{A_1, \ldots, A_{n_P}\}$ — множество его вершин. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ – такая система подобий в $\mathbb{R}^2$, что:*

(D1) *для любого $i \in I$ множество $P_i = S_i(P) \subset P$;*

(D2) *для любых неравных $i, j \in I$, $P_i \bigcap P_j = \mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}$, а $\#(\mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}) \leqslant 1$;*

(D3) $\mathcal{V}_P \subset \bigcup\limits_{i \in I} S_i(\mathcal{V}_P)$*;*

(D4) *множество* $\widetilde{P} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$ *стягиваемо.*

Такая система $\mathcal{S}$*, удовлетворяющая условиям* $(\mathbf{D1} - \mathbf{D4})$*, называется* стягиваемой P-полигональной системой подобий*.*

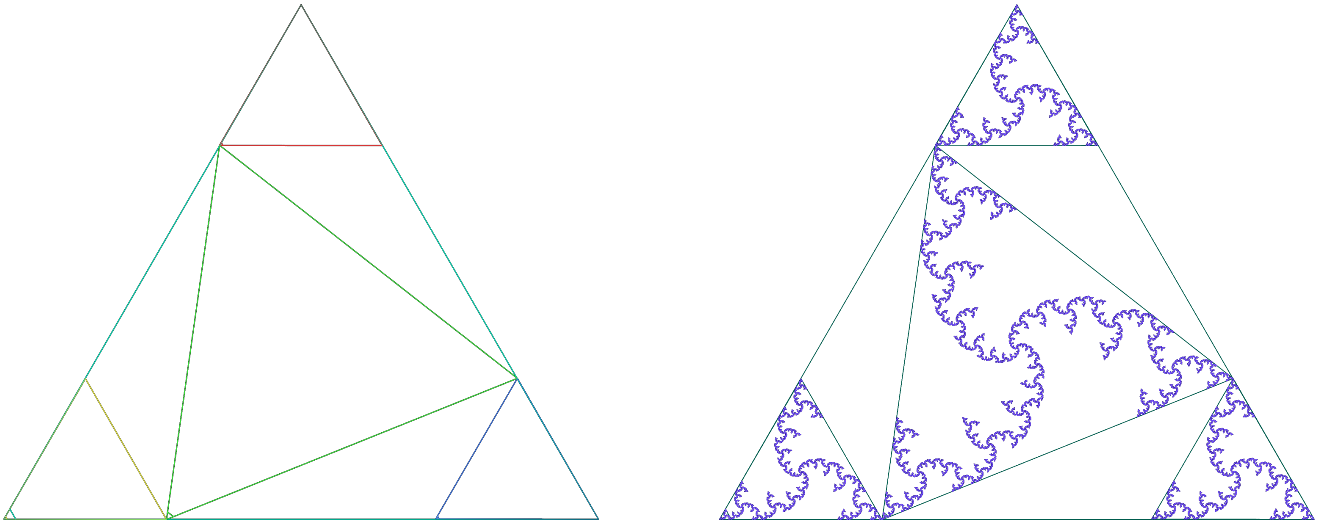


Рис. 1.4: Система многоугольников, задающая полигональную систему $\mathcal{S}$ (слева), и аттрактор $K(\mathcal{S})$ этой системы (справа).

Теорема 1.12. *Аттрактор* K *стягиваемой* P*-полигональной системы подобий* $\mathcal{S}$ *является дендритом.*

Это действительно так, ведь из условий следует, что $K \subset P$, а значит $K_i \cap K_j = P_i \cap P_j$. Значит, аттрактор полигональной системы — множество с одноточечным пересечением, двудольный граф пересечения которого является деревом. Согласно Теореме 1.10, этот аттрактор является дендритом с одноточечным пересечением.

Авторами в [54, Theorem 4] было показано, что

1. Всякая стягиваемая полигональная система удовлетворяет (OSC), где в качестве открытого множества мы можем взять $\dot{P}$;
2. $P_{\mathbf{j}} \subset P_{\mathbf{i}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{j} \sqsupset \mathbf{i}$, а если $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, то $S_{\mathbf{i}}(\mathcal{V}_P) \cap P_{\mathbf{j}} \subset S_{\mathbf{j}}(\mathcal{V}_P)$;
3. Если $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ несравнимы, то $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}}$ либо пусто, либо является общей вершиной многоугольников $P_{\mathbf{i}}$ и $P_{\mathbf{j}}$;
4. При этом все вершины P лежат в K, поэтому и множество $G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$ вершин многогранников $P_{\mathbf{j}}$ содержится в K и плотно в K, а всякая точка $x \in K \setminus G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$ имеет единственный адрес.

Во второй главе я получаю и рассматриваю обобщение таких полигональных систем.

1.3 Главное дерево

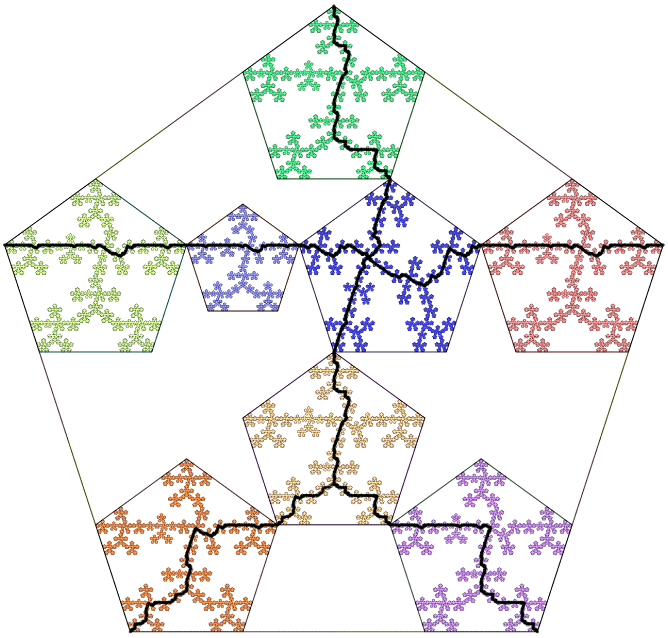


Рис. 1.5: Полигональный дендрит K с $\partial K = \mathcal{V}_P$ и его главное дерево $\hat{\gamma}$.

Если K — самоподобный дендрит, то любую пару точек $a_i, a_j \in \partial K$ из его самоподобной границы можно соединить единственной жордановой дугой $\gamma(a_i, a_j) \subset K$. Такие дуги, соединяющие пары точек самоподобной границы дендриты, мы будем называть *главными дугами*. Если самоподобная граница ∂K самоподобного дендрита конечна, то множество всех главных дуг тоже будет конечно. Объединение всех главных дуг будем называть *главным деревом*.

Определение 1.13. *Пусть K — самоподобный дендрит с конечной самоподобной границей ∂K. Минимальный поддендрит $\hat{\gamma} \subset K$, содержащий ∂K, называется* главным деревом *дендрита K.*

Главное дерево $\hat{\gamma}$ самоподобного дендрита K с одноточечным пересечением обладает следующими очевидными свойствами:

1. $\{x \in \hat{\gamma} : Ord(x, \hat{\gamma}) = 1\} \subset \partial K$, то есть концами главного дерева могут быть только точки самоподобной границы;
2. $2 \leqslant \#\{x \in \hat{\gamma} : Ord(x, \hat{\gamma}) = 1\} \leqslant \#\partial K$;
3. $Ord(x, \hat{\gamma}) \leqslant Ord(x, K)$.

На рисунке 1.5 показаны аттрактор полигональной системы и его главное дерево. В этой системе самоподобной границей будут вершины большого пятиугольника. Разумеется, концами главного дерева могут быть только точки самоподобной границы. В этом конкретном примере каждая точка самоподобной границы является концом в главном дереве, но вообще эти точки могут быть и разбивающими. Тем не менее, в главном дереве не может быть меньше двух концов.

Глава 2

Полигональные системы и их деформации

В этой главе я рассматриваю обобщение класса полигональных дендритов, полученное на основе полигональных систем.

Проблема в том, что аттракторы обобщённых полигональных систем не обязаны быть дендриами. Первый основной результат (Теорема 2.17 о совпадении параметров) даёт нам необходимое условие того, что аттрактор обобщённой полигональной системы является дендритом. В конце главы получен второй основной результат (Теорема 2.23 о малых деформациях), дающий достаточные условия, при которых аттрактор деформации полигональной системы является дендритом.

2.1 Обобщенные полигональные системы.

2.1.1 Обобщенные полигональные системы

Если мы опустим условие **(D1)** в Определении 1.11 стягиваемой P-полигональной системы $\mathcal{S}$, то получим определение *обобщенной P-полигональной системы*:

Определение 2.1. *Система $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$, удовлетворяющая условиям* **D2-D4** *Определения 1.11, называется обобщенной P-полигональной системой подобий.*

Для таких систем не обязано выполняться включение $S_i(P) \subset P$. И хотя аттрактор такой системы будет связен, но дендритом он уже может и не быть, поскольку пересечение копий может быть неодноточечным:

$$S_i(K) \cap S_j(K) \supseteq S_i(P) \cap S_j(P).$$

Тем не менее, если это включение станет равенством, то это будет означать, что $\mathcal{S}$ — система с одноточечным пересечением, а значит её аттрактор имеет двудольный граф пересечений в форме дерева и является дендритом.

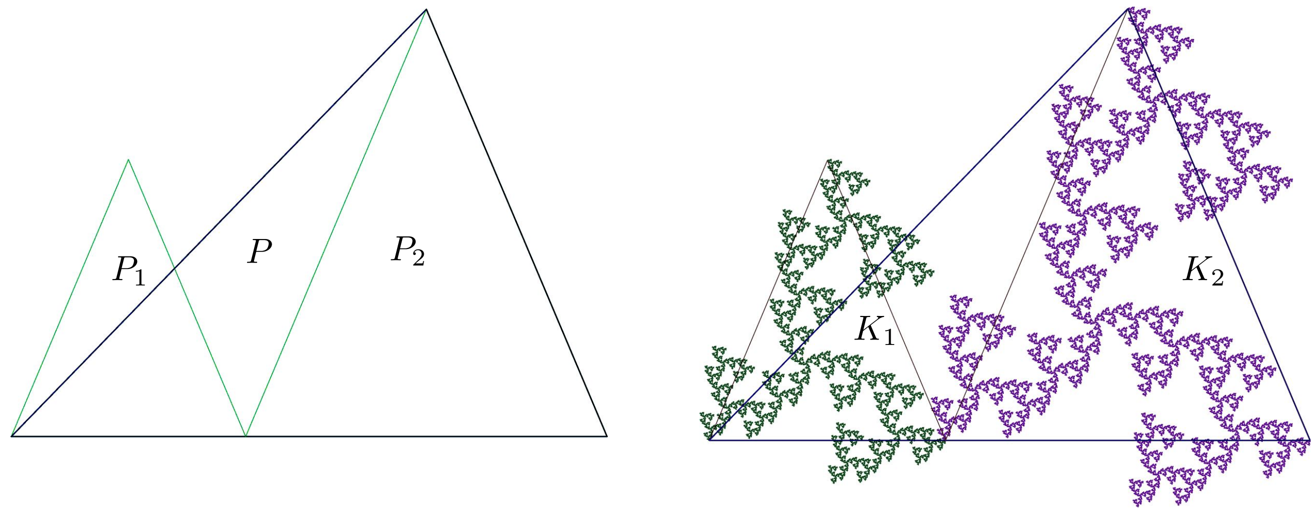


Рис. 2.1: Обобщенная полигональная система и её аттрактор

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенная P-полигональная система. Если для любых $i, j \in I$*

$$S_i(K) \cap S_j(K) = P_i \cap P_j, \tag{2.1}$$

то

(i) аттрактор K системы $\mathcal{S}$ является дендритом;

(ii) система $\mathcal{S}$ удовлетворяет OSC;

(iii) множество адресов $\pi^{-1}(x)$ всякой точки $x \in K$ конечно.

Замечание 2.1. Если $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию (2.1), то $\mathcal{S}$ — система с одноточечным пересечением, аттрактор K которой связен, а самоподобная граница $\partial K = \mathcal{V}_P$. В этом случае для любых не сравнимых мультииндексов $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, пересечение $K_\mathbf{i} \cap K_\mathbf{j} = S_\mathbf{i}(\mathcal{V}_P) \cap S_\mathbf{j}(\mathcal{V}_P)$ либо пустое либо одноточечное.

Доказательство. (i) Действительно, из формулы (2.1) следует, что графы пересечений $\Gamma(\{K_i\})$ и $\Gamma(\{P_i\})$ совпадают. Из свойств **(D2)-(D4)** следует, что граф пересечений обобщенной полигональной системы $\Gamma(\{P_i\})$ — дерево. Из Теоремы 1.10 следует, что K — дендрит.

(ii) Выполнение условия открытого множества (OSC) для систем $\mathcal{S}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$ с конечным пересечением и связным аттрактором K доказано в [4].

(iii) Конечность множества $\pi^{-1}(x)$ следует из [45, Proposition 2.3]. □

Замечание 2.2. Обобщенная P-полигональная система $\mathcal{S}$ может не удовлетворять условию 2.1 и иметь аттрактор K, являющийся дендритом. Аттрактор K обобщенной полигональной системы $\mathcal{S}$ на Рисунке ниже является дендритом, но $P_7 \cap P_9 = \varnothing$, тогда как $K_7 \cap K_9$ – это отрезок.

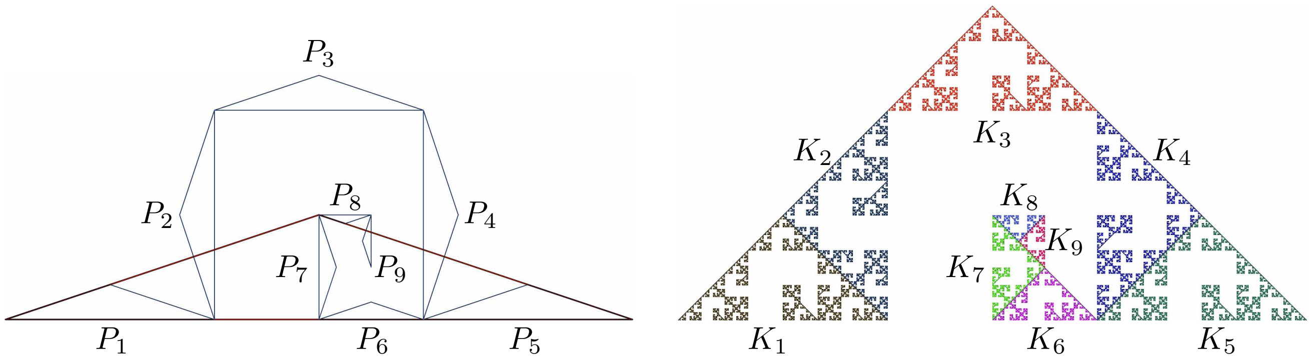


Рис. 2.2: Пример к замечанию 2.2

Следствие 2.3. *Пусть $\mathcal{S}$ – обобщенная P-полигональная система, удовлетворяющая условию (2.1). Для любой поддуги $\gamma_{xy} \subset K$ и для любого n существует единственная цепочка попарно различных мультииндексов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_l \in I^n$, которая разбивает γ_{xy} на последовательные поддуги $\gamma_{xx_1} \subset K_{\mathbf{i}_1}, \ldots, \gamma_{x_{k-1}x_k} \subset K_{\mathbf{i}_k}, \ldots, \gamma_{x_{l-1}y} \subset K_{\mathbf{i}_l}$.* □

2.1.2 δ-деформации стягиваемых полигональных систем.

Определение 2.4. *Пусть $\delta > 0$. Обобщенная P'-полигональная система $\mathcal{S}' = \{S'_1, ..., S'_m\}$ называется δ-деформацией P-полигональной системы $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$, если существует биекция $f : \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k} \to \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P'_k}$ такая, что*

a) $f|_{\mathcal{V}_P}$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f} : P \to P'$;

b) $|f(x) - x| < \delta$ для любого $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k}$;

c) $f(S_k(x)) = S'_k(f(x))$ для любого $k \in I$ и $x \in \mathcal{V}_P$.

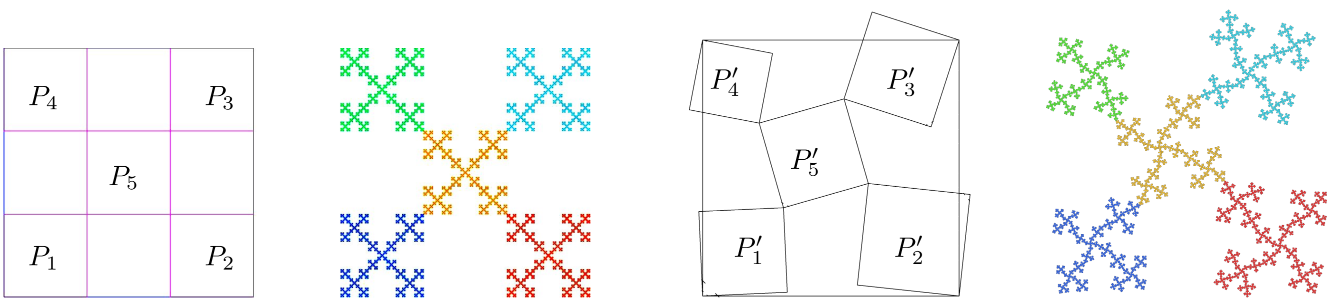


Рис. 2.3: Полигональная система $\mathcal{S}$ и её δ-деформация $\mathcal{S}'$

Поскольку $\hat{f}$ — гомеоморфизм многоугольников, переводящий вершины в вершины, мы можем предполагать, что $\hat{f}$ является симплициальным изоморфизмом некоторой триангуляции P с вершинами в V_P на эквивалентную ей триангуляцию P' с вершинами в $V_{P'}$.

По условию c), если $i, j \in I$, $A_1, A_2 \in \mathcal{V}_P$ и $S_i(A_1) = S_j(A_2)$, то $S'_i(f(A_1)) = S'_j(f(A_2))$.
Такое же соотношение выполняется и в случае, если $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ — мультииндексы:

Лемма 2.5. *Если* $A_1, A_2 \in \mathcal{V}_P$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ *и* $S_{\mathbf{i}}(A_1) = S_{\mathbf{j}}(A_2)$, *то* $S'_{\mathbf{i}}(f(A_1)) = S'_{\mathbf{j}}(f(A_2))$.

Доказательство. Предположим, что $S_{\mathbf{i}}(A) = B \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$ для некоторого $A \in \mathcal{V}_P$, и пусть $\mathbf{i} = i_1 i_2 ... i_n$. Обозначим $S_{i_{k+1}...i_n}(A)$ как A_k.

Тогда мы имеем конечную последовательность соотношений между $B \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$ и вершинами $A_k \in \mathcal{V}_P$:

$$B = S_{i_1}(A_1); \quad A_1 = S_{i_2}(A_2); \quad \dots A_{n-1} = S_{i_n}(A) \tag{2.2}$$

По условию c), отображение f преобразует эти соотношения в

$$B' = S'_{i_1}(A'_1); \quad A'_1 = S'_{i_2}(A'_2); \quad \dots A'_{n-1} = S'_{i_n}(A'), \tag{2.3}$$

поэтому $S'_{\mathbf{i}}(A') = B'$ и, если $S_{\mathbf{i}}(A_1) = S_{\mathbf{j}}(A_2) \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$, то $S'_{\mathbf{i}}(f(A_1)) = S'_{\mathbf{j}}(f(A_2))$.

Теперь предположим, что $S_{\mathbf{i}}(A_1) = S_{\mathbf{j}}(A_2)$ и $\mathbf{i} = \mathbf{l}\mathbf{i}'$, $\mathbf{j} = \mathbf{l}\mathbf{j}'$ и $S_{\mathbf{i}}(A_1) = S_{\mathbf{j}}(A_2) = S_{\mathbf{l}}(B)$ для некоторого $B \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$. Тогда $S_{\mathbf{i}'}(A_1) = S_{\mathbf{j}'}(A_2) = B$, следовательно $S'_{\mathbf{i}'}(f(A_1)) = S'_{\mathbf{j}'}(f(A_2)) = f(B)$ и $S'_{\mathbf{i}}(f(A_1)) = S'_{\mathbf{j}}(f(A_2)) = S'_{\mathbf{l}}(f(B))$. □

Теорема 2.6. *Пусть δ-деформация $\mathcal{S}'$ стягиваемой P-полигональной системы $\mathcal{S}$ задается биекцией* $f : \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k} \to \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P'_k}$, *а* $\pi : I^\infty \to K, \pi' : I^\infty \to K'$ — *индексные отображения этих систем.*

(i) f однозначно задает непрерывное продолжение $\hat{f} : K \to K'$ такое, что $\hat{f} \circ \pi = \pi'$.

(ii) Если $\mathcal{S}'$ удовлетворяет условию (2.1), *то $\hat{f}$ является гомеоморфизмом.*

Замечание 2.3. Равенство $\hat{f} \circ \pi = \pi'$ эквивалентно тому, что для любого $z \in K$ и $\mathbf{i} \in I^*$,

$$\hat{f}(S_{\mathbf{i}}(z)) = S'_{\mathbf{i}}(\hat{f}(z)). \tag{2.4}$$

Доказательство. Доказательство аналогично (см.[48, Lemma 1.]). Во-первых, мы определим функцию $\hat{f}$, которая является сюрьекцией плотного подмножества $G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P) \subset K$ в плотное подмножество $G_{\mathcal{S}'}(\mathcal{V}_{P'}) \subset K'$. Во-вторых, мы покажем, что она непрерывна по Гёльдеру на $G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$, и, следовательно, имеет единственное непрерывное продолжение до сюрьекции из K в K', для обозначения которого мы будем использовать тот же самый символ $\hat{f}$. В-третьих, мы покажем, что из условия 2.1 вытекает, что $\hat{f}$ инъективно и поэтому является гомеоморфизмом.

1. Определим отображение $\hat{f}(z) : G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P) \to G_{\mathcal{S}'}(\mathcal{V}_{P'})$ как

$$\hat{f}(z) = S'_{\mathbf{i}}(f(S_{\mathbf{i}}^{-1}(z)), \text{ где } z \in S_{\mathbf{i}}(\mathcal{V}_P). \tag{2.5}$$

Как следует из Леммы 2.5, если $S_{\mathbf{i}}(A_1) = S_{\mathbf{j}}(A_2) = z$, то $S'_{\mathbf{i}}(f(S_{\mathbf{i}}^{-1}(z))) = S'_{\mathbf{j}}(f(S_{\mathbf{j}}^{-1}(z)))$, поэтому отображение $\hat{f}$ корректно определено.

Очевидно, что $\hat{f}(G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)) = G_{\mathcal{S}'}(\mathcal{V}_{P'})$, потому что если $A' \in \mathcal{V}_{P'}$ и $z' = S'_{\mathbf{i}}(A')$, то существует вершина $A = f^{-1}(A') \in \mathcal{V}_P$, вследствие этого $z' = \hat{f}(S_{\mathbf{i}}(A))$.

Кроме того, для любого $z \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$ и $\mathbf{i} \in I^*$, $\hat{f}(S_{\mathbf{i}}(z)) = S'_{\mathbf{i}}(\hat{f}(z))$ и если $z_1, z_2 \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ и $S_{\mathbf{i}}(z_1) = S_{\mathbf{j}}(z_2)$, то $S'_{\mathbf{i}}(\hat{f}(z_1)) = S'_{\mathbf{j}}(\hat{f}(z_2))$.

2. Пусть $q_k = \operatorname{Lip} S_k$, $q'_k = \operatorname{Lip} S'_k$, $\beta = \min\limits_{k \in I} \dfrac{\log q'_k}{\log q_k}$.

Затем, следуя доказательству [41, Теорема 27, step 4.], в котором для наших оценок мы используем K' вместо P', мы видим, что для любых $z_1, z_2 \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$,

$$|z'_1 - z'_2| \leqslant \frac{2|K'|}{(\rho_0 \cdot \sin(\alpha_0/2))^\beta} |z_1 - z_2|^\beta.$$

Поэтому отображение $\hat{f}$ продолжается до непрерывного по Гёльдеру сюрьективного отображения множества K в K'. Поскольку для любого $z \in K$ и любого $k \in I$ справедливо $\hat{f}(S_k(z)) = S'_k(f(z))$, то $\hat{f} \circ \pi = \pi'$.

3. Теперь предположим, что система $\mathcal{S}'$ удовлетворяет условию (2.1). Предположим, что для некоторых $\boldsymbol{\sigma} = i_1 i_2 ... \in I^\infty$ и $\boldsymbol{\tau} = j_1 j_2 ... \in I^\infty$ справедливо $\hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\tau})$. Тогда, если $i_1 \neq j_1$, то, по условию 2.1, $P'_{i_1} \cap P'_{j_1} \neq \varnothing$, в результате чего $P_{i_1} \cap P_{j_1} = \{B\}$ для некоторого $B \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$ и $\pi(\boldsymbol{\sigma}) = \pi(\boldsymbol{\tau}) = B$.

Пусть теперь $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma}'$ и $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l}\boldsymbol{\tau}'$, а $\hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\tau})$. Тогда, по формуле 2.4, $\hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\sigma}') = \hat{f} \circ \pi(\boldsymbol{\tau}')$, так что если первые индексы в $\boldsymbol{\sigma}'$ и $\boldsymbol{\tau}'$ различны, то $\pi(\boldsymbol{\sigma}) = \pi(\boldsymbol{\tau}) = S_{\mathbf{l}}(B)$ для некоторого $B \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$.

Это подразумевает инъективность отображения $\hat{f}$. Таким образом $\hat{f}$ – гомеоморфизм компактных множеств K и K'. □

2.2 Теорема о совпадении параметров.

2.2.1 Циклические вершины и индексная диаграмма

Определение 2.7. *Пусть $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ — обобщенная P-полигональная система. Индексной диаграммой системы $\mathcal{S}$ называют ориентированный отмеченный мультиграф $\Gamma = (V_P, E, \mu)$, где V_P – множество вершин многоуголь-*

ника P, ребро $e \in E$ направлено из A в B, если существует $S_i : S_i(B) = A$, при этом отображение $\mu : E \to I$ сопоставляет ребру e индекс $\mu(e) = i$.

Мы используем следующие обозначения для ребер в направленных графах: если e – ребро в графе Γ, направленное из A в B, то $\alpha(e) = A$ и $\omega(e) = B$. Путем σ в Γ называется последовательность ребер $e_1, e_2, ...e_n$ такая что $\alpha(e_k) = \omega(e_{k-1})$ для всех $k > 1$. $\alpha(\sigma) = \alpha(e_1)$ и, если путь заканчивается ребром e_n, $\omega(\sigma) = \omega(e_n)$.

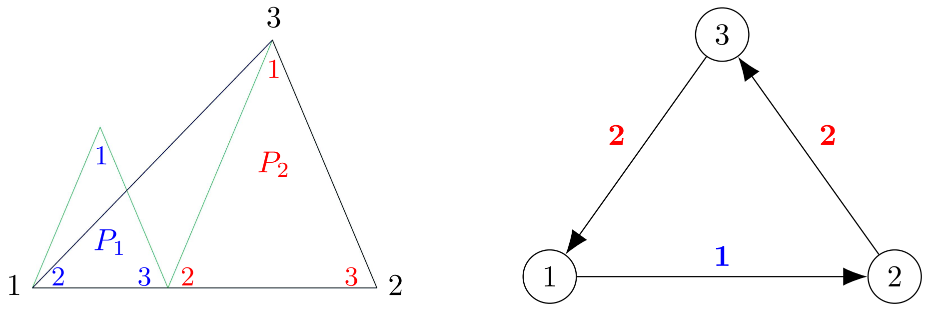


Рис. 2.4: Пример обобщенной полигональной системы и её индексной диаграммы

В силу свойства **D3** для каждой вершины $A \in \mathcal{V}_P$ существует по крайней мере одно ребро, исходящее из A, поэтому исходящий ранг каждой вершины $\geqslant 1$, а для всякой вершины $A \in \mathcal{V}_P$ множество бесконечных путей $\sigma = e_1 e_2 ...$, исходящих из A, непусто.

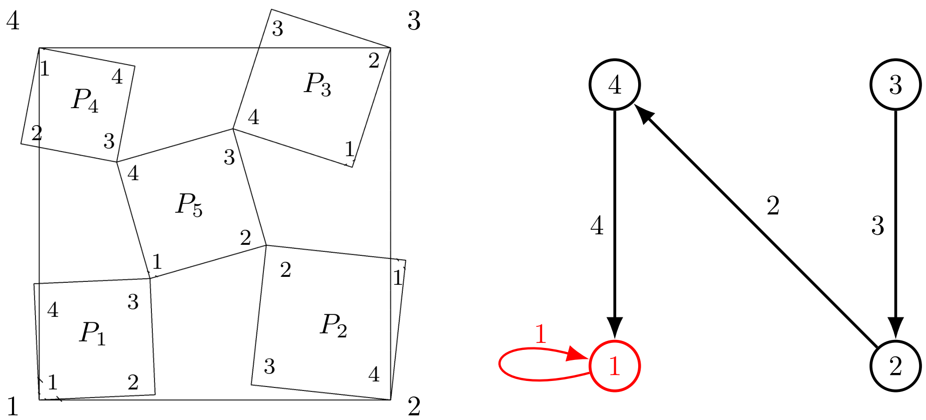


Рис. 2.5: Всякий путь в индексной диаграмме ведёт в одну из циклических вершин

Пусть $\sigma_{AB} = e_1 e_2 e_3 \dots e_n$ — путь, направленный из вершины A в B, а $\mathbf{i} = \mu(\sigma_{AB}) := i_1 \dots i_n$, где $i_k = \mu(e_k)$. Тогда $A = S_{\mathbf{i}}(B)$.

Рассмотрим некоторый бесконечный путь $\sigma = e_1 e_2 e_3 \dots$, и пусть $A_n = \omega(e_n)$. Так как $A = S_{i_1 \dots i_n}(A_n)$, последовательность $\{A_n\}$ называется последовательностью предшественников вершины A. Поскольку $A = \lim\limits_{n\to\infty} S_{i_1 \dots i_n}(P)$, то $\mu(\sigma) = i_1 \dots i_n \dots$ – адрес точки A. Таких адресов может быть несколько.

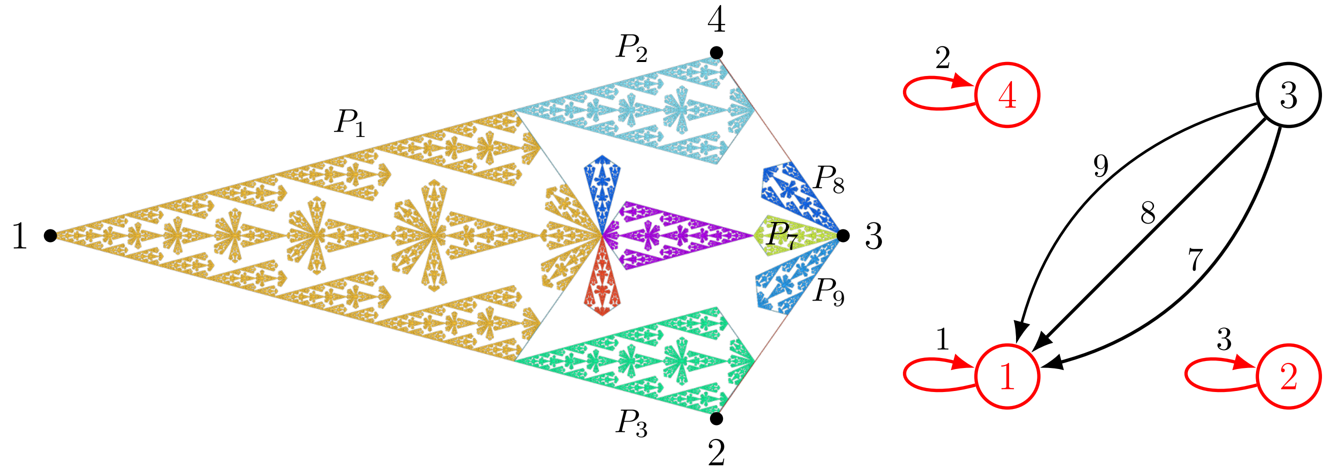


Рис. 2.6: Пример несвязной индексной диаграммы

Так как V_P конечно, в последовательности $A, A_1, \dots, A_n$ найдутся такие k и l, что $A_l = A_{l+k}$. Тогда $A_l = S_{i_{l+1}\dots i_{l+k}}(A_l)$. В этом случае A_l — циклическая вершина.

Определение 2.8. *Вершина $B \in V_P$ называется циклической, если существует мультииндекс $\mathbf{j} = j_1 \dots j_k$ такой, что $S_{\mathbf{j}}(B) = B$. Наименьшая длина $k = |\mathbf{j}|$ такого мультииндекса называется порядком B.*

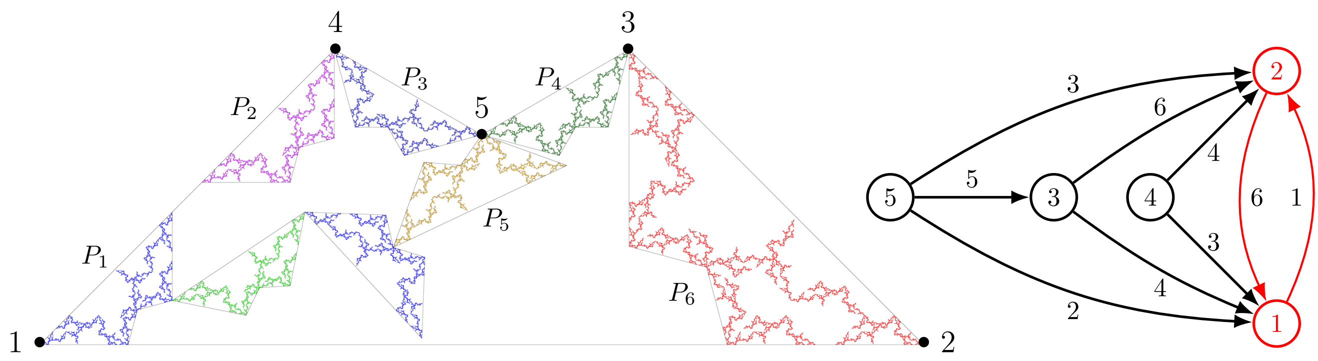


Рис. 2.7: Пример того, что индексная диаграмма может быть довольно сложной

Определение 2.9. *Пусть $A, A_1, A_2, \dots$ — последовательность предшественников вершины A. Говорят, что A подчинена циклической вершине A_k, если A_k — циклическая вершина с наименьшим номером в этой последовательности.*

Таким образом, если A подчинена A_k, то для любого $l < k$ точка $A_l = S^{-1}_{j_1 \dots j_l}(A)$ не является циклической вершиной.

Предложение 2.10. *Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенная P-полигональная система подобий. Всякая вершина $A \in \mathcal{V}_P$ подчинена некоторой циклической вершине.* $\square$

В случае, когда $\mathcal{S}$ — обобщенная полигональная система, условию (1) Теоремы 2.2 и, в частности, когда $\mathcal{S}$ — стягиваемая полигональная система, множество вершин $\mathcal{V}_P$ и индексная диаграмма $\Gamma(\mathcal{S})$ имеют следующие свойства:

Предложение 2.11. *Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенная полигональная система, удовлетворяющая условию (1) Теоремы 2.2, тогда:*

(i) в индексной диаграмме $\Gamma(\mathcal{S})$ все циклические вершины имеют исходящий ранг 1;

(ii) всякая циклическая вершина обладает единственным адресом;

(iii) существует такое n, что все циклические вершины системы $\mathcal{S}^{(n)} = \{S_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in I^n\}$ имеют порядок 1.

Доказательство. Пусть исходящий ранг некоторой циклической вершины A больше 1. Это значит что существует циклический путь γ в Γ такой, что $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = A$ и такое ребро $e_1 : \alpha(e_1) = A$, что $e_1 \notin \gamma$. Рассмотрим бесконечный путь $\sigma = e_1 e_2 e_3 ...$, исходящий из A. Тогда все пути $\gamma^n \sigma$ исходят из A и попарно различны, поэтому A имеет бесконечное множество адресов. Стягиваемая полигональная система является системой с конечным пересечением и удовлетворяет OSC. Поэтому, согласно [45, Theorem 1.7], множество адресов каждой вершины P конечно. Полученное противоречие доказывает (i).

Поэтому для всякой циклической вершины A бесконечный путь σ, исходящий из A, единственен, а множество ее предшественников состоит из конечного числа циклических вершин. Если выполняется условие (1), то $S_i^{-1} A \cap K = S_i^{-1} A \cap \mathcal{V}_P$. Поэтому $\mu(\sigma)$ — единственный адрес точки A, что доказывает (ii).

Пусть Γ — индексная диаграмма системы $\mathcal{S}$. Так как $\mathcal{S}^{(n)}$ — обобщенная полигональная система, удовлетворяющая условию (1), множество вершин её индексной диаграммы Γ^n также есть $\mathcal{V}_P$. При этом, ребрам e', идущим из A в B, соответствуют пути $\sigma' = e_1 ... e_n$ длины n, такие что $\alpha(\sigma) = A$, $\omega(\sigma) = B$. Пусть n — наименьшее общее кратное порядков всех циклических вершин. Для всякого пути σ' длины n, исходящего из циклической вершины A, $\omega(\sigma) = A$. Поэтому порядок всякой циклической вершины в системе $\mathcal{S}^{(n)}$ равен 1. $\square$

2.2.2 Структура окрестностей точек в аттракторе стягиваемой полигональной системы.

1. Пусть $B \in \mathcal{V}_P$ — циклическая вершина стягиваемой полигогальной системы $\mathcal{S}$. Пусть $\boldsymbol{j} \in I^*$ — кратчайший мультииндекс такой, что $S_{\boldsymbol{j}}(B) = B$. Тогда подобие $S_{\boldsymbol{j}}$ является гомотетией, а угол Ω_B, образованный сторонами P, прилегающими к B, содержит P. При этом, полагая $W = K \setminus S_{\boldsymbol{j}}(K)$ мы

получаем представление множества K в виде дизъюнктного объединения

$$K = \{B\} \cup \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S_{\mathbf{j}}^n(W) \tag{2.6}$$

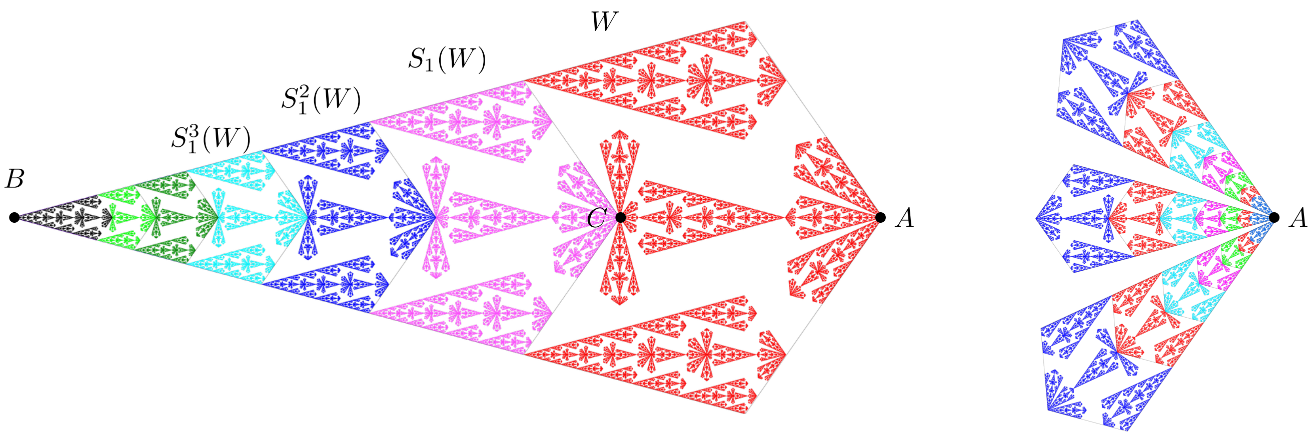


Рис. 2.8: Разбиение (2.6) аттрактора K в циклической вершине B (слева) и разбиение (2.7) стандартной окрестности U_A для нециклической вершины A (справа)

2. Пусть $A \in V_P$ — не циклическая вершина. Пусть $B_1, \ldots, B_k$ — полный набор циклических вершин, которым подчинена вершина A. Каждой вершине B_l соответствует такой мультииндекс $\mathbf{i}_l$ такой, что $A = S_{\mathbf{i}_l}(B_l)$ и мультииндекс $\mathbf{j}_l$ такой, что $S_{\mathbf{j}_l}(B_l) = B_l$. Множества $S_{\mathbf{i}_l}(K \setminus B_l)$ попарно не пересекаются и лежат внутри попарно непересекающихся углов $S_{\mathbf{i}_l}(\Omega_{B_l})$ с общей вершиной A. При этом множество $U_A = \bigcup\limits_{l=1}^{k} S_{\mathbf{i}_l}(K) \cup \{A\}$ является окрестностью вершины A в K. Мы назовем ее *стандартной окрестностью* вершины A.
Полагая $W_l = K \setminus S_{\mathbf{j}_l}(K)$, мы получаем представление стандартной окрестности вершины A в виде:

$$U_A = \{A\} \cup \bigsqcup_{l=1}^{k} S_{\mathbf{i}_l} \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S_{\mathbf{j}_l}^n(W_l) \tag{2.7}$$

3. Рассмотрим точку $A \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$. Для нее также можно определить её стандартную окрестность U_A в K.

Определение 2.12. *Будем говорить, что $A \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$ подчинена циклической вершине B, если $A = S_{j_1 \ldots j_k}(B)$ и для любого $l < k$ точка $S^{-1}_{j_1 \ldots j_l}(A)$ не является циклической вершиной.*

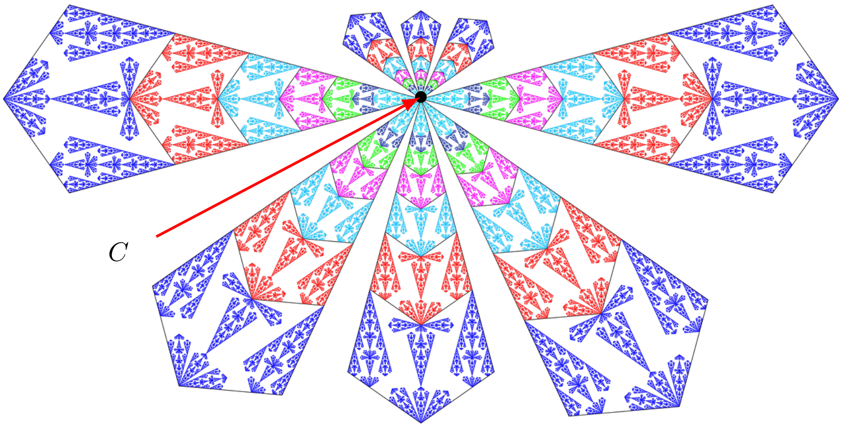


Рис. 2.9: Разбиение (2.7) стандартной окрестности U_C для точки $C \in G_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_P)$.

Учитывая свойства многоугольников $P_{\mathbf{j}}$ и структуру окрестностей вершин $P_{\mathbf{j}}$, мы приходим к выводу, что для каждой точки $A \in G_{\mathcal{S}}(V_P)$ также существует полный набор циклических вершин $B_1, \ldots, B_k$, которым подчинена точка A и соответствующие наборы мультииндексов $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l$, задающие стандартную окрестность U_A и её представление (2.7).

2.2.3 Теорема о совпадении параметров.

Пусть A — циклическая вершина обобщенной P-полигональной системы $\mathcal{S}$. В этом случае отображение $S_{\mathbf{i}}$, для которого $S_{\mathbf{i}}(A) = A$, не обязательно является гомотетией, и тогда мы должны определить угол поворота такого отображения. Формально угол поворота α_i отображения $S_{\mathbf{i}}$ определяется с точностью до $2n\pi$, но в случае полигональных систем число n однозначно определяется системой многоугольников $\widetilde{P}$ и зависит от геометрической конфигурации этой системы.

Предложение 2.13. *Пусть $\mathcal{S}$ – обобщенная P-полигональная система, удовлетворяющая условию (2.1), и пусть A — циклическая вершина многоугольника P. Тогда существуют такая вершина $B \in V_P$ и такой мультииндекс $\mathbf{i} \in I^*$, что $S_{\mathbf{i}}(A) = A$ и жорданова дуга $\gamma_{AB} \subset K$ удовлетворяет включению $S_{\mathbf{i}}(\gamma_{AB}) \subset \gamma_{AB}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{j}$ — кратчайший из мультииндексов, для которого $A = S_{\mathbf{j}}(A)$. Пусть $W = K \setminus S_{\mathbf{j}}(K)$, тогда

$$K = \{A\} \cup \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S_{\mathbf{j}}^n(W).$$

Пусть $Q = S_{\mathbf{j}}^{-1}(\bar{W} \cap S_{\mathbf{j}}(K))$. Исходя из Замечания 2.1, мы видим, что $Q \subset \mathcal{V} \setminus \{A\}$.

Вершина A не может принадлежать Q. В противном случае существовала бы копия $K_{\mathbf{i}}$ такая что $K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}} = \{A\}$, а для любых k, l, $S_{\mathbf{j}}^k(K_{\mathbf{i}}) \cap S_{\mathbf{j}}^l(K_{\mathbf{i}}) = \{A\}$.

В этом случае A была бы точкой ветвления бесконечного порядка в K, что невозможно по Теореме 2.2.

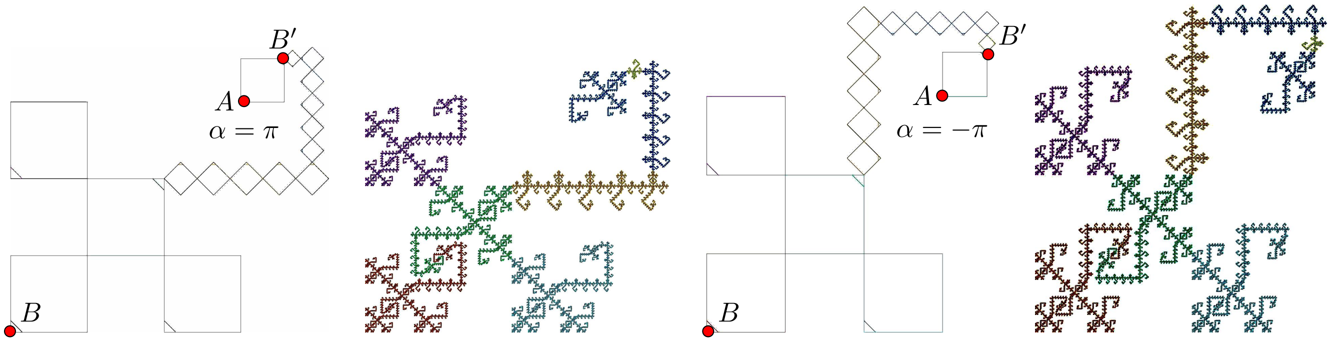
Так как K — дендрит, для каждой точки $B \in Q$ существует единственная дуга $\gamma_{AB} \subset K$. Пусть $\gamma_{B'B}$ — наименьшая из ее поддуг таких, что $B' \in K_{\mathbf{j}}$. Тогда $B' \in S_{\mathbf{j}}(Q)$. Зададим отображение $\psi : Q \to Q$ формулой $\psi(B) = S_{\mathbf{j}}^{-1}(B')$. Тогда для любого $B \in Q$, $S_{\mathbf{j}}(\gamma_{A\psi(B)}) \subset \gamma_{AB}$. Далее, для любого n, $S_{\mathbf{j}}^n(\gamma_{A\psi^n(B)}) \subset \gamma_{AB}$.

Так как ψ — отображение конечного множества Q в себя, существуют такие n и $B \in Q$, что $\psi^n(B) = B$. Тогда $S_{\mathbf{j}}^n(\gamma_{AB}) \subset \gamma_{AB}$. Положим $S_{\mathbf{i}} = S_{\mathbf{j}}^n$. $\square$

Определение 2.14. *Дуга γ_{AB} называется* инвариантной дугой *циклической вершины A.*

Пусть A – циклическая вершина, γ_{AB} – её инвариантная дуга, и $S_{\mathbf{i}}(A) = A$. Пусть $B' = S_{\mathbf{i}}(B)$. Обозначим через α совокупное изменение аргумента $z - A$ при перемещении z по γ_{AB} от B до B'. Это дает нам единственное представление $S_{\mathbf{i}}(z) = q_{\mathbf{i}} e^{i\alpha}(z - A) + A$.

Замечание 2.4. На следующем Рисунке показано, как угол α зависит от геометрической конфигурации системы $\mathcal{S}$, хотя одно и то же подобие фиксирует A и отображает B в B'.



Определение 2.15. *Число* $\lambda_A = \dfrac{\alpha}{\ln r}$ *называется параметром циклической вершины A.*

Определение 2.16. *Обобщенная P-полигональная система $\mathcal{S}$ подобий удовлетворяет* условию совпадения параметров*, если для любого $B \in \cup_{i=1}^m \mathcal{V}_{P_i}$ и для любых циклических вершин A, A' таких, что для некоторых $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, $S_{\mathbf{i}}(A) = S_{\mathbf{j}}(A') = B$, выполняется равенство $\lambda_A = \lambda_{A'}$.*

Из Предложений 2.10 и 2.13, и Леммы В.В. Асеева о непересекающихся периодических дугах [48, Lemma 3.1] Мы приходим к следующей Теореме о совпадении параметров:

Теорема 2.17. *Пусть обобщенная P'-полигональная система $\mathcal{S}'$ является δ-деформацией стягиваемой P-полигональной системы $\mathcal{S}$, а аттрактор K' системы $\mathcal{S}'$ является дендритом. Тогда система $\mathcal{S}'$ удовлетворяет условию совпадения параметров.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенная полигональная система, аттрактор K которой — дендрит. Пусть $C \in \cup_{i=1}^{m} \mathcal{V}_{P_i}$ и $A, A' \in \mathcal{V}_P$ — такие циклические вершины, что для некоторых $i, j \in I$ $S_i(A) = S_j(A') = C$. Обозначим образы $S_i(K)$ и $S_j(K)$ как K_i, K_j соответственно. Без потери общности можно допустить, что точка C имеет координату 0 в $\mathbb{C}$. Поскольку для некоторых $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, $S_{\mathbf{i}}(A) = A$ и $S_{\mathbf{j}}(A') = A'$, отображения $S_{b1} = S_i S_{\mathbf{i}} S_i^{-1}$ и $S_{b2} = S_j S_{\mathbf{j}} S_j^{-1}$ имеют C в качестве своей неподвижной точки, а $S_{b1}(K_i) \subset K_i$ и $S_{b2}(K_j) \subset K_j$. Пусть $S_{b1}(z) = q_{\mathbf{i}} e^{i\alpha_{\mathbf{i}}} z$ и $S_{b2}(z) = q_{\mathbf{j}} e^{i\alpha_{\mathbf{j}}} z$. Так параметрами вершин A и A' будут $\lambda_1 = \dfrac{\alpha_{\mathbf{i}}}{\log q_{\mathbf{i}}}$ и $\lambda_2 = \dfrac{\alpha_{\mathbf{j}}}{\log q_{\mathbf{j}}}$. Пусть $\gamma_{AB} \subset K$ и $\gamma_{A'B'} \subset K$ являются инвариантными дугами для вершин A и A'. Пусть также $\gamma_1 = S_i(\gamma_{AB})$ и $\gamma_2 = S_j(\gamma_{A'B'})$. Тогда $S_{b1}(\gamma_1) \subset \gamma_1$ и $S_{b2}(\gamma_2) \subset \gamma_2$. По Лемме В.В. Асеева о непересекающихся периодических дугах [48, Lemma 3.1] следует, что если $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{C\}$, то $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Технически, теорема о совпадении параметров показывает необходимое условие того, что аттрактор δ-деформации будет дендритом. Однако если стягиваемую полигональную систему деформировать слишком сильно, то даже при соблюдении условия совпадения параметров аттрактор δ-деформации может и не быть дендритом. Значит нам нужны ограничения при деформациях. Поэтому далее мы оценим δ в доказательстве теоремы о малых деформациях. Эта оценка и будет представлять из себя достаточное условие того, что аттрактор δ-деформации будет дендритом.

2.3 Теорема о малых деформациях

2.3.1 Основные параметры стягиваемой полигональной системы

Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ или точки A через $V_\varepsilon(X)$ (соотв.$V_\varepsilon(A)$) мы обозначаем ε-окрестности множества X (соотв. точки A) на плоскости.

Параметр $\boldsymbol{\rho_0}$: Обозначим через $\rho_0 > 0$, наименьшее из попарных расстояний между точками непересекающихся многоугольников P_i, P_j и расстояний от вершин $A \in \mathcal{V}_p$ до точек многоугольников $P_i \not\ni A$:

(i) для любой вершины $A \in \mathcal{V}_P$, $V_\rho(A) \bigcap P_k \neq \varnothing \Rightarrow A \in P_k$;

(ii) для любых $x, y \in P$, для которых существуют такие P_k, P_l, что $x \in P_k, y \in P_l$ и $P_k \bigcap P_l = \varnothing$, выполняется $d(x, y) \geqslant \rho_0$.

Параметры $\boldsymbol{\rho_1, \rho_2}$: Пусть $C \in \mathcal{V}_{\tilde{P}}$ — не циклическая точка. Пусть U_C — ее стандартная окрестность, а $\tilde{U}_C = \bigcup\limits_{l=1}^{k} S_{\mathbf{i}_l}(W_l)$. Тогда ρ_1 и ρ_2 выбираются такими, что для любого $C \in \mathcal{V}_{\tilde{P}}$, множество $\tilde{U}_C$ содержится в кольце $\rho_1 < |z - C| \leqslant \rho_2$.

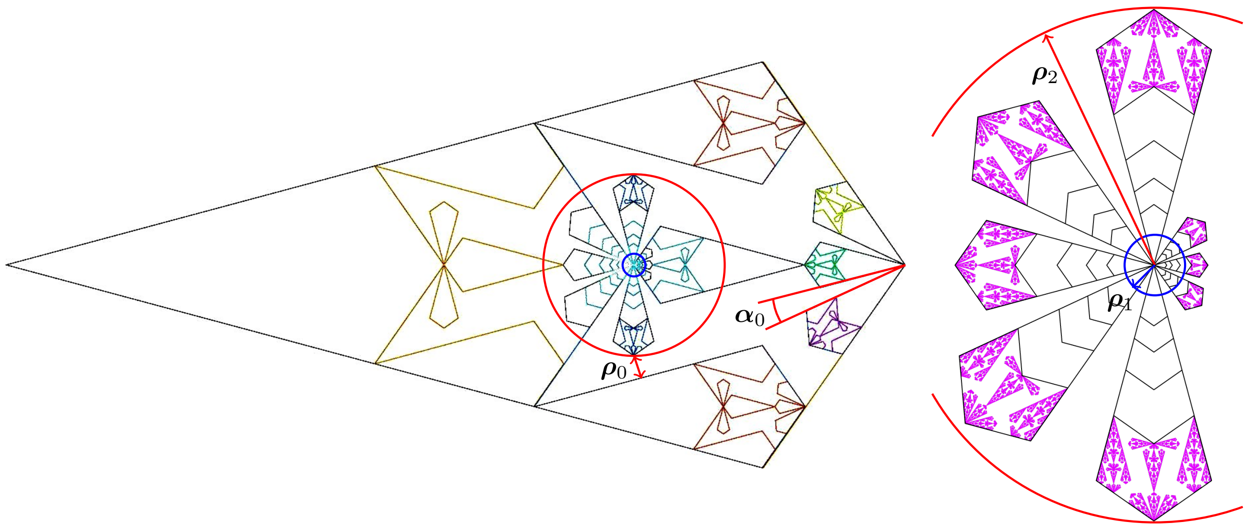


Рис. 2.10: Выбор параметров α_0, ρ_0, ρ_1 и ρ_2 для полигональной системы

Параметр $\boldsymbol{\alpha_0}$: α_0 — наименьший возможный угол между теми сторонами многоугольников $P_i, P_j, i, j \in I$, которые имеют общую вершину.

Обозначения для отображений циклических вершин. Пусть $\Omega(P, A)$ обозначает угол при вершине A в многоугольнике P. В случае, когда $\mathcal{S}$ — стягиваемая P-полигональная система, все циклические вершины которой имеют порядок 1, мы упорядочим индексы в I и пронумеруем вершины в $\mathcal{V}_P$ таким образом, что каждой циклической вершине A_l соответствует гомотетия $S_l(z) = q_l(z - A_l) + A_l$. При этом K лежит внутри угла $\Omega(P, A_l)$ и $K \setminus \{A_l\} = \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} S_l^n(W_l)$.

2.3.2 Оценка δ и главная теорема

Исходные предположения. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ – стягиваемая P-полигональная система, а отображение f задает δ-деформацию системы $\mathcal{S}$ в обобщенную P'-полигональную систему $\mathcal{S}' = \{S'_1, ..., S'_m\}$, где $S_k(z) = q_k e^{i\alpha_k}(z - z_k) + z_k$ и $S'_k(z) = q'_k e^{i\alpha'_k}(z - z'_k) + z'_k$.
Мы предполагаем, что $\operatorname{diam} P = 1$, а $\delta > 0$ таково, что

$$\delta < q_{min}/8 \quad \text{и} \quad \delta < (1 - q_{max})/8 \tag{2.8}$$

Получим оценки изменения $\Delta q_k = |q'_k - q_k|$ и $\Delta\alpha_k = |\alpha'_k - \alpha_k|$ при деформации f:

Лемма 2.18. *Для любого $k \in I$,*

$$\Delta q_k < 3\delta \quad \textit{и} \quad \Delta\alpha_k < C_\alpha\delta, \textit{ где } C_\alpha = 2.1(1 + 1/q_{min}) \tag{2.9}$$

Доказательство. Выберем такие вершины A, B многоугольника P, что $|B-A|=1$. Используем для образов A обозначения $A_k = S_k(A)$, $A' = f(A)$ и $A'_k = f(A_k) = S'_k(A')$, и аналогичные – для вершины B.
Оценим изменение модуля и аргумента для $\dfrac{B_k - A_k}{B - A} = q_k e^{i\alpha_k}$ и $\dfrac{B'_k - A'_k}{B' - A'} = q'_k e^{i\alpha'_k}$.

Так как f – δ-деформация, $|(B_k - A_k)| - 2\delta \leqslant |(B'_k - A'_k)| \leqslant |(B_k - A_k)| + 2\delta$. Это влечет

$$3q_{min}/5 < \frac{q_{min} - 2\delta}{1+2\delta} < \frac{q_k - 2\delta}{1+2\delta} \leqslant q'_k \leqslant \frac{q_k + 2\delta}{1-2\delta} < \frac{q_{max} + 2\delta}{1-2\delta} < \frac{1+3q_{max}}{3+q_{max}}. \quad (2.10)$$

Так как

$$\alpha'_i - \alpha_i = \arg\frac{B'_k - A'_k}{B_k - A_k} - \arg\frac{B' - A'}{B - A}, \quad (2.11)$$

мы получаем

$$|\alpha'_k - \alpha_k| \leqslant \arcsin 2\delta + \arcsin\frac{2\delta}{q_k} \quad (2.12)$$

Подставляя неравенства (2.8) в (2.10) и (2.12) и учитывая, что если $0 < x < 0.5$, то $0 < \arcsin x < 1.05x$, мы получаем оценки

$$\Delta q_k = |q'_k - q_k| < \frac{2\delta(1+q_k)}{1-2\delta} < 3\delta \quad \text{и} \quad \Delta\alpha_k = |\alpha'_k - \alpha_k| < C_\alpha\delta, \quad (2.13)$$

где $C_\alpha = 2.1(1 + 1/q_{min})$. □

Пусть $V_\delta(P)$ обозначает δ-окрестность многоугольника P.

Лемма 2.19. *Пусть* $\delta_1 = \dfrac{4\delta}{1-q_{max}}$, *а* $U = V_{\delta_1}(P)$. *Тогда:*

(1) для любого $k \in I$, $S_k(U) \subset U$ *и* $S'_k(U) \subset U$;
(2) для любого $z \in U$, $|S'_k(z) - S_k(z)| < C_\Delta\delta$, *где* $C_\Delta = 6.5 + 1.5C_\alpha$.

Доказательство. (1) По Определению 2.4, $V_\delta(P_k) \supset P'_k$, $V_\delta(P'_k) \supset P_k$, $V_\delta(P) \supset P'$ и $V_\delta(P') \supset P$.

Таким образом, $S'_k(P') \subset V_\delta(P_k) \subset V_\delta(P)$. Поэтому $S'_k(P) \subset V_{2\delta}(P_k) \subset V_{2\delta}(P)$.

Так как S'_k — подобие, $S'_k(V_\rho(P)) \subset V_{2\delta + q'_k\rho}(P)$ для любого положительного ρ.

Если $\rho \geqslant \dfrac{2\delta}{1-q'_k}$, то $2\delta + q'_k\rho \leqslant \rho$, поэтому $S'_k(V_\rho(P)) \subset V_\rho(P)$.

Из неравенств $q'_k < \dfrac{q_{max}+2\delta}{1-2\delta}$ следует $\dfrac{2\delta}{1-q'_k} \leqslant \dfrac{2\delta(1-2\delta)}{1-q_{max}-4\delta} < \dfrac{4\delta}{1-q_{max}}$, а это влечет (1). При этом, в силу (2.8), $\delta_1 < 1/2$.

(2) Возьмем $z \in U$ и оценим разность $S'_k(z) - S_k(z)$. Её можно представить в виде $S'_k(A) - S_k(A) + (q'_k e^{i\alpha'_k} - q_k e^{i\alpha_k})(z - A)$. Поэтому

$$|S'_k(z) - S_k(z)| < |S'_k(A) - S_k(A)| + (|q'_k - q_k| + q_k|e^{i\alpha'_k} - e^{i\alpha_k}|)|z - A|. \quad (2.14)$$

Так как $|z - A| < 1 + \delta_1 < 1.5$, $|S'_k(A) - S_k(A)| < 2\delta$, а $|e^{i\alpha'_k} - e^{i\alpha_k}| \leqslant |\alpha'_k - \alpha_k|$, правая часть неравенства (2.14) не превышает $2\delta + 1.5(3\delta + C_\alpha\delta)$. □

Применяя к $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ и U Теорему о смещении [20, Theorem 17], получаем

Предложение 2.20. *Пусть π, π' – индексные отображения для систем $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.*
1. Для любого $\sigma \in I^\infty$,

$$|\pi'(\sigma) - \pi(\sigma)| < C_K\delta \text{ где } C_K = \frac{C_\Delta}{1 - q_{max}} \quad (2.15)$$

2. Если система $\mathcal{S}'^{(n)}$ удовлетворяет **D2–D4**, *то она является $(C_K\delta)$-деформацией системы $\mathcal{S}^{(n)}$.* □

Замечание 2.5. Пусть $\mathcal{S}' = \{S'_1, ..., S'_m\}$ — это δ-деформация стягиваемой P-полигональной системы $\mathcal{S}$. Пусть $A \in S_j(\mathcal{V}_P)$ для некоторого $j \in I$. Пусть $g(z) = z - A + A'$ и $\hat{S}''_k = g \circ S'_k \circ g^{-1}$. Тогда $\mathcal{S}'' = \{S''_1, ..., S''_m\}$ является 2δ-деформацией системы $\mathcal{S}$, для которой $A'' = A$, $K'' = g(K')$, $P''_{\mathbf{j}} = g(P_{\mathbf{j}})$. Поскольку g – это сдвиг, оценки (2.18) и (2.9) для $\mathcal{S}''$ остаются неизменными с тем же δ, в то время как $|\pi''(\sigma) - \pi(\sigma)| < (C_K + 1)\delta$. Таким образом мы обозначаем $\delta_2 = (C_K + 1)\delta$.

Принимая во внимание Предложения 2.10 и 2.20, достаточно доказать теорему для случая, когда все циклические вершины системы $\mathcal{S}$ имеют порядок 1.

Предложение 2.21. *Пусть выполнены Исходные предположения, а $S_k(z) = q_k(z - A_k) + A_k$ – гомотетия, переводящая в себя $A_k \in \mathcal{V}_P$. Тогда параметр λ_k отображения S'_k удовлетворяет неравенству*

$$|\lambda_k| < C_\lambda\delta, \text{ где } C_\lambda = \frac{2.1(1 + 1/q_{max})}{\log(3 + q_{max}) - \log(3q_{max} + 1)}. \quad (2.16)$$

Доказательство. Из 2.18 следует, что

$$|\lambda_k| \leqslant \frac{\arcsin 2\delta + \arcsin \dfrac{2\delta}{q_k}}{|\log(q_k + 2\delta) - \log(1 - 2\delta)|} \quad (2.17)$$

Учитывая неравенства (2.10) и (2.12), получаем (2.16). □

Лемма 2.22. *Пусть $\mathcal{S}$ – стягиваемая P-полигональная система, циклические вершины котрой имеют порядок 1, а $\mathcal{S}'$ – её δ-деформация. Тогда если*

$$2.1\frac{\delta_2}{\rho_1} + \lambda \log \frac{\rho_2 + \delta_2}{\rho_1 - \delta_2} < \alpha_0 \text{ и } 2\delta_2 < \rho_0, \tag{2.18}$$

то система $\mathcal{S}'$ удовлетворяет Условию (2.1)

Замечание 2.6. Если предположить, что $\delta_2 < \rho_1/4$, а $\delta_2 < (1-\rho_2)/4$, то неравенство (2.18) сследует из

$$2.1\frac{\delta_2}{\rho_1} + \lambda \log \frac{1 + 3\rho_2}{3\rho_1} < \alpha_0$$

Доказательство. Возьмем вершину $B \in V_{\widetilde{P}}$. Учитывая Замечание 2.5, мы можем предположить, что $B = 0$ и $f(0) = 0$, поэтому $B' = B = 0$.

Разложение стандартной окрестности U_B точки B имеет вид

$$U_B = \{B\} \cup \bigsqcup_{l=1}^{k} S_{\mathbf{j}_l} \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S_l^n(W_l) \tag{2.19}$$

Отображения $\bar{S}_l = S_{\mathbf{j}_l} S_{i_l} S_{\mathbf{j}_l}^{-1}$ являются гомотетиями с неподвижной точкой B, такими что

$$K_{\mathbf{j}_l} \setminus \{B\} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bar{S}_l^n(W_l) \tag{2.20}$$

Аналогично, пусть $W_l' = \hat{f}(W_l)$ и $\bar{S}_l' = S_{\mathbf{j}_l}' S_{i_l}' S_{\mathbf{j}_l}'^{-1}$. Тогда

$$K_{\mathbf{j}_l}' \setminus \{B\} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bar{S}_l'^n(W_l') \tag{2.21}$$

Заметим, что $\bar{S}_l(z) = q_{i_l} z$ и $\bar{S}_l'(z) = q_{i_l}' e^{i\alpha_{i_l}} z$ для любого l, а из за условия совпадения параметров существует такой λ, что для любого l $\alpha_{i_l} = \lambda \log q_{i_l}'$.

Рассмотрим отображение $z = exp(w)$ плоскости $(w = \varrho + i\varphi)$ как универсальное накрытие проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим многоугольники $P_{\mathbf{j}_l}$ и выберем их поднятия на плоскости $(w = \varrho + i\varphi)$. Мы можем предположить, что эти поднятия лежат в соответствующих горизонтальных полосах $\theta_l^- \leqslant \varphi \leqslant \theta_l^+$, где $0 < \theta_l^- < \theta_l^+ < 2\pi$ и $\theta_l^+ + \alpha_0 < \theta_{l+1}^-$ для любого $l < k$, и $\theta_k^+ + \alpha_0 < \theta_1^- + 2\pi$. Мы также рассматриваем поднятия множеств $K_{\mathbf{j}_l}$, W_l, $K_{\mathbf{j}_l}'$ и W_l'. Обозначим эти поднятия как $\mathcal{K}_{\mathbf{j}_l}$, $\mathcal{W}_l$, $\mathcal{K}_{\mathbf{j}_l}'$ и $\mathcal{W}_l'$. Из уравнений 2.20 и 2.21 следует, что

$$\mathcal{K}_{\mathbf{j}_l} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bar{T}_l^n(\mathcal{W}_l) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{\mathbf{j}_l}' = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bar{T}_l'^n(\mathcal{W}_l'), \tag{2.22}$$

где $T_l(w) = w + \log q_l$ и $T_l'(w) = w + (1 + i\lambda)\log q_l'$ являются параллельными переносами, для которых $T_l(\mathcal{K}_l) \subset \mathcal{K}_l$ и $T_l'(\mathcal{K}_l') \subset \mathcal{K}_l'$.

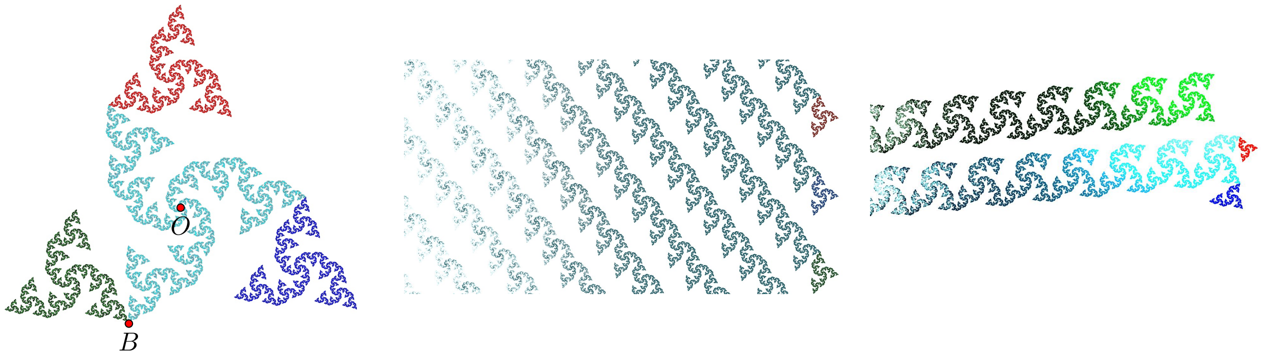


Рис. 2.11: Образы множества K' относительно отображения $w = \log(z - O)$ и отображения $w = \log(z - B)$.

Множества $\mathcal{K}_l$ лежат в полуполосах $\varrho \leqslant \log \rho_2, \theta_l^- \leqslant \varphi \leqslant \theta_l^+$, в то время как множества $\mathcal{W}_l$ содержатся в прямоугольниках $R_l = \{\log \rho_1 \leqslant \varrho \leqslant \log \rho_2, \theta_l^- \leqslant \varphi \leqslant \theta_l^+\}$.

Тогда множества $\mathcal{W}_l'$ лежат в прямоугольнике

$$R_l' = \left\{\log(\rho_1 - \delta_2) \leqslant \varrho \leqslant \log(\rho_2 + \delta_2), \theta_l^- - 1.05\frac{\delta_2}{\rho_1} \leqslant \varphi \leqslant \theta_l^+ + 1.05\frac{\delta_2}{\rho_1}\right\} \quad (2.23)$$

Каждое объединение $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T_l'^{n}(R_l')$ лежит в полуполосе

$$\begin{cases} \varrho \leqslant \log(\rho_2 + \delta_2) \\ \theta_l^- - 1.05\dfrac{\delta_2}{\rho_1} - \lambda\log(\rho_2 + \delta_2) \leqslant \varphi - \lambda\varrho \leqslant \theta_l^+ + 1.05\dfrac{\delta_2}{\rho_1} - \lambda\log(\rho_1 - \delta_2) \end{cases} \quad (2.24)$$

Поэтому множество $\mathcal{K}_{\mathbf{j}_l}'$ тоже лежит в этой полуполосе. Тогда если

$$\theta_{l-1}^+ + 1.05\frac{\delta_2}{\rho_1} - \lambda\log(\rho_1 - \delta_2) < \theta_l^- - 1.05\frac{\delta_2}{\rho_1} - \lambda\log(\rho_2 + \delta_2), \quad (2.25)$$

то $\mathcal{K}_{\mathbf{j}_{l-1}}' \cap \mathcal{K}_{\mathbf{j}_l}' = \varnothing$.

Мы можем гарантировать, что такое неравенство справедливо для любого l, если $2.1\dfrac{\delta_2}{\rho_1} + \lambda\log\dfrac{\rho_2 + \delta_2}{\rho_1 - \delta_2} < \alpha_0$.

Если, кроме того, $2\delta_2 < \rho_0$, то для любых $i_1, i_2 \in I$ таких что $P_{i_1} \cap P_{i_2} = \varnothing$, $P_{i_1}' \cap P_{i_2}' = \varnothing$ и $K_{i_1}' \cap K_{i_2}' = \varnothing$ откуда следует условие (2.1). □

Теорема 2.23. *Пусть $\mathcal{S}$ – стягиваемая P-полигональная система. Существует такое $\delta > 0$, что для любой δ-деформации $\mathcal{S}'$ системы $\mathcal{S}$, удовлетворяющей* *условию совпадения параметров, аттрактор $K(\mathcal{S}')$ будет дендритом, гомеоморфным $K(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Пусть все циклические вершины P-полигональной системы $\mathcal{S}$ имеют порядок 1. Если мы скомбинируем неравенства 2.9, 2.15, 2.16, 2.18 с учетом Замечания 2.6, мы увидим, что, если выполняются следующие неравенства:

1. $\delta < \dfrac{\min(q_{min}, 1 - q_{max})}{8}$; 2. $\delta < \dfrac{\min(\rho_0, \rho_1, 1 - \rho_2)}{2(C_K + 1)}$;

и 3. $\delta < \dfrac{\alpha_0}{\dfrac{2.1(C_K + 1)}{\rho_1} + C_\lambda \log \dfrac{1 + 3\rho_2}{3\rho_1}}$,

то аттрактор K' δ-деформации $\mathcal{S}'$ системы $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию (2.1). Следовательно K' – дендрит. По Теореме 2.6, отображение $\hat{f} : K \to K'$ биективно, и следовательно оно является гомеоморфизмом.

Предположим теперь, что $\mathcal{S}$ имеет циклические вершины порядка больше 1, и пусть $M = 12 + 4.2\left(1 + \dfrac{1}{q_{min}}\right)$. Существует такое n, что система $\mathcal{S}^{(n)}$ имеет циклические вершины порядка 1. Предположим, что любая δ-деформация системы $\mathcal{S}^{(n)}$ порождает дендрит. Тогда для любой δ/M-деформации $\mathcal{S}'$ системы $\mathcal{S}$, система $\mathcal{S}'^{(n)}$ будет δ-деформацией системы $\mathcal{S}^{(n)}$. □

Глава 3

Фрактальные k-кубы, являющиеся дендритами

В этой главе мы рассмотрим фрактальные k-кубы и опишем последовательность действий, по которым можно определить, является ли данный фрактальный куб дендритом с одноточечным пересечением.

3.1 Пересечения копий фрактального k-куба

3.1.1 Фрактальные k-кубы

Определение 3.1 (Olsen L. (1998) [37]; Lau K., Luo J.J.,Rao H. (2013) [27]). *Пусть* $D = \{d_1, \dots, d_r\}$, $d_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}^k$, *где* $n \geqslant 2$, *а* $1 < \#D < n^k$. Фрактальным k-кубом порядка n с множеством единиц D *называют компактное множество* $K \subset \mathbb{R}^k$, *удовлетворяющее равенству*

$$K = \frac{K + D}{n}. \tag{3.1}$$

В случаях, когда $k = 2$ и $k = 3$, мы называем K *фрактальным квадратом* и *фрактальным кубом* соответственно.

Уравнение (3.1) можно использовать в его эквивалентной форме $nK = K + D$. Само же множество K содержится в единичном k-мерном кубе $P = [0, 1]^k$, поскольку P удовлетворяет уравнению $nP \supset P + D$.

Рассмотрим также эквивалентное определение фрактального k-куба K порядка n с множеством единиц D. Возьмем единичный k-куб P и разобьем его на n^k равных k-кубов с ребром $1/n$. Ближайшая к нулю вершина каждого маленького k-куба P_i имеет координату вида $\dfrac{d_i}{n}$, где $d_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}^k$. Из этого разбиения выберем те k-кубы P_i, для которых $d_i \in D$ (см. пример на

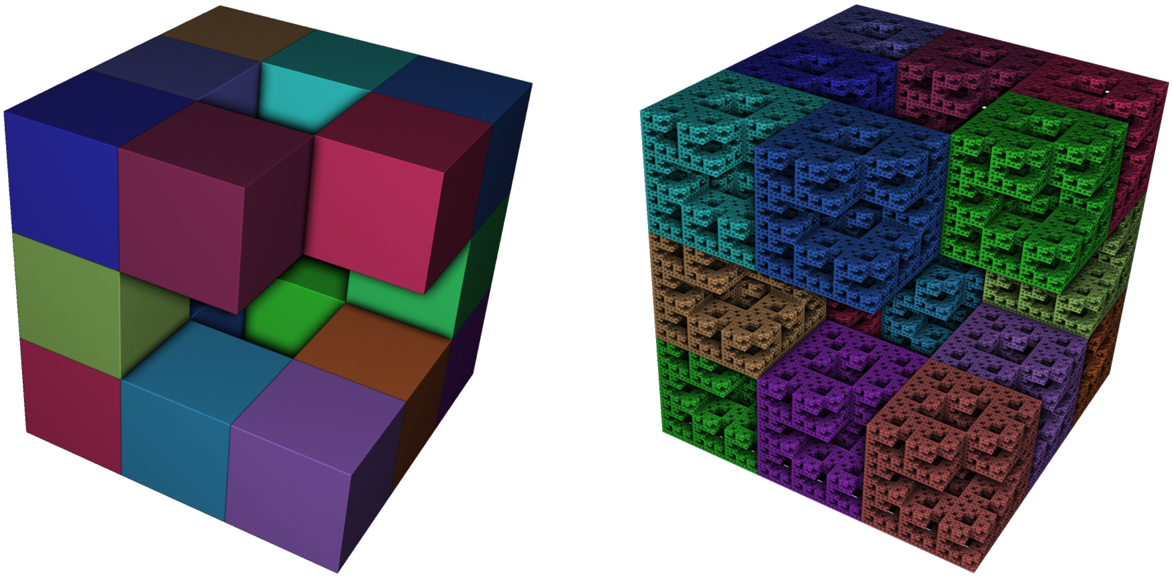


Рис. 3.1: Множество $D + P$ (слева) и фрактальный куб $nK = K + D$ (справа)

рисунке 3.1). Гомотетия, переводящая P в P_i, имеет вид $S_i(x) = \dfrac{x + d_i}{n}$. Тогда $K = \bigcup\limits_{d_i \in D} \dfrac{d_i + K}{n}$.

Уравнение (3.1) задаёт систему $\mathcal{S}$ гомотетий $S_i(x) = \dfrac{x + d_i}{n}$, где $d_i \in D$, а оператор Хатчинсона $T_{\mathcal{S}}$ системы $\mathcal{S}$ определяется уравнением

$$T_{\mathcal{S}}(A) = \frac{D + A}{n} = \bigcup_{d_i \in D} \frac{d_i + A}{n}.$$

Определение 3.2. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$, m-е измельчение *системы* $\mathcal{S}$ *— это система* $\mathcal{S}^m = \{S_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_m \in I^m\}$, *где* $S_{\mathbf{i}}(x) = \dfrac{x + d_{\mathbf{i}}}{n^m}$ *и* $d_{\mathbf{i}} = n^{m-1} d_{i_1} + n^{m-2} d_{i_2} + \ldots + d_{i_m}$.

Аттрактор K можно рассматривать как соответствующий системе $\mathcal{S}^m$ фрактальный k-куб порядка n^m с множеством единиц $D^m = n^{m-1} D + n^{m-2} D + \ldots + D$ и копиями $\dfrac{K + d_{\mathbf{i}}}{n^m}$. Оператор Хатчинсона $T_{\mathcal{S}}^m$ этой системы $\mathcal{S}^m$ определяется уравнением $T_{\mathcal{S}}^m(A) = \dfrac{D^m + A}{n^m}$.

Каждой бесконечной строке $\mathbf{i} = i_1 i_2 \ldots \in I^\infty$ соответствует единственная точка $x = \pi(\mathbf{i})$, где $\pi(\mathbf{i}) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{d_{i_m}}{n^m}$.

Замечание 3.1. Далее, если не указано иное, говоря *«фрактальный k-куб K»*, мы будем иметь в виду *«фрактальный k-куб K порядка n с множеством единиц D»*.

3.1.2 Грани K_α фрактального k-куба

Единичный k-куб P является фрактальным k-кубом порядка n с множеством единиц $D = \{0, 1, \dots, n-1\}^k$, поскольку $P = \dfrac{P + \{0, 1, \dots, n-1\}^k}{n}$. Значит, любой фрактальный k-куб K содержится в единичном k-кубе P.

Если фрактальный k-куб K является аттрактором системы $\mathcal{S}$, то из включения $K \subset P$ следует $S_i(K) \subset S_i(P)$ для любого $S_i \in \mathcal{S}$. Более того, для любых $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ малые k-кубы $S_i(P)$ и $S_j(P)$ могут пересекаться друг с другом только по своим граням. Прообразы этих граней в $S_i(P)$ и $S_j(P)$ относительно соответственных отображений S_i и S_j являются парой противоположных граней в P. Введём обозначения для граней k-куба P и пересечений этих граней с фрактальным k-кубом K.

Рассмотрим множество векторов $A = \{-1, 0, 1\}^k$.

Заметим, что каждый из соседей k-куба P в целочисленной решетке $P+\mathbb{Z}^k$ имеет вид $P + \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha} \in A$. При этом пересечение $P_{\boldsymbol{\alpha}} = P \cap (P + \boldsymbol{\alpha})$ является единственной гранью куба P, относительно центра которой кубы P и $P + \boldsymbol{\alpha}$ симметричны.

Тем самым мы задаем естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством A и множеством граней единичного k-куба $P = [0, 1]^k$, сопоставляющее каждому $\boldsymbol{\alpha} \in A$ грань $P_{\boldsymbol{\alpha}} = P \cap (P + \boldsymbol{\alpha})$ k-куба P.

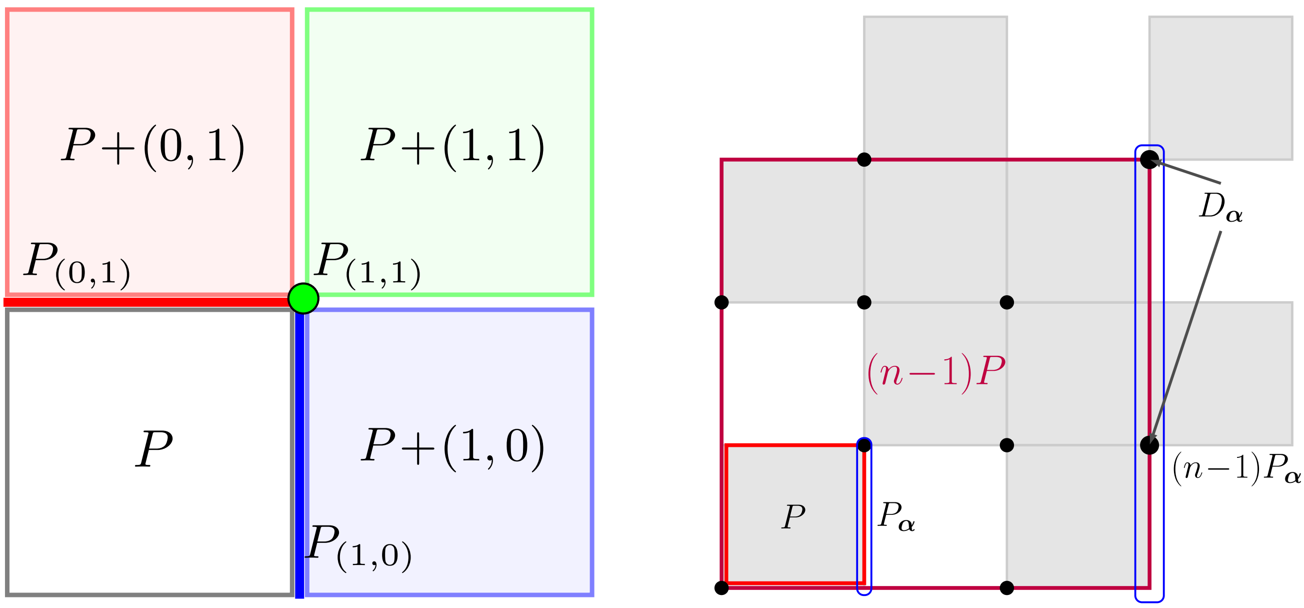


Рис. 3.2: Множества $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ (слева) и $D_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Симметрия противоположных граней k-куба P выражается равенством

$$P_{\boldsymbol{\alpha}} = P \cap (P + \boldsymbol{\alpha}) = ((P - \boldsymbol{\alpha}) \cap P) + \boldsymbol{\alpha} = P_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}.$$

Для $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$ обозначим через $|\boldsymbol{\alpha}| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k|$ число ненулевых компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Тогда вектору $\boldsymbol{\alpha} \in A$, при $|\boldsymbol{\alpha}| = l$, соответствует $(k-l)$-мерная грань $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ k-куба P, где $k-l$ есть число равных нулю элементов вектора $\boldsymbol{\alpha}$.

Замечание 3.2. Для $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$ грань $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ можно представить как множество точек

$$P_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_k) \ : \ x_i = \frac{\alpha_i + 1}{2} \text{ при } \alpha_i \neq 0, \quad \text{и } x_i \in [0,1] \text{ при } \alpha_i = 0 \right\}.$$

В частном случае, если $|\boldsymbol{\alpha}| = k$, то $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ является точкой $\left\{ \left(\frac{\alpha_1+1}{2}, \dots, \frac{\alpha_k+1}{2} \right) \right\}$.

На множестве A введём отношение порядка $\sqsubseteq$ следующим образом.

Определение 3.3. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \in A$. *Будем говорить, что* $\boldsymbol{\alpha} \sqsubseteq \boldsymbol{\beta}$, *если из* $\alpha_i \neq 0$ *следует* $\beta_i = \alpha_i$. *Если при этом* $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, *то* $\boldsymbol{\alpha} \sqsubset \boldsymbol{\beta}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{\alpha} \sqsubseteq \boldsymbol{\beta}$ тогда и только тогда, когда $P_{\boldsymbol{\alpha}} \supseteq P_{\boldsymbol{\beta}}$. Максимальными элементами в A по отношению $\sqsubseteq$ являются векторы $(\pm 1, \dots, \pm 1)$, которым соответствуют вершины k-куба P. Минимальным элементом из A по отношению $\sqsubseteq$ является $(0, \dots, 0)$, которому соответствует единичный k-куб $P = P_0$.

Определение 3.4. *Гранью* $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ *фрактального* k-*куба* K *называется множество* $K \cap P_{\boldsymbol{\alpha}}$.

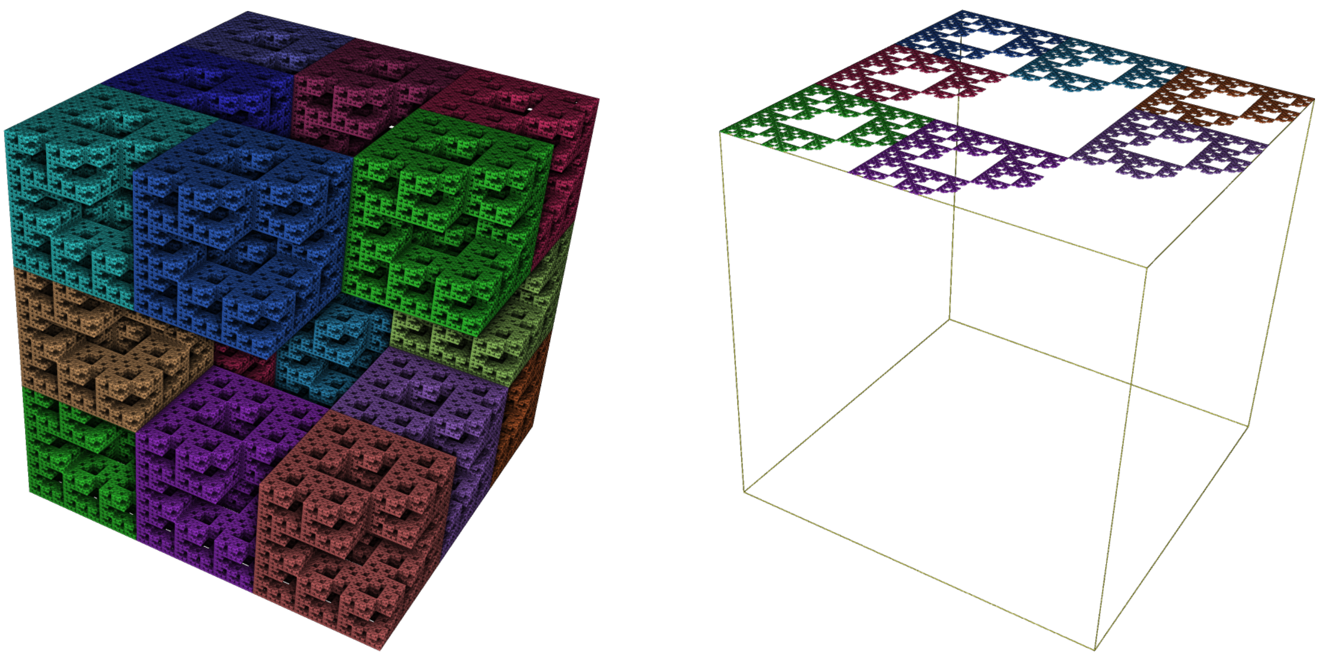


Рис. 3.3: Фрактальный куб K и его грань $K_{\boldsymbol{\alpha}}$

Предложение 3.5. *Грань* $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ *фрактального* k-*куба* K *удовлетворяет уравнению* $nK_{\boldsymbol{\alpha}} = K_{\boldsymbol{\alpha}} + D_{\boldsymbol{\alpha}}$, *где* $D_{\boldsymbol{\alpha}} = D \cap (n-1)P_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Это утверждение показывает, что каждая грань фрактального k-куба сама является фрактальным k-кубом.

Доказательство. Заметим, что $nK_{\boldsymbol{\alpha}} = n(K \cap P_{\boldsymbol{\alpha}}) = (K+D) \cap nP_{\boldsymbol{\alpha}}$. Если $d \in D$ и $d \notin (n-1)P_{\boldsymbol{\alpha}}$, то множество $(d+K) \cap nP_{\boldsymbol{\alpha}}$ пусто. Имеет смысл рассматривать только те $d \in D$, для которых $d \in D \cap (n-1)P_{\boldsymbol{\alpha}} = D_{\boldsymbol{\alpha}}$. Также, если $x \in K \setminus K_{\boldsymbol{\alpha}}$, то $(x + D) \cap nP_{\boldsymbol{\alpha}} = \varnothing$. Таким образом,

$$nK_{\boldsymbol{\alpha}} = (D + K) \cap nP_{\boldsymbol{\alpha}} = (D_{\boldsymbol{\alpha}} + K) \cap ((n-1)P_{\boldsymbol{\alpha}} + P_{\boldsymbol{\alpha}}) = D_{\boldsymbol{\alpha}} + K_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

□

3.1.3 Пересечения F_α граней фрактальных k-кубов

Пусть в дальнейшем K^1 и K^2 — фрактальные k-кубы порядка n с множествами единиц D^1 и D^2.

Определение 3.6. *Для любого $\boldsymbol{\alpha} \in A$ символом $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ обозначим пересечение $K^1_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K^2_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha})$ пары граней фрактальных k-кубов K^1 и K^2.*

Из $P \cap (P + \boldsymbol{\alpha}) = P_{\boldsymbol{\alpha}} = P_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}$ следует, что

$$F_{\boldsymbol{\alpha}} = K^1_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K^2_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}) = K^1 \cap (K^2 + \boldsymbol{\alpha}). \tag{3.2}$$

Уравнения, задающие множества $F_{\boldsymbol{\alpha}}$, получаются из следующей теоремы.

Теорема 3.7. *Семейство множеств $\{F_{\boldsymbol{\alpha}} = K^1 \cap (K^2 + \boldsymbol{\alpha}) \ : \ \boldsymbol{\alpha} \in A\}$ удовлетворяет системе Σ уравнений*

$$F_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcup_{\boldsymbol{\beta} \sqsupseteq \boldsymbol{\alpha}} \frac{F_{\boldsymbol{\beta}} + G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}}{n}, \tag{3.3}$$

где $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = D^1 \cap (D^2 + n\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})$.

Множество $G_{\boldsymbol{\alpha\alpha}} = D^1 \cap (D^2 + (n-1)\boldsymbol{\alpha})$ мы обозначим как $G_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Замечание 3.3. Введём для $\boldsymbol{\beta} \sqsupseteq \boldsymbol{\alpha}$ оператор $T_{\boldsymbol{\alpha\beta}}(x) = \dfrac{x + G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}}{n}$. Тогда формула (3.3) представима в виде

$$F_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\boldsymbol{\alpha\alpha}}(F_{\boldsymbol{\alpha}}) \cup \bigcup_{\boldsymbol{\beta} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}} T_{\boldsymbol{\alpha\beta}}(F_{\boldsymbol{\beta}}).$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} nF_{\boldsymbol{\alpha}} = nK^1 \cap (nK^2 + n\boldsymbol{\alpha}) = (K^1 + D^1) \cap (K^2 + D^2 + n\boldsymbol{\alpha}) = \\ = \bigcup_{d_1 \in D^1,\ d_2 \in D^2} (K^1 + d_1) \cap (K^2 + d_2 + n\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из соотношения $(K^1+d_1)\cap(K^2+d_2+n\boldsymbol{\alpha})\neq\varnothing$ следует, что $d_2-d_1+n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ для некоторого $\boldsymbol{\beta}\in A$.

Рассматривая i-ю координату в последнем равенстве, мы получаем

$$d_{2i}-d_{1i}+n\alpha_i=\beta_i.$$

Из того, что $\alpha_i,\beta_i\in\{-1,0,1\}$ и $|d_{2i}-d_{1i}|\leqslant n-1$, вытекают следующие утверждения.

(i) Если $\alpha_i=1$, то $\beta_i>0$, а значит, $\beta_i=\alpha_i$ и $d_{2i}-d_{1i}=n-1$.

(ii) Если $\alpha_i=-1$, то $\beta_i<0$, поэтому $\beta_i=\alpha_i$ и $d_{2i}-d_{1i}=1-n$.

(iii) Если $\alpha_i=0$ то $d_{2i}-d_{1i}=\beta_i\in\{-1,0,1\}$.

Из утверждений (i), (ii) и (iii) следует что $\boldsymbol{\beta}\sqsupseteq\boldsymbol{\alpha}$.

Равенство $d_1=d_2+n\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ показывает, что d_1 принадлежит множеству $D^1\cap(D^2+n\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=D^1_{\boldsymbol{\alpha}}\cap(D^2_{-\boldsymbol{\alpha}}+n\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$, которое мы обозначили как $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$. Каждое $d_1\in G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ задаёт единственное d_2 и для них справедливы равенства

$$(K^1+d_1)\cap(K^2+d_2+n\boldsymbol{\alpha})=(K^1\cap(K^2+\boldsymbol{\beta}))+d_1=F_{\boldsymbol{\beta}}+d_1.$$

Возьмём объединение по всем $d_1\in G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, тогда равенство (3.4) превратится в

$$nF_{\boldsymbol{\alpha}}=\bigcup_{\boldsymbol{\beta}\sqsupseteq\boldsymbol{\alpha}}(F_{\boldsymbol{\beta}}+G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}).$$

□

Из теоремы 3.7 и замечания 3.2 следует, что при $|\boldsymbol{\alpha}|=k$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ не более чем одноточечно. Говоря конкретнее, $F_{\boldsymbol{\alpha}}=\left\{\left(\frac{\alpha_1+1}{2},\ldots,\frac{\alpha_k+1}{2}\right)\right\}$ тогда и только тогда, когда $G_{\boldsymbol{\alpha}}=\left\{(n-1)\cdot\left(\frac{\alpha_1+1}{2},\ldots,\frac{\alpha_k+1}{2}\right)\right\}$.

Множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ пусто тогда и только тогда, когда $G_{\boldsymbol{\alpha}}=\varnothing$ и для любого $\boldsymbol{\beta}\sqsupset\boldsymbol{\alpha}$ множество $F_{\boldsymbol{\beta}}+G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}=\varnothing$. Это приводит к следующему утверждению.

Лемма 3.8. *Множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}=\varnothing$ тогда и только тогда, когда для любого $\boldsymbol{\beta}\sqsupseteq\boldsymbol{\alpha}$ и для любой цепочки $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0\sqsubseteq\boldsymbol{\alpha}_1\sqsubseteq\ldots\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\sqsubseteq\boldsymbol{\alpha}_p=\boldsymbol{\beta}$ произведение $\#G_{\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\alpha}_1}\cdot\#G_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}\cdot\ldots\cdot\#G_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p}\cdot\#G_{\boldsymbol{\beta}}$ равно нулю.* □

Отношения между множествами $F_{\boldsymbol{\alpha}}$, установленные в теореме 3.7, описываются *структурным графом* Γ_Σ системы Σ.

Определение 3.9. *Структурным графом Γ_Σ называется отмеченный ориентированный граф с множеством вершин $\{\boldsymbol{\alpha}\in A\ :\ F_{\boldsymbol{\alpha}}\neq\varnothing\}$ и множеством рёбер $\{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ :\ \boldsymbol{\alpha}\sqsubseteq\boldsymbol{\beta},G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\neq\varnothing,F_{\boldsymbol{\beta}}\neq\varnothing\}$, где ребро $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ направлено из $\boldsymbol{\alpha}$ в $\boldsymbol{\beta}$ и отмечено $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.*

В общем случае граф Γ_Σ содержит 3^k вершин и 5^k ребер, при этом 3^k ребер являются петлями.

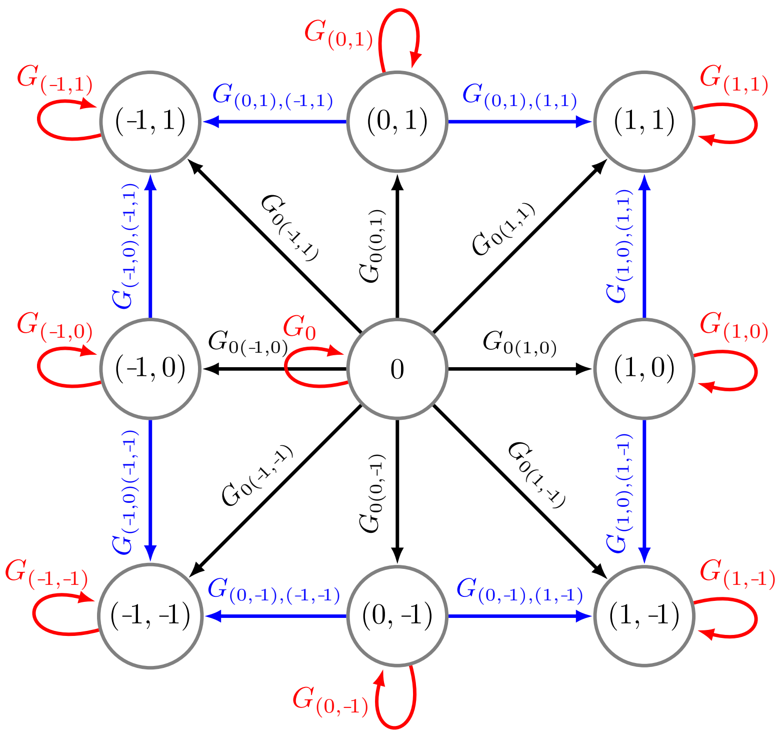


Рис. 3.4: Структурный граф Γ_Σ в общем случае для пересечения двух фрактальных квадратов

Определение 3.10. *Мы говорим, что в граф Γ_Σ содержит* направленный путь из $\boldsymbol{\alpha}$ в $\boldsymbol{\beta}$, *если*

1. $\boldsymbol{\alpha} \sqsubset \boldsymbol{\beta}$ *и существует цепочка* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 \sqsubset \boldsymbol{\alpha}_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \boldsymbol{\alpha}_{p-1} \sqsubset \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}$ *такая, что* $F_{\boldsymbol{\alpha}_0} \neq \varnothing$ *и для любых* $j = 1, \ldots, p$ *множества* $F_{\boldsymbol{\alpha}_j} \neq \varnothing$ *и* $G_{\boldsymbol{\alpha}_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_j} \neq \varnothing$; *либо*
2. $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ *и* $G_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing$.

Мы пишем $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$, *если* Γ_Σ *содержит направленный путь из* $\boldsymbol{\alpha}$ *в* $\boldsymbol{\beta}$, *и* $\boldsymbol{\beta} \succ \boldsymbol{\alpha}$, *если при этом* $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$.

Обозначим через $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ подграф графа Γ_Σ с множеством вершин $\{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}\}$. Если Γ_Σ несвязен, то Γ_0 есть компонента графа Γ_Σ, содержащая вершину 0, в противном случае $\Gamma_\Sigma = \Gamma_0$. Вершина $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$ является *максимальной* для $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$, если $\boldsymbol{\beta}$ — единственная вершина в $\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}$.

3.1.4 Мощность множества F_α

Пусть векторы $d_1 \in D^1$ и $d_2 \in D^2$ таковы, что $d_2 = d_1 + \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha} \in A$. Пару копий $\dfrac{K^1 + d_1}{n} \subset K^1$ и $\dfrac{K^2 + d_2}{n} \subset K^2$ назовём *копиями с* $\boldsymbol{\alpha}$*-соседством*. Поскольку $\dfrac{K^1 + d_1}{n} \cap \dfrac{K^1 + d_2}{n} = \dfrac{d_1 + F_{\boldsymbol{\alpha}}}{n}$, мощность пересечения копий с $\boldsymbol{\alpha}$-соседством равна мощности множества $F_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Уравнение (3.3) в теореме 3.7 позволяет оценить мощность множества $F_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Теорема 3.11.

(1) Если $\#G_{\boldsymbol\beta} > 1$ для некоторого $\boldsymbol\beta \succcurlyeq \boldsymbol\alpha$, то $F_{\boldsymbol\alpha}$ несчётно.

(2a) Если $\#G_{\boldsymbol\beta} \leqslant 1$ для любого $\boldsymbol\beta \succcurlyeq \boldsymbol\alpha$, то $F_{\boldsymbol\alpha}$ не более чем счетно.

(2b) Если при этом существует $\boldsymbol\beta' \succ \boldsymbol\beta$ такое, что $\#G_{\boldsymbol\beta} = 1$ и $F_{\boldsymbol\beta'} \neq \varnothing$, то $F_{\boldsymbol\alpha}$ счетно.

(3) Если $\#G_{\boldsymbol\beta} = 1$ для всех максимальных вершин $\boldsymbol\beta$ в $\Gamma_{\boldsymbol\alpha}$, и $G_{\boldsymbol\alpha_i} = \varnothing$ для всех остальных вершин $\boldsymbol\alpha_i$ в $\Gamma_{\boldsymbol\alpha}$, то $F_{\boldsymbol\alpha}$ конечно. В этом случае $\#F_{\boldsymbol\alpha}$ не превосходит сумму произведений $\prod\limits_{j=1}^{p-1} \#G_{\boldsymbol\alpha_j\boldsymbol\alpha_{j+1}}$, взятых по всем цепочкам $\boldsymbol\alpha = \boldsymbol\alpha_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol\alpha_p = \boldsymbol\beta$, где $\boldsymbol\beta$ максимальна в $\Gamma_{\boldsymbol\alpha}$.

(4) Если все $\boldsymbol\alpha_i \succcurlyeq \boldsymbol\alpha$ образуют единственную цепочку $\boldsymbol\alpha = \boldsymbol\alpha_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol\alpha_p$, в которой $G_{\boldsymbol\alpha_j} = \varnothing$ и $\#G_{\boldsymbol\alpha_j\boldsymbol\alpha_{j+1}} = 1$, $\#G_{\boldsymbol\alpha_p} = 1$ для всех $j \leqslant p-1$, то $\#F_{\boldsymbol\alpha} = 1$.

Доказательство.

(1) Если $\#G_{\boldsymbol\beta} > 1$, то $F_{\boldsymbol\beta}$ содержит в себе фрактальный k-куб с множеством единиц $G_{\boldsymbol\beta}$, а значит, $F_{\boldsymbol\beta}$ имеет мощность континуума. Тогда множество $F_{\boldsymbol\alpha}$ либо совпадает с несчётным $F_{\boldsymbol\beta}$ (при $\boldsymbol\beta = \boldsymbol\alpha$), либо содержит в себе его образ относительно некоторой гомотетии (при $\boldsymbol\beta \succ \boldsymbol\alpha$).

(2) Обозначим $B = \bigcup\limits_{\boldsymbol\alpha \sqsupset 0} \dfrac{G_{0\boldsymbol\alpha} + F_{\boldsymbol\alpha}}{n}$. Тогда $F_0 = \dfrac{G_0 + F_0}{n} \cup B$. Пусть B не пусто и не более чем счётно. Тогда при $G_0 = \varnothing$ имеем $F_0 = B$. При $G_0 = \{d_0\}$ верны равенства

$$F_0 = \frac{d_0 + F_0}{n} \cup B = \frac{d_0}{n-1} \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} S^m(B), \quad \text{где} \quad S(x) = \frac{d_0 + x}{n}.$$

Если $B \neq \dfrac{d_0}{n-1}$, то F_0 бесконечно.

Если $\#B = 1$, то $B = \dfrac{F_{\boldsymbol\alpha} + G_{0\boldsymbol\alpha}}{n}$ для некоторого $\boldsymbol\alpha \succ 0$, где $\#F_{\boldsymbol\alpha} = 1$ и $G_{0\boldsymbol\alpha} = \{d_{0\boldsymbol\alpha}\}$.

$$\frac{F_{\boldsymbol\alpha} + d_{0\boldsymbol\alpha}}{n} = \frac{d_0}{n-1} \quad \Rightarrow \quad F_{\boldsymbol\alpha} = \frac{nd_0 - (n-1)d_{0\boldsymbol\alpha}}{n-1}.$$

При $(d_0)_i \neq (d_{0\boldsymbol\alpha})_i$ получаем $(F_{\boldsymbol\alpha})_i \notin [0,1]$, поэтому $d_0 = d_{0\boldsymbol\alpha}$ и $F_{\boldsymbol\alpha} = \dfrac{d_{\boldsymbol\alpha 0}}{n-1}$. Из последнего равенства следует, что $G_0 = G_{0\boldsymbol\alpha} = G_{\boldsymbol\alpha} = \{d_0\}$. Следовательно, $\{d_0,\ d_0 - (n-1)\boldsymbol\alpha,\ d_0 + \boldsymbol\alpha\} \subset D^2$, что возможно только при $\boldsymbol\alpha = 0$.

Для каждой $\boldsymbol\beta \succ 0$, максимальной в Γ_0, множество $F_{\boldsymbol\beta}$ всегда одноточечно. Индуктивно для каждого $\boldsymbol\alpha \succ 0$ множество $F_{\boldsymbol\alpha}$ также не более чем счётно.

(3) Обозначим множество максимальных вершин в $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ символом $\max \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$. Для $\boldsymbol{\beta} \in \max \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ множество $F_{\boldsymbol{\beta}}$ одноточечно. Тогда для любой цепочки $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}$ множество $T_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \circ \ldots \circ T_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p}(F_{\boldsymbol{\beta}})$ конечно. При этом для $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ справедливо представление

$$F_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcup_{\substack{\boldsymbol{\beta} \in \max \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \\ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}}} T_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \circ \ldots \circ T_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p}(F_{\boldsymbol{\beta}}).$$

Следовательно

$$\# F_{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta} \in \max \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} \\ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}}} \# G_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \ldots \cdot \# G_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p}.$$

(4) Согласно формулировке, имеется единственное $\boldsymbol{\beta} \in \max \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ и единственная цепочка $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \prec \ldots \prec \boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\beta}$. Тогда $F_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \circ \ldots \circ T_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p}(F_{\boldsymbol{\beta}})$ и $\# F_{\boldsymbol{\alpha}} = \# G_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \ldots \cdot \# G_{\boldsymbol{\alpha}_{p-1}\boldsymbol{\alpha}_p} \cdot \# F_{\boldsymbol{\beta}} = 1$. $\square$

Пример 3.1 (Пересечение двух фрактальных квадратов, состоящее из 24 точек, и его структурный граф Γ_Σ)**.** Рассмотрим пересечение фрактальных квадратов K_1 и K_2 порядка 6 с множествами единиц D_1 и D_2. На рисунке 3.5 слева показаны D_1 и D_2 множеством красных квадратов $T_1(P) = \dfrac{D_1 + P}{6}$ и синих квадратов $T_2(P) = \dfrac{D_2 + P}{6}$. На этом же рисунке справа показаны фрактальные квадраты K_1 и K_2.

Большинство из множеств $G_{\boldsymbol{\alpha}}$, а именно, G_0, $G_{(1,0)}$, $G_{(-1,0)}$, $G_{(0,1)}$, $G_{(0,-1)}$, $G_{(1,1)}$, $G_{(1,-1)}$ и $G_{(-1,1)}$ являются пустыми, и только. Следовательно, множества $F_{(1,1)}$, $F_{(1,-1)}$, $F_{(-1,1)}$, $F_{(1,0)}$, $F_{(0,1)}$ — пусты.

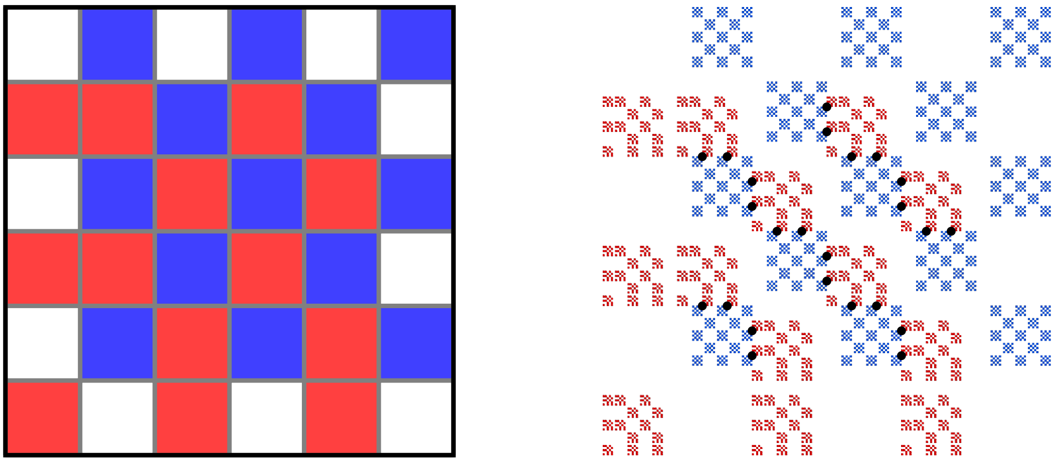


Рис. 3.5: Множества $\dfrac{D_1 + P}{6}$ и $\dfrac{D_2 + P}{6}$ (слева) и фрактальные квадраты K_1 и K_2 (справа). K_1 и K_2 пересекаются по чёрным точкам

В структурном графе Γ_Σ (см. рисунок 3.6) содержатся только вершины 0, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$. Из $G_{(-1,-1)} = \{(0,0)\}$ получаем одноточечное $F_{(-1,-1)} = \{(0,0)\}$.

Легко вычислить, что $\#G_{(-1,0)(-1,-1)} = \#G_{(0,-1)(-1,-1)} = 2$, $\#G_{0(0,-1)} = \#G_{0(-1,0)} = 6$ и $G_{0(-1,-1)} = \varnothing$. Поэтому, согласно теореме 3.11, $\#F_{(-1,0)} = \#F_{(0,-1)} = 2$ и

$$\#F_0 = \#F_{(-1,0)} \cdot \#G_{0(-1,0)} + \#F_{(0,-1)} \cdot \#G_{0(0,-1)} = 24.$$

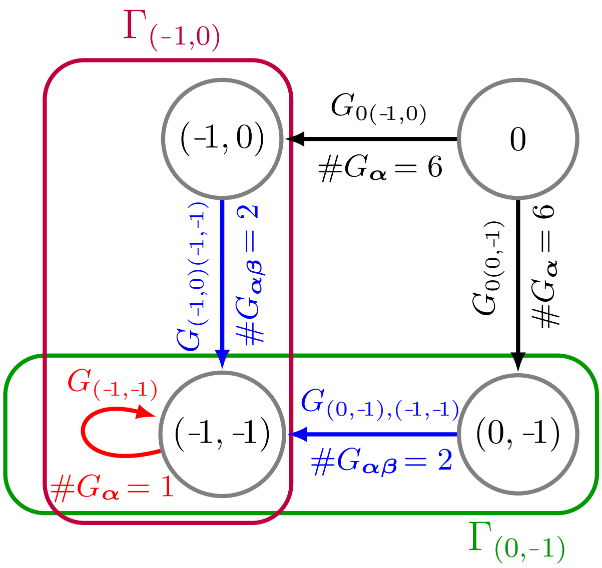


Рис. 3.6: Структурный граф $\Gamma_\Sigma = \Gamma_0$ и его подграфы $\Gamma_{(0,-1)}$ и $\Gamma_{(-1,0)}$

3.2 Фрактальные кубы с одноточечным пересечением, являющиеся дендритами

Далее будут получены условия, при которых фрактальный k-куб с одноточечным пересечением является дендритом.

3.2.1 Свойство одноточечного пересечения

Далее будем полагать, что $K = K^1 = K^2$. Тогда $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ есть пересечение $K_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha})$ пары противоположных граней фрактального k-куба K. В этом случае справедливо следующее предложение.

Предложение 3.12. *Пусть K — фрактальный k-куб.*

1. *Для любого $\boldsymbol{\alpha} \in A$ имеет место равенство $K \cap (K + \boldsymbol{\alpha}) = F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}$;*
2. *Если $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^k$, $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ и $K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}} \neq \varnothing$, то $d_{\mathbf{i}} - d_{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\alpha}$ для некоторого $\boldsymbol{\alpha} \in A$, и при этом*

$$K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}} = \frac{d_{\mathbf{i}} + F_{\boldsymbol{\alpha}}}{n^k}.$$

Доказательство. 1. Поскольку $P \cap (P + \boldsymbol{\alpha}) = P_{\boldsymbol{\alpha}} = P_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}$, то мы имеем цепочку равенств

$$K \cap (K + \boldsymbol{\alpha}) = K_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}) = F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}.$$

2. Заметим, что $S_{\mathbf{i}}^{-1}(K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}}) = K \cap S_{\mathbf{i}}^{-1}(K_{\mathbf{j}}) = K \cap (K + d_{\mathbf{j}} - d_{\mathbf{i}})$. Так как $d_{\mathbf{j}} - d_{\mathbf{i}} \in \mathbb{Z}^k$, последнее пересечение может быть непусто только в том случае, если $d_{\mathbf{j}} - d_{\mathbf{i}}$ равно некоторому $\boldsymbol{\alpha} \in A$. В этом случае $K \cap (K + d_{\mathbf{j}} - d_{\mathbf{i}}) = F_{\boldsymbol{\alpha}}$. Значит $K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}} = S_{\mathbf{i}}(F_{\boldsymbol{\alpha}}) = \dfrac{d_{\mathbf{i}} + F_{\boldsymbol{\alpha}}}{n^k}$. □

Из предложения 3.12 следует, что для любого фрактального k-куба существует $\dfrac{3^k - 1}{2}$ типов пересечения смежных копий одинакового размера (поскольку $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $F_{-\boldsymbol{\alpha}}$ соответствуют одному и тому же типу смежности копий). Любое из этих пересечений является образом множества из системы $\{F_{\boldsymbol{\alpha}} \, : \, \boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{0\}\}$ относительно некоторого отображения $S_{\mathbf{i}}$. Для $\boldsymbol{\alpha} \in A$ пара копий $K_{(d)} = \dfrac{K + d}{n}$ и $K_{(d+\boldsymbol{\alpha})} = \dfrac{K + (d + \boldsymbol{\alpha})}{n}$ пересекается по множеству $\dfrac{F_{\boldsymbol{\alpha}} + d}{n}$. Поэтому критическое множество фрактального k-куба задаётся объединением $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{\alpha} \sqsupset 0} \dfrac{G_{0\boldsymbol{\alpha}} + F_{\boldsymbol{\alpha}}}{n}$.

Мы можем построить простой граф пересечений $\tilde{\Gamma}$ для K следующим образом. Возьмём в качестве вершин графа точки из D, тогда, при $F_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing$, каждая точка $d \in G_{0\boldsymbol{\alpha}}$ соединена с точкой $d + \boldsymbol{\alpha}$ отрезком, конгруэнтным вектору $\boldsymbol{\alpha}$. Таким образом, множество $G_{0\boldsymbol{\alpha}}$ состоит из единиц (векторов из D) тех копий фрактального k-куба K, которые имеют $\boldsymbol{\alpha}$-соседа. Соответственно, множество $G_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$ состоит из единиц тех копий грани $K_{\boldsymbol{\alpha}}$, которые имеют $\boldsymbol{\beta}$-соседа в грани $K_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha}$.

Теорема 3.11 (4) даёт условия, при которых $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно. Это позволяет определить, является ли фрактальный k-куб K множеством с одноточечным пересечением.

Следствие 3.13. *Фрактальный k-куб K является множеством с одноточечным пересечением, если для каждого $\boldsymbol{\alpha} \succ 0$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно.*

Согласно теореме 1.10, самоподобное множество с одноточечным пересечением является дендритом, если его двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ является деревом. Построим двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ (см. определение 1.9) для фрактального k-куба с одноточечным пересечением.

В двудольном графе пересечений $\hat{\Gamma}$ фрактального k-куба множеству белых вершин соответствует множество единиц D. Пусть $A_D = \{\boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{0\} \, : \, F_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing, \; G_{0\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing\}$. Тогда для каждого $\boldsymbol{\alpha} \in A_D$ каждая пара белых вершин $d, \; d + \boldsymbol{\alpha} \in D$ графе $\hat{\Gamma}$ соединена рёбрами с общей чёрной вершиной, которой которой соответствует множество $K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\alpha})}$.

Заметим, что чёрная вершина этого графа может быть соединена рёбрами с тремя и более белыми вершинами. Это соответствует трём и более копиям фрактального k-куба, имеющим общую точку. Проверить тройку копий фрактального k-куба с одноточечным пересечением на наличие общей точки позволяет следующая теорема.

Теорема 3.14. *Пусть* $K = \dfrac{K+D}{n}$ *фрактальный куб с одноточечным пересечением.*

Если существуют неравные $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq 0$ *такие, что* $F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$ *и* $G_{0\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing$, $G_{0\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$, *то для каждой тройки* $d, d+\boldsymbol{\alpha}, d+\boldsymbol{\beta} \in D$ *копии* $K_{(d)}$, $K_{(d+\boldsymbol{\alpha})}$ *и* $K_{(d+\boldsymbol{\beta})}$ *пересекаются по общей точке* $\{x\} = \dfrac{F_{\boldsymbol{\alpha}}+d}{n} = \dfrac{F_{\boldsymbol{\beta}}+d}{n}$.

Доказательство. Очевидно, что $K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\alpha})} = \dfrac{F_{\boldsymbol{\alpha}}+d}{n}$ и $K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\beta})} = \dfrac{F_{\boldsymbol{\beta}}+d}{n}$. Из равенства $F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{\boldsymbol{\beta}}$ следует, что

$$K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\alpha})} = K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\beta})} = \frac{F_{\boldsymbol{\beta}}+d}{n} = \frac{F_{\boldsymbol{\alpha}}+d}{n} = \{x\},$$

то есть $K_{(d)} \cap K_{(d+\boldsymbol{\alpha})} \cap K_{(d+\boldsymbol{\beta})} = \{x\}$.

Значит, в двудольном графе пересечений $\hat{\Gamma}$ белые вершины, соответствующие копиям $K_{(d)}, K_{(d+\boldsymbol{\alpha})}, K_{(d+\boldsymbol{\beta})}$, соединены с одной и той же единственной черной вершиной, соответствующей точке x. □

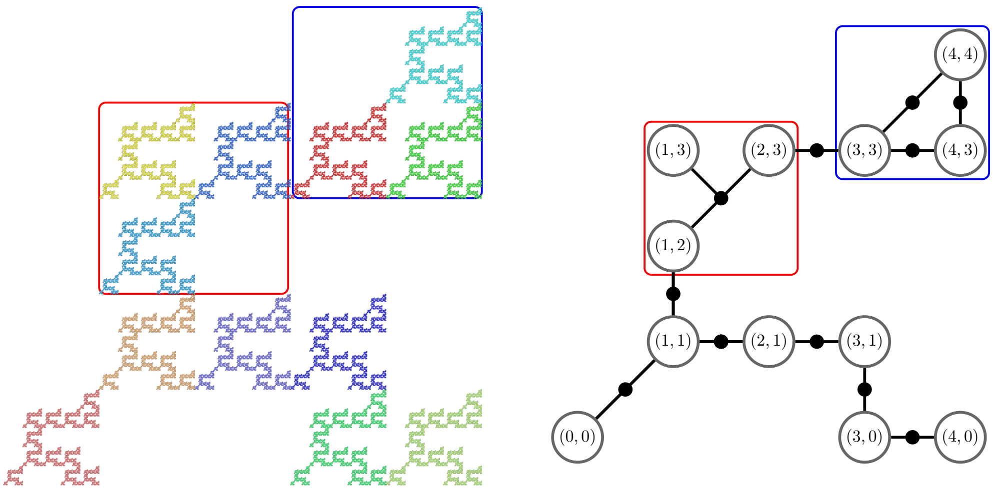


Рис. 3.7: Тройка копий с общей точкой (обведены красной линией) и тройка копий, образующих в $\hat{\Gamma}$ цикл (копии обведены синий линией)

Заметим, что в условиях предыдущей теоремы копии $K_{(d)}, K_{(d-\boldsymbol{\alpha})}, K_{(d-\boldsymbol{\beta})}$ попарно пересекаются в трёх различных точках.

$$K_{(d)} \cap K_{(d-\boldsymbol{\alpha})} = \frac{F_{\boldsymbol{\alpha}}+(d-\boldsymbol{\alpha})}{n};\; K_{(d)} \cap K_{(d-\boldsymbol{\beta})} = \frac{F_{\boldsymbol{\alpha}}+(d-\boldsymbol{\beta})}{n};$$

$$K_{(d-\boldsymbol{\alpha})} \cap K_{(d-\boldsymbol{\beta})} = \frac{F_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} + (d-\boldsymbol{\alpha})}{n} = \frac{F_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}} + (d-\boldsymbol{\beta})}{n}.$$

Следовательно, белые вершины, соответствующие $K_{(d)}, K_{(d-\boldsymbol{\alpha})}, K_{(d-\boldsymbol{\beta})}$, образуют в $\hat{\Gamma}$ цикл, содержащий из трёх белых и трёх черных точек.

Копии в тройках $\{K_{(d)}, K_{(d-\boldsymbol{\alpha})}, K_{(d+\boldsymbol{\beta})}\}$ и $\{K_{(d)}, K_{(d+\boldsymbol{\alpha})}, K_{(d-\boldsymbol{\beta})}\}$ также попарно пересекаются по разным множествам или вовсе не пересекаются.

Теорема 3.14 естественным образом обобщается для случая, в котором m копий имеют общую точку.

Следствие 3.15. *Пусть $B = \{d_1, ..., d_m\}$ — такое подмножество в D, что для любых $d_i, d_j, d_k \in B$ справедливо*

$$(d_j - d_i), (d_k - d_i) \in A \setminus 0 \text{ и } F_{d_j - d_i} = F_{d_k - d_i} \neq \varnothing.$$

Тогда существует такая точка $x \in K$, что для любых $d_i, d_j \in B$ справедливо равенство $K_{(d_i)} \cap K_{(d_j)} = \{x\}$, а x соответствует чёрной вершине порядка m в графе $\hat{\Gamma}$. $\square$

3.2.2 Алгоритм проверки фрактального k-куба

Чтобы проверить, является ли фрактальный k-куб K дендритом с одноточечным пересечением, нужно выполнить следующие шаги:

1. Согласно теореме 3.7, найдём все множества $G_{\boldsymbol{\alpha}}, G_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$ и выпишем систему уравнений Σ. Если $F_0 = \varnothing$, то K несвязен и не может быть дендритом.

2. Построим для системы Σ её структурный граф Γ_Σ. Если граф Γ_Σ несвязен, то рассматриваем подграф Γ_0.

3. Используя следствие 3.13 и граф Γ_0, проверим, является ли K множеством с одноточечным пересечением. Если это не так, то K не является дендритом с одноточечным пересечением.

4. Построим двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ для фрактального куба K. Теорема 3.14 и следствие 3.15 позволит обнаружить случаи, когда чёрная вершина в $\hat{\Gamma}$ соединена более чем с двумя белыми вершинами.

5. Если получившийся двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ является деревом, то K — дендрит с одноточечным пересечением.

Замечание 3.4. Заметим, что эти результаты справедливы для фрактальных k-кубов K, являющихся дендритами с одноточечным пересечением. В следующей главе будет доказано, что если фрактальный квадрат K является дендритом, то он обладает свойством одноточечного пересечения. Если будет доказано, что это справедливо и для фрактальных k-кубов, то этот алгоритм позволит обнаружить любой фрактальный k-куб, являющийся дендритом.

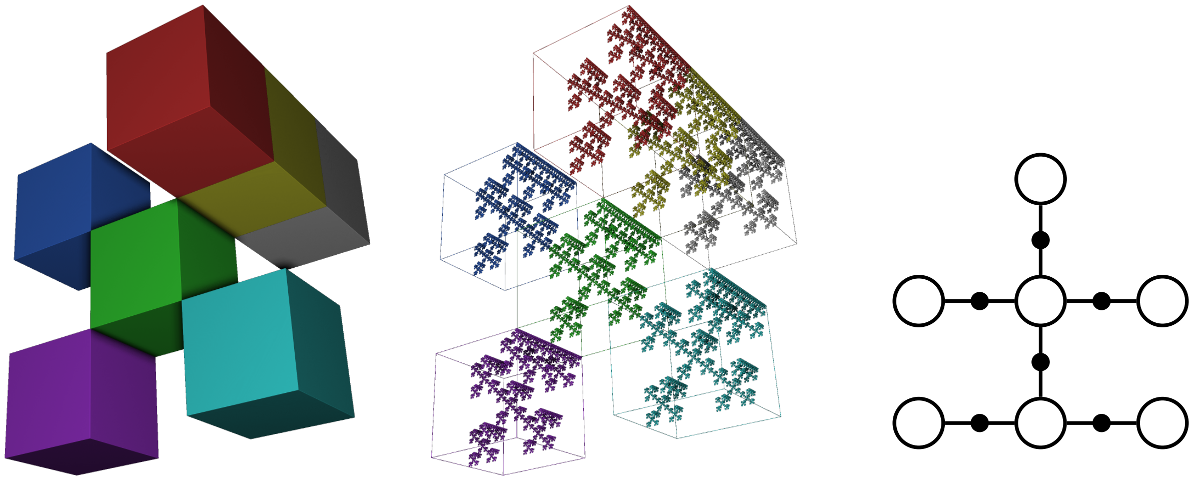


Рис. 3.8: Фрактальный куб, являющийся дендритом, и его двудольный граф пересечений

Глава 4

Фрактальные квадраты с конечным пересечением

В данной главе мы рассмотрим частный случай фрактальных k-кубов — фрактальные квадраты.

Определение 4.1. *Пусть* $D = \{d_1, \ldots, d_m\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^2$, *где* $n \geqslant 2$, *и* $1 < m < n^2$. Фрактальным квадратом *порядка* n *с* множеством единиц D *называют компактное множество* $K \subset \mathbb{R}^2$, *удовлетворяющее уравнению*

$$K = \frac{K + D}{n}.$$

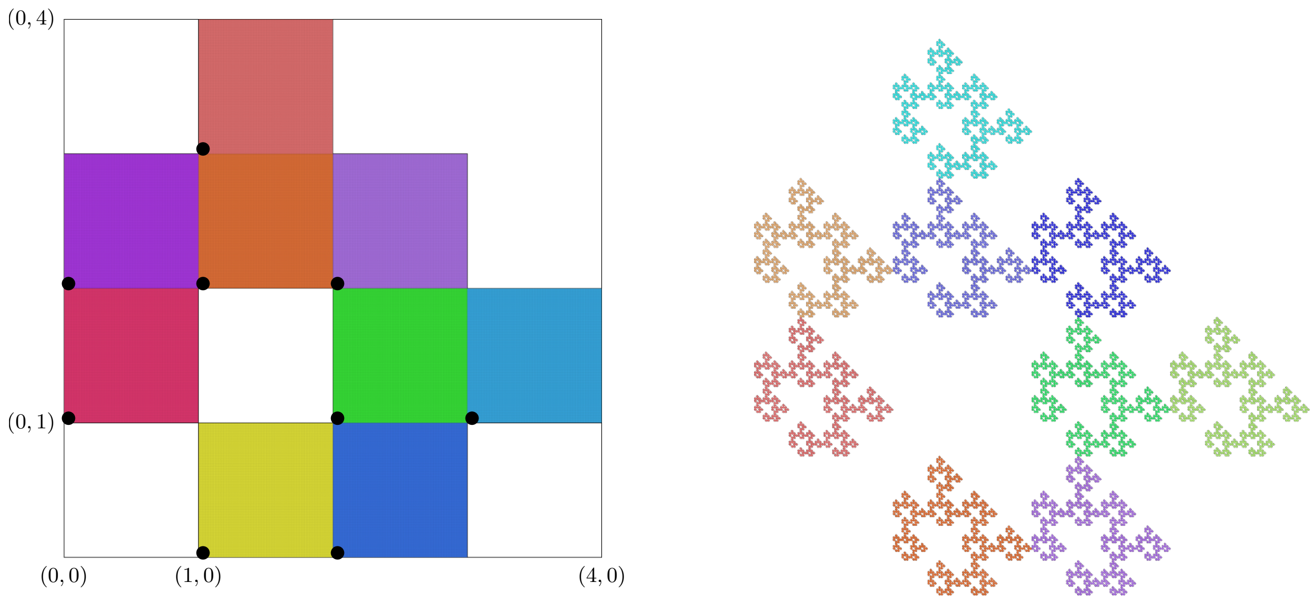


Рис. 4.1: Множество $n(D + P)$ (слева) и фрактальный квадрат $nK = K + D$ (справа). Элементы из D отмечены чёрными точками.

4.1 Пересечение копий фрактального квадрата

Следствие 4.2. *Если* $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)\}$ *и* $\#F_{\boldsymbol{\alpha}} > 1$*, то* $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ *(см. определение 3.6) связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком.*

Доказательство. Если $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ неодноточечно и связно, то множество $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ содержит неодноточечное связное подмножество, значит, $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) \geqslant 1$. В силу Предложения 3.5, множество $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ имеет размерность $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \log_n \#D_{\boldsymbol{\alpha}}$. Поскольку $\#D_{\boldsymbol{\alpha}} \leqslant n$, неравенство $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) \geqslant 1$ возможно только если $\#D_{\boldsymbol{\alpha}} = n$. Такому множеству единиц $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ соответствует фрактальный квадрат $K_{\boldsymbol{\alpha}}$, совпадающий с ребром $P_{\boldsymbol{\alpha}}$. Аналогично, $K_{-\boldsymbol{\alpha}} = P_{-\boldsymbol{\alpha}}$. Из этого следует, что $F_{\boldsymbol{\alpha}} = K_{\boldsymbol{\alpha}} = P_{\boldsymbol{\alpha}}$. □

4.1.1 Мощность пересечений копий фрактального квадрата

Сформулируем следствие из теоремы 3.11, позволяющее оценить мощность множества $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ при $\boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{0\}$ в случае фрактальных квадратов.

Следствие 4.3.

(i) Если $\#G_{\boldsymbol{\alpha}} > 1$*, то множество* $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ *несчётно.*

(ii) Если $\#G_{\boldsymbol{\alpha}} = 1$ *и существует* $\boldsymbol{\beta} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}$ *такое, что* $F_{\boldsymbol{\beta}}$ *непусто и* $\#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \geqslant 1$*, то* $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ *счётное.*

(iii) Множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ *конечно в следующих случаях:*

- ***(a)*** $\#G_{\boldsymbol{\alpha\alpha}} = 1$ *и* $\#F_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = 0$ *для каждого* $\boldsymbol{\beta} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}$*;*
- ***(b)*** $\#G_{\boldsymbol{\alpha\alpha}} = 0$ *и существует* $\boldsymbol{\beta} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}$ *такое, что* $\#F_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \geqslant 1$.

□

Следствие 4.4. *Если* $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ *конечно, то* $\#F_{\boldsymbol{\alpha}} = \#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \leqslant \left\lfloor \dfrac{n-2}{2} \right\rfloor$.

Доказательство. Если множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ удовлетворяет условию (iii.**a**) следствия 3.11, то оно не более чем одноточечно.

Рассмотрим теперь множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$, удовлетворяющее условию (iii.**b**) следствия 3.11. Не ограничивая общности, положим $\boldsymbol{\alpha} = (0,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1,1)$ и $F_{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$. Значит, $\{(0, n-1),\ (n-1, 0)\} \subset D$. Сразу отметим, что $F_{(-1,-1)} = F_{(1,1)} = \varnothing$, так как в противном случае $\#G_{\boldsymbol{\alpha}} > 1$ и $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ несчётно.

Очевидно, что при любом D справедлива оценка $\#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \leqslant n-1$, что показано на рисунке 4.2. Из $(0, n-1) \notin (D + n\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = D + (1, n-1)$ следует, что $(0, n-1) \notin G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$. Если $(n-1, n-1) \in G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, то $(n-2, 0) \in D$, но тогда, согласно Теореме 3.11, множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ бесконечно. Значит, $(n-1, n-1) \notin G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$.

Из условия (iii.**b**) следует равенство $G_{\boldsymbol{\alpha}} = \varnothing$, поэтому для каждого $d \in G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ справедливы соотношения $(d - n\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}) \notin D$ и $(d - n\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \in D$. Значит, для любого $d \in D$ пара координат вида $\{d,\ d + (1,0)\}$ (или, в общем случае,

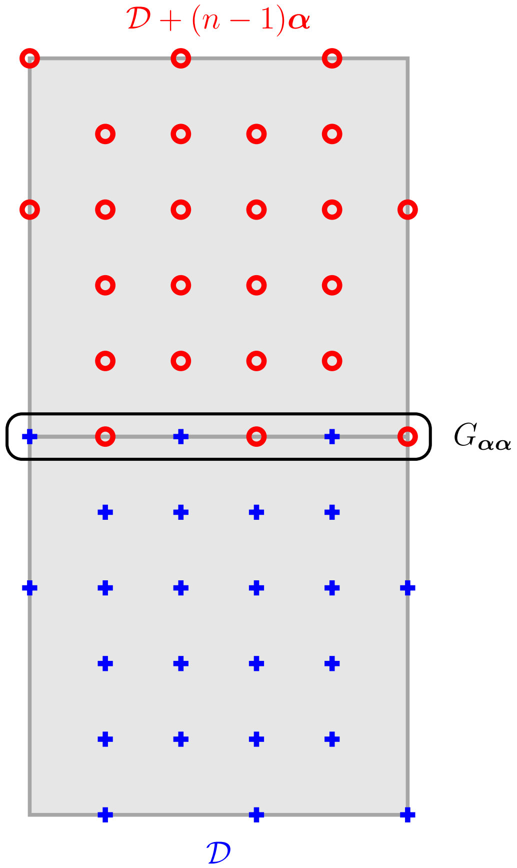


Рис. 4.2: Множества $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ при $\boldsymbol{\alpha}=(0,1)$ и $\boldsymbol{\beta}=(-1,1)$.

пара $\{d,\ d+\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\}$) не может содержаться в множестве $G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$. Учитывая, что $(0,n-1),\ (n-1,n-1)\notin G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, справедлива оценка $\#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\leqslant\left\lfloor\dfrac{n-2}{2}\right\rfloor$. □

Далее будет доказано, что нетривиальный односвязный фрактальный квадрат является дендритом со свойством одноточечного пересечения. Поэтому укажем условия, при которых $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно.

Следствие 4.5. *Множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно, если*
(a) *$\#G_{\boldsymbol{\alpha\alpha}}=1$ и $\#F_{\boldsymbol{\beta}}\cdot\#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}=0$ для каждого $\boldsymbol{\beta}\sqsupset\boldsymbol{\alpha}$; или*
(b) *$\#G_{\boldsymbol{\alpha\alpha}}=0$ и существует $\boldsymbol{\beta}\sqsupset\boldsymbol{\alpha}$ такое, что $\#F_{\boldsymbol{\beta}}\cdot\#G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}=1$.* □

4.1.2 Односвязные фрактальные квадраты

Теорема 4.6. *Всякий односвязный фрактальный квадрат K либо совпадает с P, либо является дендритом. В последнем случае K со свойством одноточечного пересечения.*

Доказательство. Рассмотрим односвязный фрактальный квадрат K, не являющийся дендритом. Так как он не является дендритом, в нём существует замкнутая дуга γ, которая ограничивает некоторую односвязную область O. Пусть $x\in O$ и $\rho=d(x,\gamma)$. Пусть $m\in\mathbb{N}$ таково, что $\frac{\sqrt{2}}{n^m}<\rho$. Существует такой $\mathbf{i} = i_1 ... i_m$, что $x \in S_{\mathbf{i}}(K) \subset O$. Тогда $S_{\mathbf{i}}(K) \subset S_{\mathbf{i}}(P) \subset O \subset K$, и поэтому $K = P$. Значит односвязный фрактальный квадрат, не совпадающий с P, является дендритом. Покажем, что он обладает свойством одноточечного пересечения.

Пусть $S_i(K)$ и $S_j(K)$ — пара копий (с $\boldsymbol{\alpha}$-соседством) односвязного фрактального квадрата. Если пересечение $S_i(K) \cap S_j(K)$ этих копий непусто, то оно связно, следовательно это пересечение является либо точкой, либо отрезком. Последнее возможно, когда пересечение $S_i(K) \cap S_j(K) = S_i(F_{\boldsymbol{\alpha}}) \cap S_j(F_{-\boldsymbol{\alpha}}) = S_i(F_{\boldsymbol{\alpha}})$, поскольку $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ содержит отрезок тогда и только тогда, когда $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ — ребро единичного квадрата P.

Предположим, что K — связный фрактальный квадрат с пересечением своих копий по полной стороне. Тогда, с точностью до вращения, K содержит $[0,1] \times \{0,1\}$ — верхнее и нижнее ребро единичного квадрата P. Такой пример показан на Рисунке 4.3.

В этом случае множество D содержит подмножество $\{0,\ldots,n-1\} \times \{0, n-1\}$, поэтому K содержит подмножество $L = [0,1] \times \{0, 1/n\}$. Для каждого из множеств $K_{0k} = \dfrac{K + (0,k)}{n}$, пересечение $K_{0k} \cap L$ есть пара параллельных отрезков. В силу связности K_{0k} существует путь $\gamma_{0k} \subset K_{0k}$, соединяющий эти отрезки. Поэтому объединение $L \cup \gamma_{00} \cup \gamma_{n-1,0}$ содержит замкнутую дугу, значит, K не является дендритом. $\square$

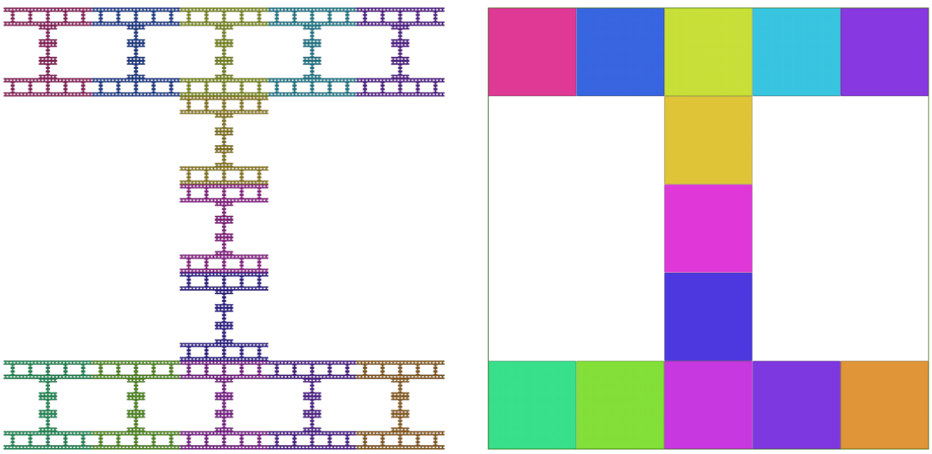


Рис. 4.3: Фрактальный квадрат с пересечением по полной стороне.

Поскольку любой односвязный фрактальный квадрат, является множеством с одноточечным пересечением, его двудольный граф пересечений может быть только деревом:

Следствие 4.7. *Фрактальный квадрат K является дендритом тогда и только тогда, когда его двудольный граф пересечений является деревом.* $\square$

В дальнейшем, говоря «односвязный фрактальный квадрат», мы будем иметь ввиду «нетривиальный (то есть не совпадающий с P) односвязный фрактальный квадрат».

4.1.3 Самоподобная граница фрактального квадрата

Рассмотрим множество $A = \{-1, 0, 1\}^2$ и соответствующее ему множество граней квадрата. Для фрактального квадрата K с множеством единиц D мы определим множество

$$A_D = \{\boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{(0,0)\} : G_{0\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing,\ F_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что если $\boldsymbol{\alpha} \in A_D$, то и $-\boldsymbol{\alpha} \in A_D$.

Итак, множество A_D — это множество тех $\boldsymbol{\alpha} \in A$, для которых существуют копии K_i, K_j такие, что $d_j - d_i = \boldsymbol{\alpha}$ и имеющие общие граничные точки. Для таких копий их общая граница равна $S_i(F_{\boldsymbol{\alpha}}) = S_j(F_{-\boldsymbol{\alpha}})$.

Следующее утверждение очевидно:

Предложение 4.8. *Самоподобная граница ∂K фрактального квадрата K есть объединение*

$$\partial K = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in A_D} F_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Если при этом K — дендрит, то для любого $\boldsymbol{\alpha} \in A_D$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ одноточечно.

Заметим, что для любой копии $K_{\mathbf{i}}$ из K топологическая граница $K_{\mathbf{i}}$ в K является подмножеством в $S_{\mathbf{i}}(\partial K)$. Таким образом, если путь $\gamma \subset K$ имеет концы $a \in K_{\mathbf{i}}$ и $b \in K \setminus K_{\mathbf{i}}$, то γ содержит точку из $S_{\mathbf{i}}(\partial K)$.

Теорема 4.9. *Пусть K — односвязный фрактальный квадрат, не являющийся отрезком. Тогда $\#\partial K \in \{3,\ 4,\ 6\}$.*
Если $\#\partial K = 4$, то $\partial K = F_{\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{-\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{\boldsymbol{\beta}} \cup F_{-\boldsymbol{\beta}}$, где пара $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ принимает одно из следующих значений:

- **A.** $\boldsymbol{\alpha} = (1,0)$, $\boldsymbol{\beta} = (0,1)$;
- **B.** $\boldsymbol{\alpha} = (1,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,-1)$;
- **C.** $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,1),\ (1,-1)\}, \boldsymbol{\beta} \in \{(1,0),\ (0,1)\}$.

Если $\#\partial K = 3$ или $\#\partial K = 6$, то

- **D.** $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_{\boldsymbol{\beta}} \cup F_{-\boldsymbol{\beta}}$, *где* $\boldsymbol{\beta} \in \{(1,1),\ (1,-1)\}$.

В зависимости от выбора перечисленных вариантов, мы будем говорить что ∂K принадлежит к типу **A**,**B**,**C** или **D**.

Замечание 4.1. Случай **D** с $\#\partial K = 6$ обозначим как **D6**, а случай с $\#\partial K = 3$ обозначим как **D3**. Случай **D3** возникает, если существуют $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,0), (-1,0)\}$ и $\boldsymbol{\beta} \in \{(0,1), (0,-1)\}$ такие, что $F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{\boldsymbol{\beta}}$.

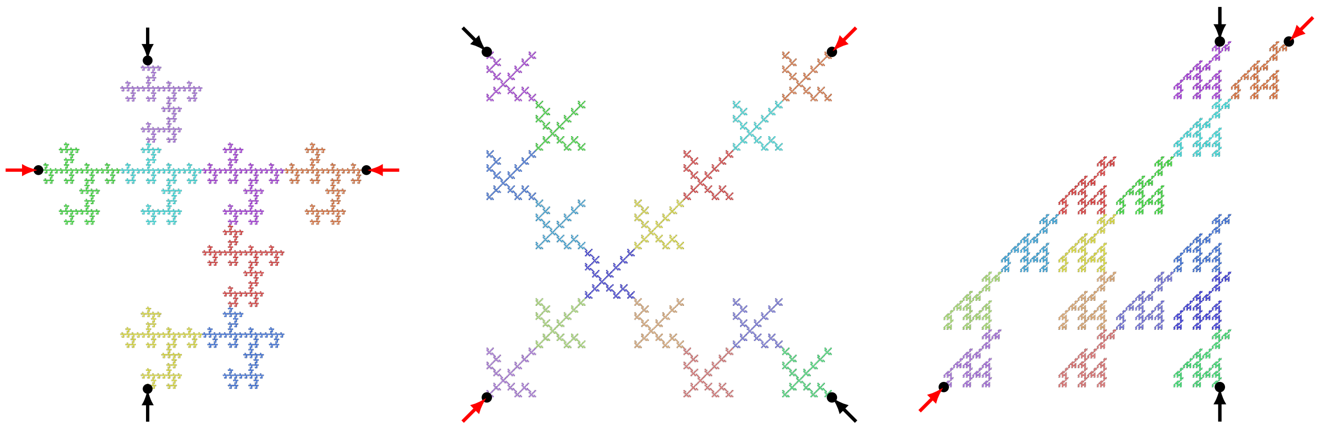


Рис. 4.4: Фрактальные квадраты типа **A**, **B**, **C**. Стрелки одного цвета указывают пару противоположных точек самоподобной границы, соответствующих одноточечным множествам $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $F_{-\boldsymbol{\alpha}}$.

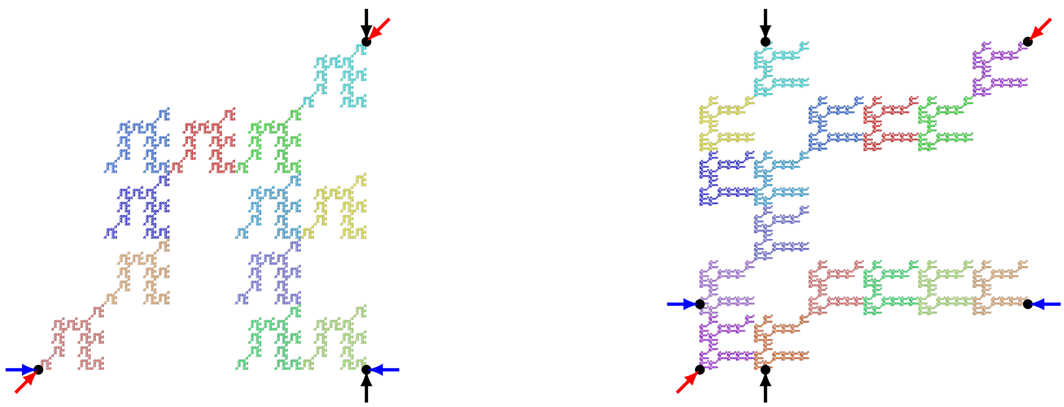


Рис. 4.5: Фрактальные квадраты типа **D3** и **D6**. В типе **D3** каждая точка самоподобной границы соответствует двум совпадающим множествам из системы $\{F_{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \boldsymbol{\alpha} \in A_D\}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда самоподобная граница состоит из двух точек, то есть $\partial K = F_{\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{-\boldsymbol{\alpha}}$ для некоторого $\boldsymbol{\alpha} \in A \setminus \{0\}$. В этом случае K есть отрезок с концами из $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $F_{-\boldsymbol{\alpha}}$. Значит, у фрактального квадрата K, являющегося нетривиальным дендритом, $\#\partial K > 2$.

Теперь покажем, что у фрактального квадрата K, являющегося (нетривиальным) дендритом, не может быть самоподобной границы, не относящейся к типам **A, B, C, D**. Нам достаточно показать, что если самоподобная граница имеет вид $\partial K = F_{(1,1)} \cup F_{(-1,-1)} \cup F_{(-1,1)} \cup F_{(1,-1)} \cup F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)}$ или $\partial K = F_{(1,1)} \cup F_{(-1,-1)} \cup F_{(-1,1)} \cup F_{(1,-1)} \cup F_{\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{-\boldsymbol{\alpha}}$, где $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,0),\ (0,1)\}$, то фрактальный квадрат не является дендритом. Все эти случаи подразумевают, что $\{(0,0),\ (n-1,0),\ (0,n-1),\ (n-1,n-1)\} \subset D$, а значит, для каждого $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)\}$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ имеет мощность континуума (согласно Теореме 3.11). Это невозможно, поскольку такие $F_{\boldsymbol{\alpha}}$, согласно Предложению 4.6, должны быть одноточечными.

(A) Для типа **A** множество ∂K может состоять только из четырёх точек. Если хоть одна из этих точек является угловой (углом квадрата), то ∂K содержит ровно две угловых точки, которые являются концами некоторой стороны квадрата P, и три точки из ∂K лежат на этой грани (см. первые два примера на рис. 4.16).

Предположим, что ∂K состоит из трёх точек. Это возможно, только если эти точки являются угловыми (т.е. углами единичного квадрата), например, $(1,0)$, $(0,0)$ и $(0,1)$. Отсюда следует, что $F_{(1,-1)} \neq \varnothing$. Мы утверждаем, что в этом случае $G_{(1,-1)} = (D \cap (D + (1,-1)) \neq \varnothing$. Действительно, пусть D' — подмножество в D, удовлетворяющее условиям:
1. Множество $D' + P$ связно;
2. $D' \cap (D' + (1,-1)) = \varnothing$;
3. $(0, n-1) \in D'$.

Тогда D' равно либо $\{0\} \times \{k, \ldots, n-1\}$, либо $\{k, \ldots, n-1\} \times \{n-1\}$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Поскольку $D' + P \subset D + P$ и $D + P$ связно, существует $d \in D$ такое, что $d \in D' + (1,-1)$, поэтому $G_{(1,-1)} \neq \varnothing$. Итак, из $F_{(1,-1)} \neq \varnothing$ и $(1,-1) \in A_D$ следует, что ∂K относится к типу **D**.

(B) Для типа **B** очевидно, что $\#\partial K = 4$, поскольку $\partial K = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$.

(C) Рассуждая аналогично случаю **(A)**, легко увидеть, что для типа **C** множество ∂K также состоит ровно из четырёх точек.

(D) Пусть для типа **D** граница $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_{(1,1)} \cup F_{(-1,-1)}$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} \in \{(1,0), (-1,0)\}$ и $\boldsymbol{\beta} \in \{(0,1), (0,-1)\}$. Тогда равенства $F_{\boldsymbol{\alpha}} = F_{-\boldsymbol{\beta}}$, $F_{\boldsymbol{\beta}} = F_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$ и $F_{-\boldsymbol{\alpha}} = F_{-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}$ эквивалентны и $\partial K = F_{-\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{\boldsymbol{\alpha}} \cup F_{\boldsymbol{\beta}}$.

Значит, если объединение $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_{(1,1)} \cup F_{(-1,-1)}$ является дизъюнктным, то $\#\partial K = 6$, в противном случае $\#\partial K = 3$. □

4.2 Порядок точек ветвления односвязного фрактального квадрата

4.2.1 Запретные комбинации в множествах единиц для разных типов односвязных фрактальных квадратов

Для односвязного фрактального квадрата можно указать комбинации единиц, которые не могут встречаться в D^k для любого k. В следующей лемме рассматриваются такие комбинации. Мы говорим, что множество $Q \subset \mathbb{Z}^2$ *запрет-*

ное (для фрактального квадрата K с самоподобной границей данного типа), если для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\widetilde{d} \in D^k$ верно $\widetilde{d} + Q \not\subset D^k$.

Лемма 4.10. *Следующие комбинации единиц Q запретные:*
(1) $\{(0,0),(1,0)\}$ *и* $\{(0,0),(0,1)\}$ *для типа* **B***;*
(2) $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ *для типов* **A, B, D***;*
(3) $\{(0,0),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\}$ *для типа* **C***;*
(4) тройка $\{a_1,a_2,a_3\}$ *для типа* **D3***, если* $\partial K = \{a_1,a_2,a_3\}$*;*
(5) тройки $\{(0,0),(\beta_1,0),\boldsymbol{\beta}\}$ *и* $\{(0,0),(0,\beta_2),\boldsymbol{\beta}\}$ *для типа* **D6***.*

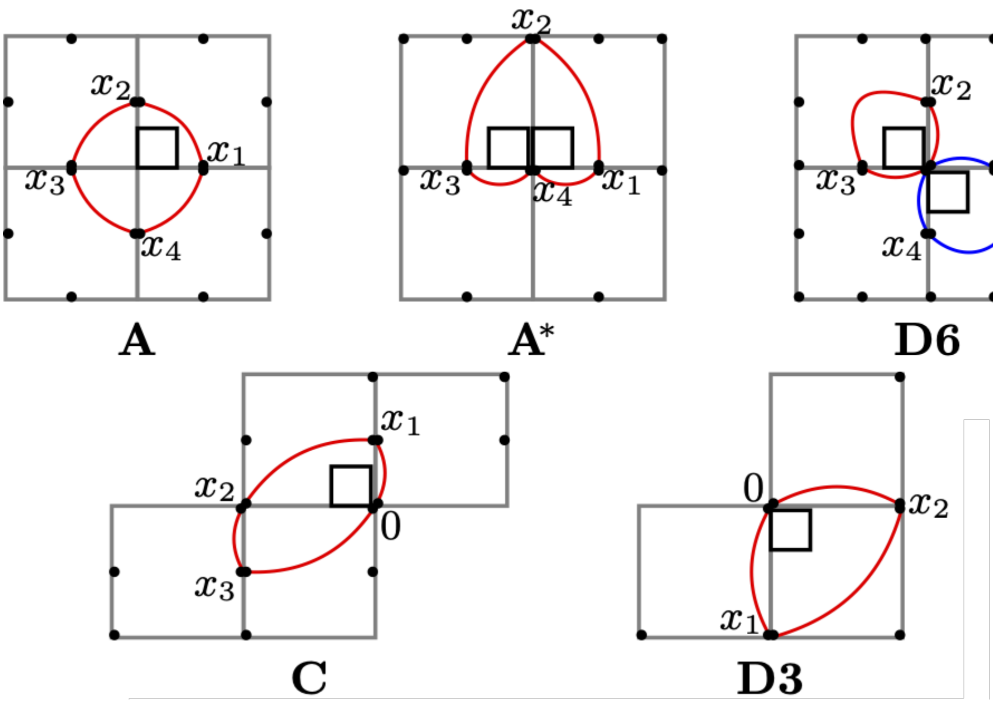


Рис. 4.6: Построение нестягиваемых петель в запретных комбинациях для типов **A, C** и **D**.

Доказательство. Случай (1) очевиден, так как для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \{(0,1),(1,0)\}$ множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ несчётно. Эта запретная комбинация также встречается в случае (2) для типа **B**.

Чтобы доказать, что множество Q целочисленных векторов *запретное* для типов **A, C, D**, мы убедимся, что множество $Q + K$ содержит нестягиваемую замкнутую кривую.

(2) Рассмотрим тип **A** и множество $Q = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Мы положим, что $\boldsymbol{\alpha} = (1,0), \boldsymbol{\beta} = (0,1)$. Тогда либо $F_{-\boldsymbol{\alpha}} = \{(0,b)\}, F_{-\boldsymbol{\beta}} = \{(a,0)\}$, где a, b принадлежат интервалу $]0,1[$, либо в случае **A** только одно из значений a, b, скажем b, равно 0.

В первом случае, поскольку одно из множеств $F_{(1,1)}$ или $F_{(1,-1)}$ пусто, существует открытый квадрат $\dot{P}_x := \dfrac{x+\dot{P}}{n}$, $x \in \{(-1,-1),(0,-1),(-1,0),(0,0)\}$ который имеет пустое пересечение с $Q+K$.

Обозначим $x_1 = (a,0)$, $x_2 = (0,b)$, $x_3 = (a-1,0)$, $x_4 = (0,b-1)$.

В множествах K, $-\boldsymbol{\alpha}+K$, $-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+K$ и $-\boldsymbol{\beta}+K$ содержатся поддуги $\gamma(x_1,x_2)$, $\gamma(x_2,x_3)$,$\gamma(x_3,x_4)$ и $\gamma(x_4,x_1)$ соответственно. Их объединение образует замкнутую кривую, лежащую в $Q+K$ и обходящую $\dot{P}_x$, поэтому эта дуга не стягиваема (см. рисунок 4.6 **A**).

Если же для типа **A** имеем $F_{-\boldsymbol{\alpha}} = (0,0)$, а квадрат $\dot{P}_x$ имеет пустое пересечение с $Q+K$ для каждого $x \in \{(-1,0),(0,0)\}$, то рассуждения остаются аналогичными (см. рисунок 4.6 **A***).

Аналогичным образом доказываются утверждения (3), (4) и (5). Мы выбираем вершину в $Q+K$, около которой существует открытый квадрат $\dot{P}_x$, имеющий пустое пересечение с $Q+K$, и теперь формируем нестягиваемую петлю из поддуг $\gamma(x_i,x_j)$, соединяющих граничные точки множеств q_i+K. Выбор точек и дуг показан на рисунке 4.6. $\square$

4.2.2 Порядок ветвления точки односвязного фрактального квадрата

Лемма 4.11. *Пусть K — односвязный фрактальный квадрат. Для любой угловой точки $a \in K$, $Ord(a,K) \leqslant 2$.*

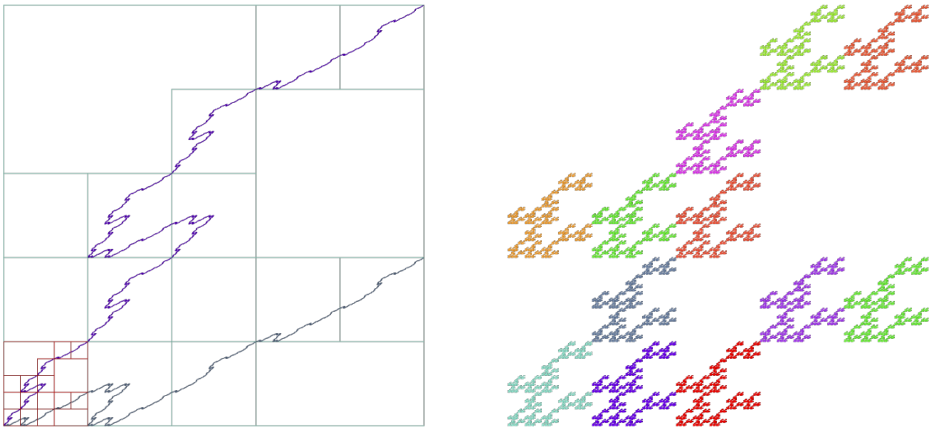


Рис. 4.7: Угловая точка порядка 2 для типа **C** и две главные дуги, содержащие ее.

Доказательство. Заметим, что если копия $K_{\mathbf{i}}$ содержит угловую точку a, то $K_{\mathbf{i}} \setminus \{a\} = S_{\mathbf{i}}(K\setminus\{a\})$, поскольку a — неподвижная точка гомотетии $S_{\mathbf{i}}$. Следовательно, если Q является компонентой в $K\setminus\{a\}$, то $Q \cap K_{\mathbf{i}} = S_{\mathbf{i}}(Q)$. Пусть

$\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ — множество всех этих компонент, тогда $K \setminus \{a\} = \bigsqcup_{j=1}^{k} Q_j$ и $\partial K \setminus \{a\} = \bigsqcup_{j=1}^{k} (Q_j \cap \partial K)$, поэтому $\partial K_{\mathbf{i}} \setminus \{a\} = \bigsqcup_{j=1}^{k} (Q_j \cap \partial K_{\mathbf{i}})$. Число k пересечений в последнем равенстве не больше чем 3, так как эти пересечения соответствуют двум сторонам и одной вершине, противоположным точке a. Каждое из этих пересечений содержит не более одной точки, и то же самое верно для соответствующих пересечений $Q_j \cap \partial K$.

Без потери общности предположим, что $a = (0,0)$. Таким образом,

$Q_1 \cap \dfrac{K + (1,0)}{n} = \dfrac{F_{(1,0)}}{n}$, если $(1,0) \in D$;

$Q_2 \cap \dfrac{K + (0,1)}{n} = \dfrac{F_{(0,1)}}{n}$, если $(0,1) \in D$;

$Q_3 \cap \dfrac{K + (1,1)}{n} = \dfrac{F_{(1,1)}}{n}$, если $(1,1) \in D$.

Для типа **A** имеем $F_{(1,1)} = \varnothing$, поэтому $Ord(a, K) \leqslant 2$.

Для типа **B** верно $D \not\ni \{(1,0), (0,1)\}$, следовательно $Ord(a, K) = 1$.

Для типа **C** либо $F_{(1,0)} = \varnothing$, либо $F_{(0,1)} = \varnothing$, следовательно $Ord(a, K) \leqslant 2$.

Предположим, что для типа **D** порядок угловой точки $a = (0,0)$ равен 3. Тогда $\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\} \in D$. По Лемме 4.10, это невозможно. Это противоречие показывает, что для типа **D**, $Ord(a, K) \leqslant 2$. $\square$

Далее определим, сколько угловых точек может быть у фрактального квадрата с самоподобной границей границей каждого из типов: **A, B, C, D3, D6**.

Теорема 4.12. *Пусть K — односвязный фрактальный квадрат.*

(A) Если K имеет границу типа **A**, *то у него может быть*

- *(a.1) две угловые точки с порядками ветвления $2, 1$ или $1, 1$;*
- *(a.2) одна угловая точка с порядком ветвления $\leqslant 2$; или*
- *(a.3) могут вовсе отсутствовать угловые точки.*

(B) Если K имеет границу типа **B**, *то K имеет четыре угловые точки с порядком ветвления 1.*

(C) Если K имеет границу типа **C**, *то K имеет две угловые точки, порядки ветвления которых $\leqslant 2$.*

(D) Если же K имеет границу типа **D**, *то он может иметь*

- *(d.1) две угловые точки порядков $\leqslant 2$ для подтипа* **D6**; *или*
- *(d.2) три угловые точки порядка 1 для подтипа* **D3**

Доказательство. Отметим, что наличие угловых точек $(0,0), (1,0), (0,1)$ или $(1,1)$ в K равносильно наличию в D векторов $(0,0), (n-1, 0), (0, n-1)$ или $(n-1, n-1)$ соответственно.

(A) Согласно теореме 4.9, если K имеет самоподобную границу типа **A**, то K не может содержать пару противоположных угловых точек. Поэтому K

содержит не более двух угловых точек, которые являются концами некоторой стороны квадрата P. Пусть этими двумя точками являются $(0,0)$ и $(1,0)$, тогда $\partial K = \{(0,0),\ (a,0),\ (1,0),\ (a,1)\}$, где $a \in]0,1[$.

Если порядки обеих точек, $(0,0)$ и $(1,0)$, равны 2, то $\{(0,1),\ (1,0),\ (n-2,0),\ (n-1,1)\} \subset D$, поскольку каждая из копий $\frac{K}{n}$ и $\frac{(0,n-1)+K}{n}$ должна иметь двух соседей (см. рисунок 4.8 слева). В этом случае $\#G_{(1,0)} \geqslant 2$, следовательно $F_{(1,0)}$ несчётно, что невозможно, поскольку $F_{(1,0)} \subset \partial K$ и $G_{0(1,0)}$. Следовательно, порядки ветвления этих двух точек могут быть равны $2,1$ или $1,1$.

(B) Из Теоремы 4.9 следует, что K содержит 4 угловые точки тогда и только тогда, когда ∂K относится к типу **B**. Согласно лемме 4.11, порядки ветвления этих точек равны 1.

(C, d.1) Если K имеет ровно 2 угловые точки, являющиеся противоположными, то ∂K относится к типу **C** или **D6**. Их порядки ветвления, согласно лемме 4.11, не превышают 2.

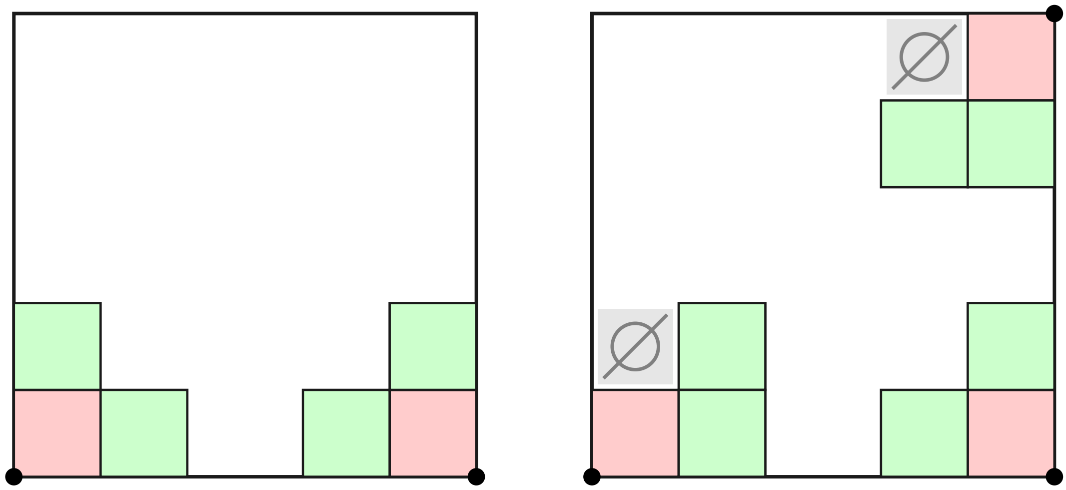


Рис. 4.8: На рисунках слева и по центру показаны для фрактальных квадратов с самоподобной границей типа **A** или **D3** их угловые точки, содержащие их угловые копии (красные) и возможные соседствующие копии для угловых копий (зелёные).

(d.2) Согласно теореме 4.9, K имеет 3 угловые точки тогда и только тогда, когда ∂K относится к типу **D3**. Предположим, не ограничивая общности, что угловыми точками в K являются $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1,1)$.

Если $(0,1) \in D$, то при $\boldsymbol{\alpha} = (-1,0)$ и $\boldsymbol{\beta} = (-1,-1)$ мы получим $(0,0) \in G_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $(0,1) \in G_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$. Но тогда, согласно теореме 3.11, $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ содержит $\{(0,0)\} \cup \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} S^m(F_{\boldsymbol{\beta}})$, где $S(x) = \frac{x+(1,0)}{n}$ и $F_{\boldsymbol{\beta}} = \{(0,0)\}$. Поэтому множество $F_{\boldsymbol{\alpha}}$ бесконечно и не совпадает с $\{(0,0)\}$.

Чтобы показать, что $G_{0\boldsymbol{\alpha}} \neq \varnothing$, допустим противное. Если в простом графе пересечений $\tilde{\Gamma}$ для K в качестве вершин взять точки из D на плоскости, то его рёбрами могут быть только отрезки, конгруэнтные векторам $(0,1)$ и $(1,1)$. При этом в D не должно быть пары точек, разность координат которых равна $(1,0)$. Тогда любая ломаная, которая содержит точку $(0,0)$, лежит в полуплоскости $y \geqslant x$ и поэтому не содержит точку $(n-1,0)$. Следовательно, граф $\tilde{\Gamma}$ несвязен, что невозможно.

Аналогично получаем бесконечное $F_{(0,1)}$ при $(n-2, n-1) \in D$. Поэтому $(0,1) \notin D$ и $(n-2, n-1) \notin D$.

Если $Ord((0,0), K) = 2$, то у копии с единицей $(0,0)$ есть 2 соседа. Следовательно, $\{(0,0),\ (1,0),\ (1,1)\} \subset D$, но эта комбинация единиц является запретной. Аналогично, точки $(1,0), (1,1)$ не могут иметь порядок 2, поскольку соответствующие комбинации $\{(n-1,0),\ (n-2,0),\ (n-1,1)\}$ и $\{(n-1,n-1),\ (n-2,n-2),\ (n-1,n-2)\}$ являются запретными. $\square$

Теорема 4.13. *Пусть K — односвязный фрактальный квадрат. Тогда $Ord(x,K) \leqslant 4$ для любого $x \in K$.*
Если ∂K типа **D** *и $x \notin S_{\mathbf{i}}(\partial K)$ для любого $\mathbf{i} \in I^*$, то $Ord(x,K) \leqslant 3$.*
Если ∂K типа **D3** *и $x \in \partial K_{\mathbf{i}}$ для некоторого $\mathbf{i} \in I^*$, то $Ord(x,K) \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть $Ord(x,K) = l$. Тогда существуют такие l жордановых дуг $\{\gamma_i\}_{i=1}^{l}$ в K с общим концом x, что дуги $\gamma_i \setminus \{x\}$ не пересекаются. Существует такое $p \in \mathbb{N}$, что для каждой дуги γ_i справедливо неравенство $|\gamma_i| > \sqrt{2}n^{-p}$. Из леммы 4.10 следует, что существуют 1, 2 или 3 мультииндекса $\mathbf{i} = i_1 i_2 \ldots i_p$ таких, что $x \in S_{\mathbf{i}}(K)$.

(1) В случае, когда такой $\mathbf{i}$ единственен, то есть $x \in \dot{K}_{\mathbf{i}}$, каждая дуга $\{\gamma_i\}$ проходит в одну из соседних для $K_{\mathbf{i}}$ копий порядка p через одну из точек $\partial K_{\mathbf{i}}$ (см. рисунок 4.9). Таким образом, число l не превышает количества соседей для $K_{\mathbf{i}}$ и числа точек в $\partial K_{\mathbf{i}}$. По теореме 4.9, для типов **A, B, C** число $l \leqslant 4$.

Для типа **D** получаем $l \leqslant 3$, так как при выборе любых четырёх из шести возможных соседей копии $K_{\mathbf{i}}$, мы получаем запретную комбинацию.

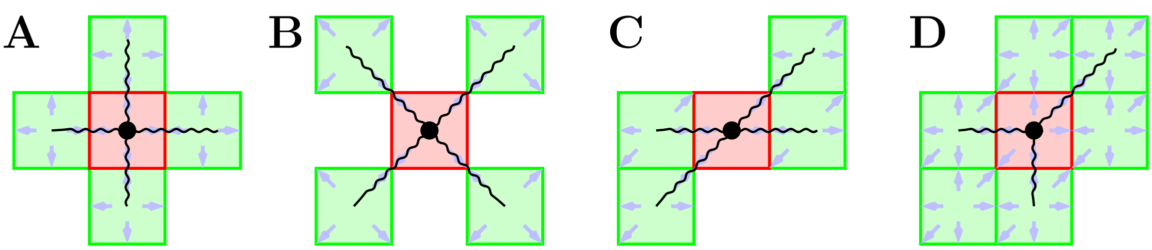


Рис. 4.9: Копия с $x \in \dot{K}_{\mathbf{i}}$ (красная) и возможные соседи (зелёные) в типах **A**, **B**, **C** и **D**

(2) Рассмотрим случай, когда $x \in K_{\mathbf{i}} \cap K_{\mathbf{j}}$ и x лежит внутри (не на конце) общего ребра квадратов $S_{\mathbf{i}}(P)$ и $S_{\mathbf{j}}(P)$. Он возможен только для типов **A**, **C** и **D6** (см. рисунок 4.10). В отличие от случая **(1)**, здесь $x \in S_{\mathbf{i}}(\partial K)$.

В этой ситуации l не превышает максимального числа соседей для пары копий, которые содержат x. Согласно Лемме 4.10, число соседей для $K_{\mathbf{i}} \cup K_{\mathbf{j}}$ не может превышать 4.

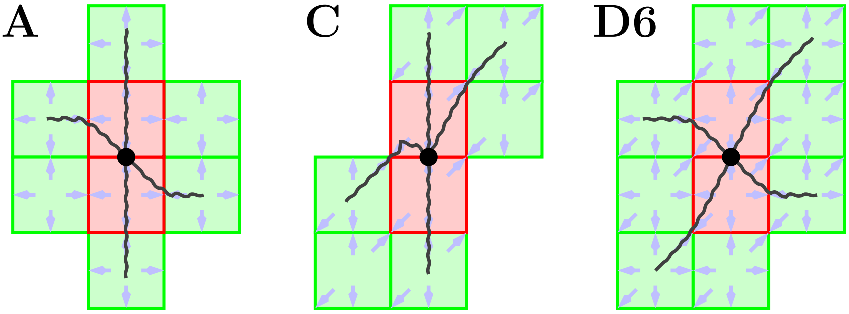


Рис. 4.10: Пара копий с x на общей стороне (красные) и их возможные соседи (зелёные) для типов **A**, **C** и **D6**

.

(3) Рассмотрим случай, в котором x является общей угловой точкой для двух или трех копий. Пусть x — вершина для $S_{\mathbf{i}}(P)$. Для типов **A**, **B**, **C** и **D6** точка x принадлежит не более чем двум копиям $K_{\mathbf{i}}, K_{\mathbf{j}}$, а в случае **D3** точка x может принадлежать не более чем трём копиям $K_{\mathbf{i}}, K_{\mathbf{j}}, K_{\mathbf{k}}$, как это показано на рисунке 4.11.

Согласно теореме 4.11, $Ord(x, K_{\mathbf{i}}) \leqslant 2$ для любой копии $K_{\mathbf{i}}$. Более того, для типов **B** и **D3** порядок угловой точки относительно копии равен 1. Тогда $Ord(x, K_{\mathbf{i}} \cup K_{\mathbf{j}}) \leqslant 2$ для типа **B** и $Ord(x, K_{\mathbf{i}} \cup K_{\mathbf{j}} \cup K_{\mathbf{k}}) \leqslant 3$ для типа **D3**. Следовательно, $Ord(x, K) \leqslant 3$ для типа **D3** и $Ord(x, K) \leqslant 2$ для типа **B**.

Число l не превышает максимального числа соседей для копий, содержащих x. Тогда для типов **A, C, D6**, согласно лемме 4.10, $Ord(x, K) \leqslant 4$. □

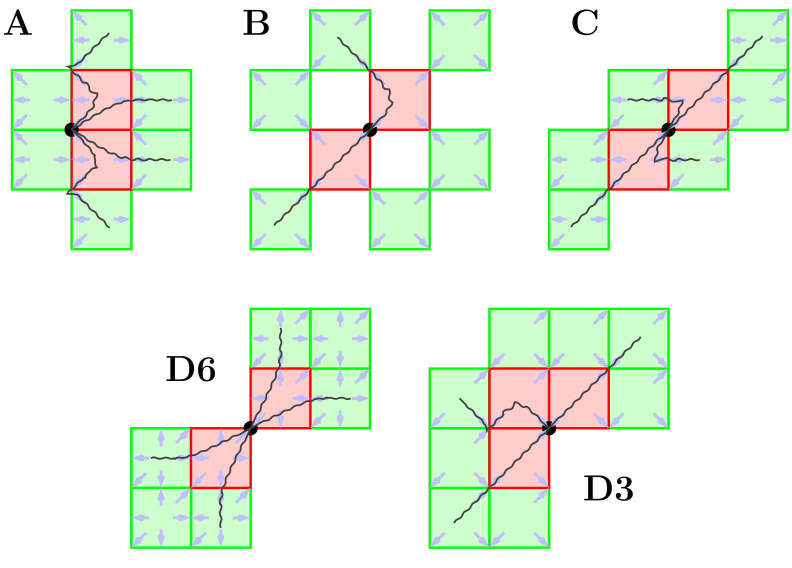


Рис. 4.11: Копии с общей угловой точкой x (красные) и их возможные соседи (зелёные) для типов **A, B, C, D6, D3**.

4.3 Теорема о классификации односвязных фрактальных квадратов

Для доказательства основной теореме нам потребуется следующее утверждение о порядках ветвления точек относительно главного дерева.

Предложение 4.14. *Допустим, K относится к типу* **D6** *и γ — его главное дерево.*
(i) $Ord(x, \gamma) \leqslant 2$ для любого $x \in \partial K$;
(ii) $Ord(x, \gamma) \leqslant 3$ для любого $x \in \gamma$.

Доказательство. (i). Для угловых точек в K неравенство $Ord(x, \gamma) \leqslant 2$ следует из предложения 4.12.

Пусть $x \in \partial K$ не является угловой. Из доказательства теоремы 4.13 следует, что порядок ветвления x относительно γ меньше или равен числу соседей у копии K_i. Как показано на рисунке 4.10, у любой копии K_i, отмеченной на этом рисунке красным цветом, может быть не более двух соседей, в противном случае возникают запретные комбинации. Таким образом, $Ord(x, \gamma) \leqslant Ord(x, K) \leqslant 2$.

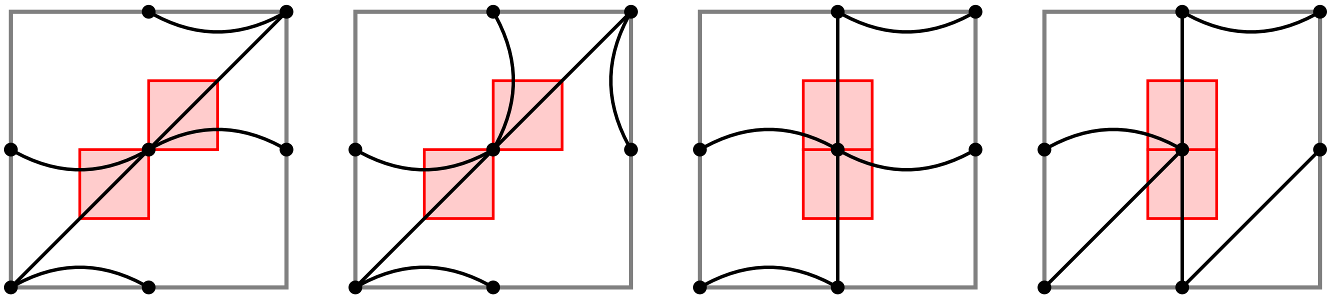
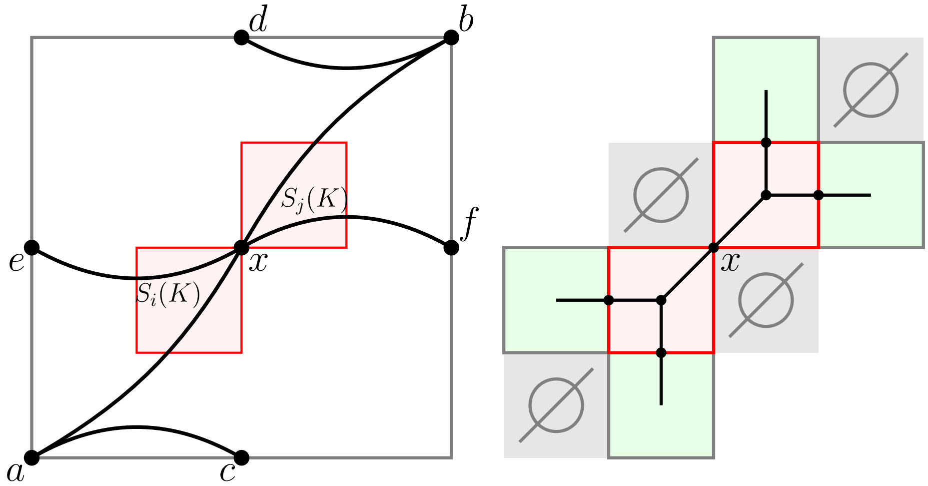


Рис. 4.12: Предполагаемые конфигурации главного дерева γ при допущении того, что $Ord(x, \gamma) = 4$ для типа **D6**. Точка x располагается в центре.

(ii) Пусть существует $x \in \gamma$ такое, что $Ord(x, \gamma) = 4$. Из теоремы 4.13 следует, что $x = S_i(K) \cap S_j(K)$ для некоторых $i, j \in I$.
Рассмотрим сначала случай, когда x является общей угловой точкой копий $S_i(K)$ и $S_j(K)$, так что $x = S_i(b) = S_j(a)$, где $a = (0, 0)$ и $b = (1, 1)$. Так же обозначим $F_{(0,-1)} = \{c\}$, $F_{(0,1)} = \{d\}$, $F_{(-1,0)} = \{e\}$, $F_{(1,0)} = \{f\}$.



Для точек a, b согласно теоремам 4.11 и 4.13 следует, что $Ord(a,\gamma) = Ord(b,\gamma) = 2$. Тогда множество $\gamma \setminus \{a, b\}$ состоит из трёх компонент. Обозначим замыкания этих компонент как γ_0, γ_a, γ_b так, чтобы $\gamma_0 \cap \gamma_a = \{a\}$ и $\gamma_0 \cap \gamma_b = \{b\}$. Компонента γ_0 содержит дугу $\gamma(a, b)$, которая делит P на две части. В одной из них находятся точки c и f, в другой — e и d, поэтому $x \in \gamma(a, b)$ и множество γ_0 содержит одну из пар точек: $\{c, d\}$, $\{c, f\}$, $\{e, f\}$ или $\{e, d\}$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma_0 \supset \{e, f\}$. Тогда $\gamma_a = \gamma(a, c)$ и $\gamma_b = \gamma(b, d)$.

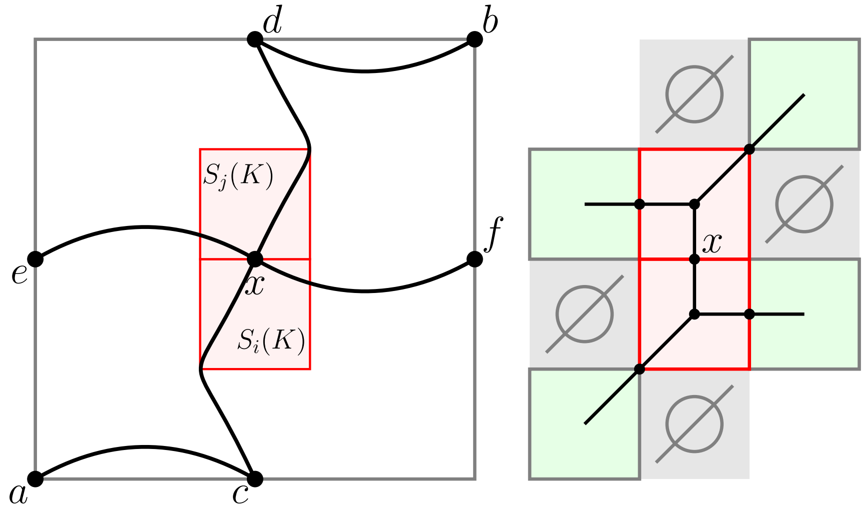
Следовательно множество γ_0 является объединением поддуг $\gamma(a, x)$, $\gamma(f, x)$, $\gamma(b, x)$ и $\gamma(e, x)$.

Эти четыре поддуги пересекают множество $S_i(\partial K) \cup S_j(\partial K)$ в четырёх различных точках $S_i(c)$, $S_i(e)$, $S_j(f)$, $S_j(d)$. Поэтому пересечение этих поддуг с $S_i(K) \cup S_j(K)$ должны быть различными поддугами $S_i(\gamma(c, b))$, $S_i(\gamma(e, b))$, $S_j(\gamma(f, a))$, $S_j(\gamma(d, a))$, внутренности которых лежат в разных компонентах множества $\gamma_0 \setminus \{x\}$. Это невозможно, так как $\gamma(a, f) \cap \gamma(a, d) = \gamma(a, x)$.

Рассмотрим теперь случай, когда x лежит на общей стороне двух копий $S_i(K)$ и $S_j(K)$. В этом случае $F_{(0,-1)} = \{c\}$, $F_{(0,1)} = \{d\}$, так что $x = S_i(d) = S_j(c)$. Обозначим $F_{(-1,-1)} = \{a\}$, $F_{(1,1)} = \{b\}$, $F_{(-1,0)} = \{e\}$, $F_{(1,0)} = \{f\}$.

Для точек c, d из теорем 4.11 и 4.13 следует, что $Ord(c,\gamma) = Ord(d,\gamma) = 2$.

Поэтому множество $\gamma \setminus \{c, d\}$ состоит из трёх компонент. Обозначим замыкания эти компонент как γ_0, γ_c, γ_d так, чтобы $\gamma_0 \cap \gamma_c = \{c\}$ и $\gamma_0 \cap \gamma_d = \{d\}$. Компонента γ_0 содержит дугу $\gamma(c, d)$, которая делит P на две части. Одна из этих частей содержит точки b и f, другая содержит e и a, следовательно $x \in \gamma(c, d)$, а множество γ_0 содержит одну из пар точек: $\{a, b\}$, $\{a, e\}$, $\{e, f\}$ или $\{b, f\}$.



Рассмотрим случай, когда $\gamma_0 \supset \{e, f\}$. Тогда $\gamma_c = \gamma(a, c)$ и $\gamma_d = \gamma(b, d)$.

Следовательно, множество γ_0 является объединением поддуг $\gamma(c, x)$, $\gamma(f, x)$, $\gamma(d, x)$ и $\gamma(e, x)$.

Эти четыре поддуги пересекают множество $S_i(\partial K) \cup S_j(\partial K)$ в четырёх различных точках: $S_i(e)$, $S_i(b)$, $S_j(f)$ и $S_j(a)$. Поэтому пересечения этих четырёх поддуг с $S_i(K) \cup S_j(K)$ должны быть различными поддугами $S_j(\gamma(c, b))$, $S_j(\gamma(c, e))$, $S_i(\gamma(a, d))$ и $S_j(\gamma(d, f))$, внутренности которых лежат в разных компонентах множества $\gamma_0 \setminus \{x\}$. Это невозможно, так как $\gamma(a, d) \cap \gamma(d, f) = \gamma(d, x)$. $\square$

Эта теорема и результаты предыдущего параграфа позволяют нам доказать следующий основной результат:

Теорема 4.15. *Для нетривиальных односвязных фрактальных квадратов существует только 7 топологических типов главного дерева, модели которых показаны ниже.*

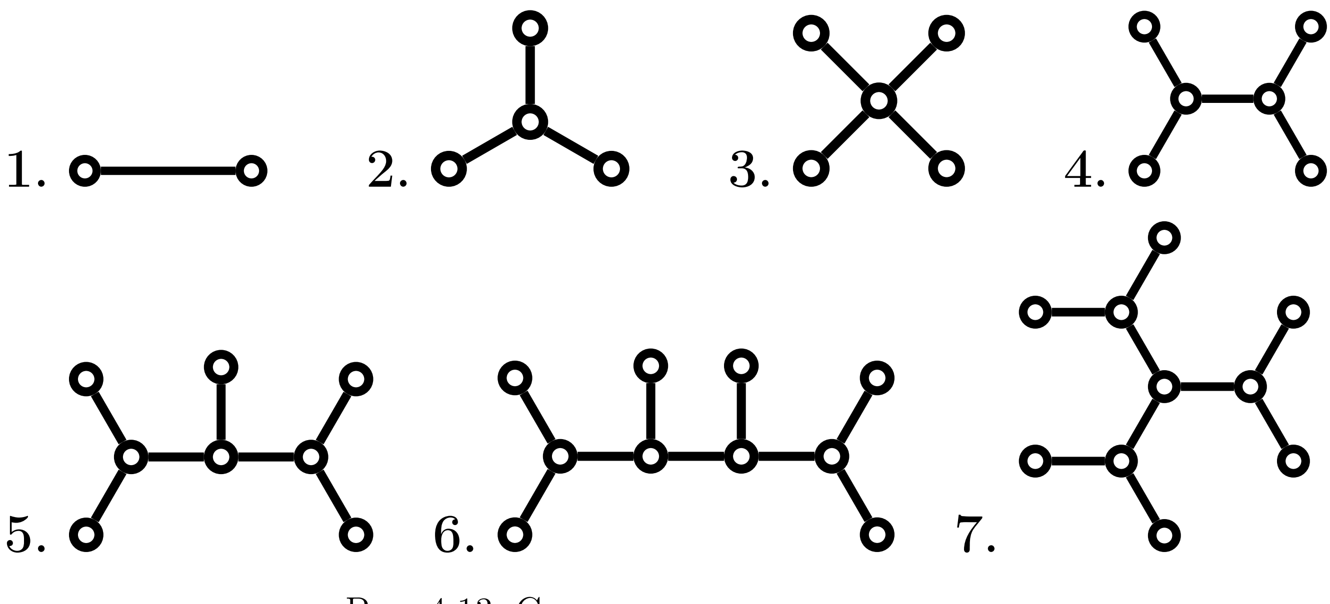


Рис. 4.13: Семь типов главного дерева

Доказательство. Пусть K — односвязный фрактальный квадрат с главным деревом γ. Все концы этого дерева лежат в ∂K.

Пусть K относится к типам **A** или **C**. Тогда, по теореме 4.9, главное дерево γ может содержать 2, 3 или 4 конца, что соответствует моделям 1, 2, 3 и 4 на рисунке 4.13.

Если K относится к типу **B**, то по теоремам 4.9 и 4.12 главное дерево имеет ровно четыре конца, что соответствует моделям 3 и 4.

Если K соответствует типу **D3**, то по теоремам 4.9 и 4.12 главное дерево γ имеет только 3 конца, что соответствует модели 2.

Если K относится к типу **D6**, то по теореме 4.9 и лемме 4.14 главное дерево γ может иметь от 2 до 6 концов, причём $Ord(x, \gamma) \leqslant 3$ для любого $x \in \gamma$, поэтому γ не может иметь форму, отличную от моделей 1, 2, 4, 5, 6 или 7 с Рисунка 4.13. □

Замечание 4.2. Если K относится к типу **D6**, то его главное дерево γ не может иметь форму, отличную от моделей 4, 5, 6 или 7 на рисунке 4.13. Невозможность моделей 1 и 2 главного дерева фрактальных квадратов типа **D6** обусловлена тем, что число концов дерева γ для типа **D6** не меньше 4. Однако для доказательства теоремы 4.15 это не требуется.

Таким образом, если классифицировать нетривиальные односвязные фрактальные квадраты по типу главного дерева, то мы получим 7 классов фрактальных квадратов. Такую классификацию мы можем называть *общей классификацией* или *классификацией по типу главного дерева.*

Если принять во внимание гипотезу о том, что во фрактальном квадрате типа **D6** число концов в его главном дереве γ не меньше 4, то мы можем рассмотреть *тонкую классификацию*, учитывающую следующие признаки:

1. тип главного дерева (1 из 7 типов);
2. тип самоподобной границы (**A**, **B**, **C**, **D3** или **D6**);
3. порядки ветвления точек самоподобной границы в главном дереве.

Примеры фрактальных квадратов из каждого класса тонкой классификации показаны на следующих рисунках. Всего получается 16 классов. Отдельно стоит сказать, что классы 3 (**2-A-1**) и 4 (**2-A-2**) с рисунка 4.15 имеют одинаковый тип дерева и одинаковый тип самоподобной границы, но отличаются порядком ветвления точек самоподобной границы относительно главного дерева: в **2-A-1** три конца и одна разбивающая точка, а в **2-A-2** три конца и одна точка ветвления порядка 3. Это единственные два класса, которые различаются только по третьему признаку.

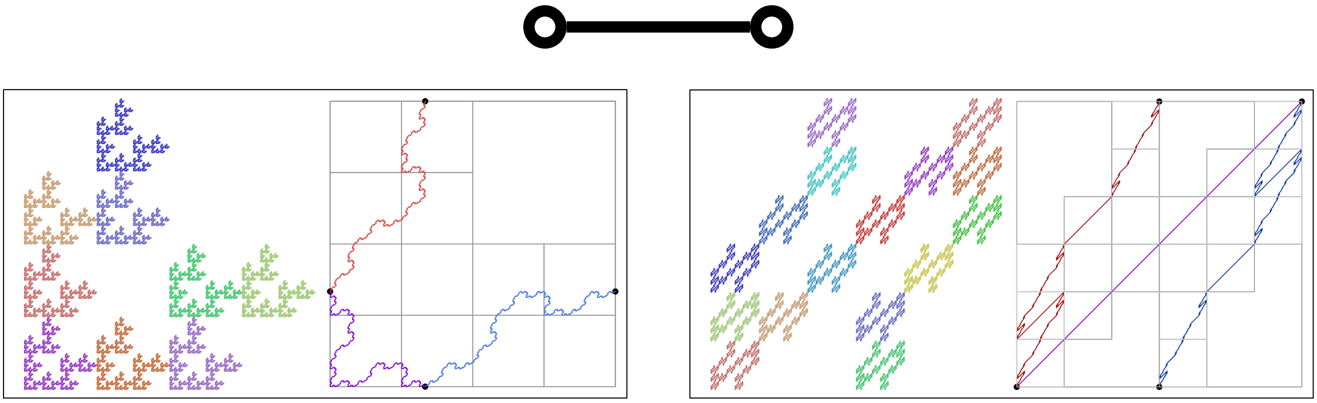


Рис. 4.14: Дерево 1. Классы 1 и 2 (обозначим как **1-A** и **1-C**).

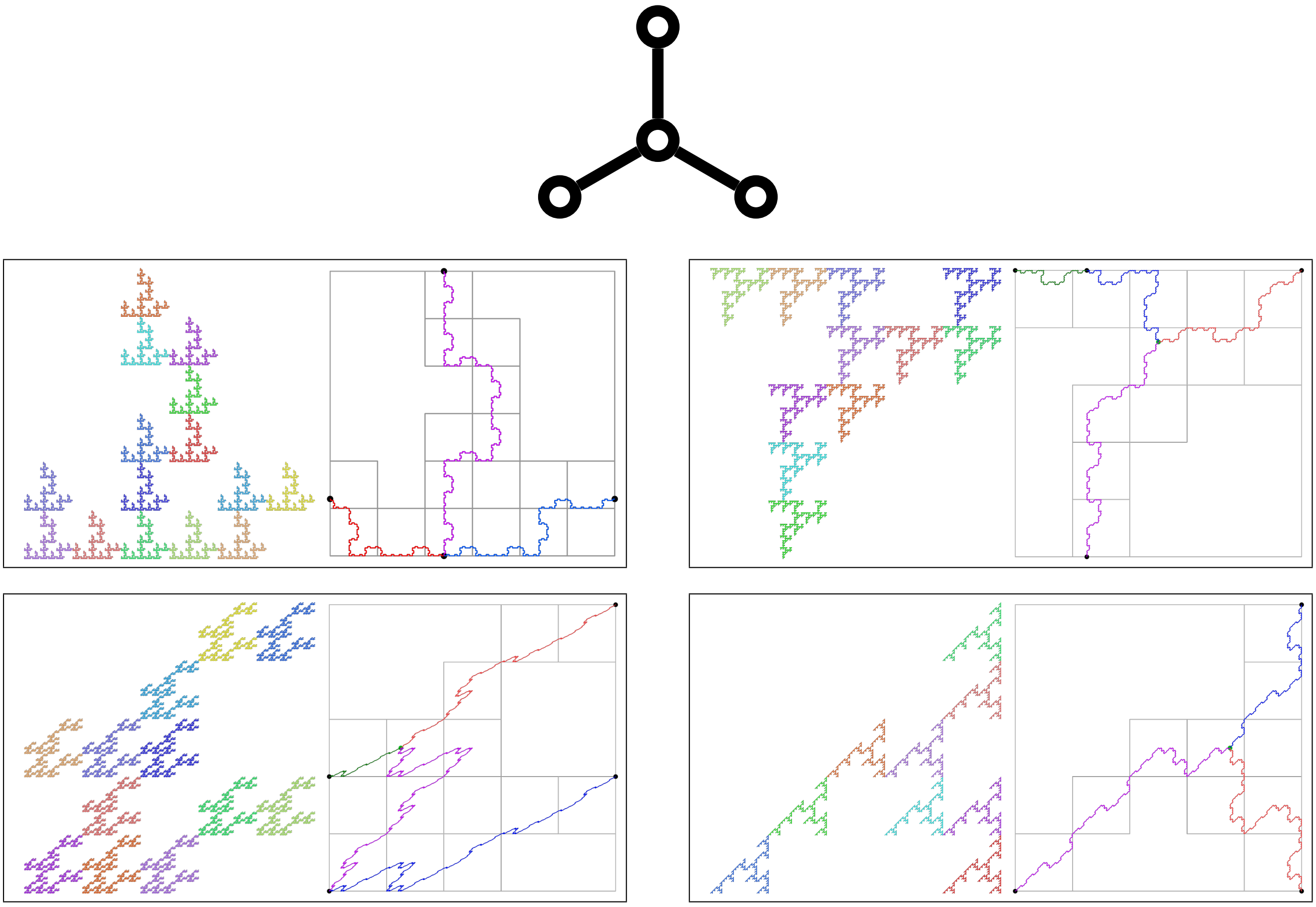


Рис. 4.15: Дерево 2. Классы 3 (**2-A-1**), 4 (**2-A-2**), 5 (**2-D6**) и 6 (**2-D3**)

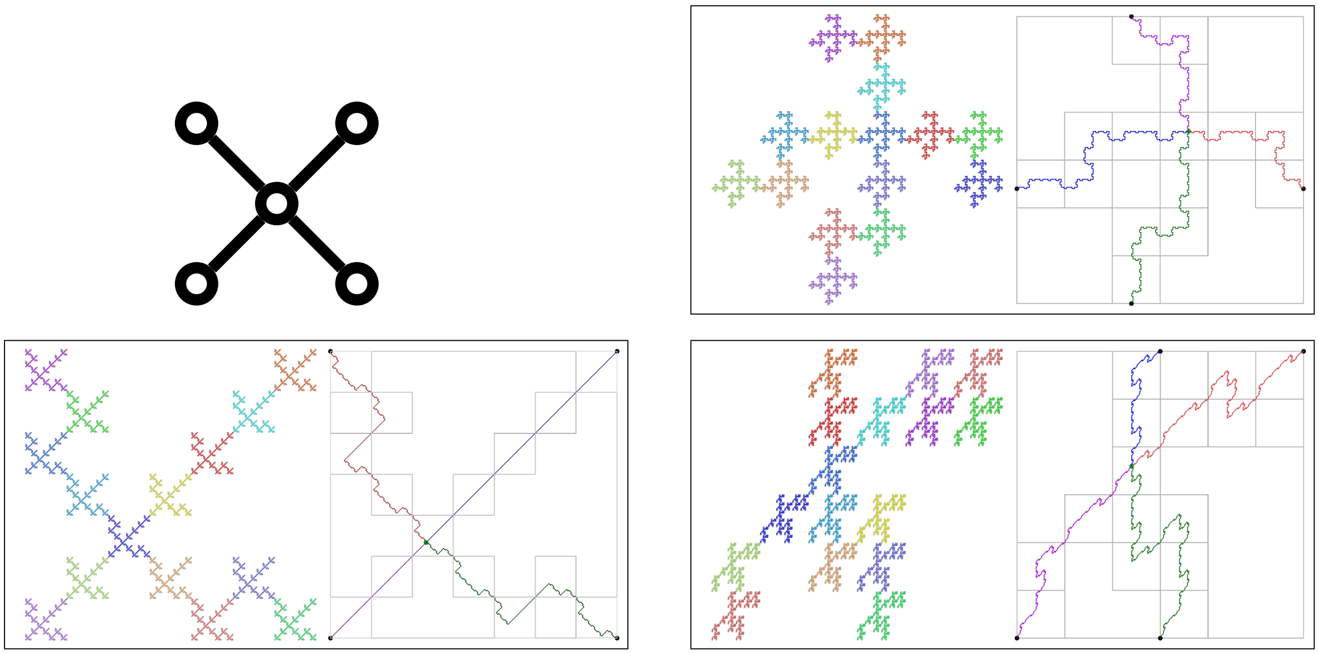


Рис. 4.16: Дерево 3. Класс 7 (**3-A**), 8 (**3-B**) и 9(**3-C**)

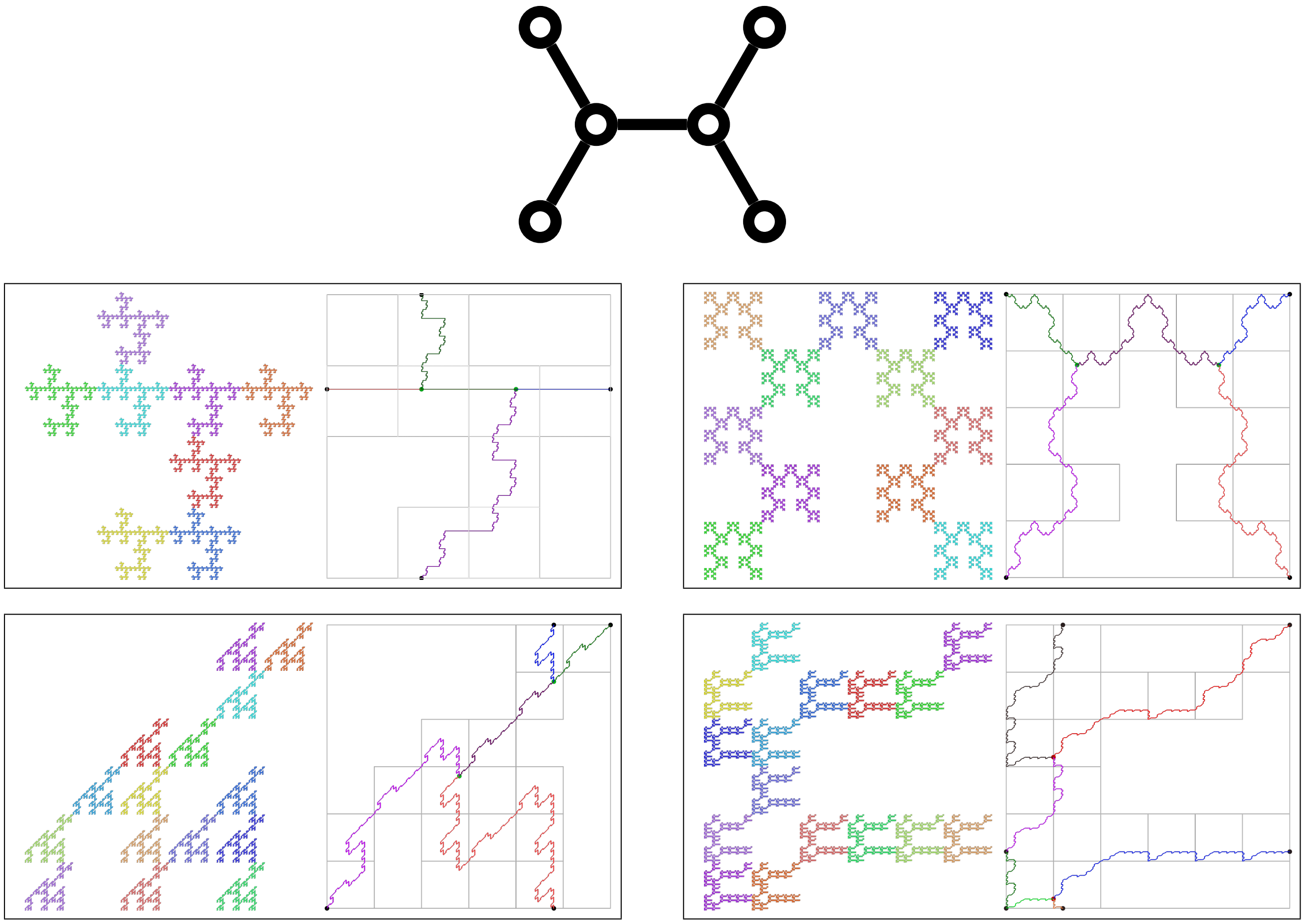


Рис. 4.17: Дерево 4. Классы 10 (**4-A**), 11 (**4-B**), 12 (**4-C**) и 13 (**4-D6**)

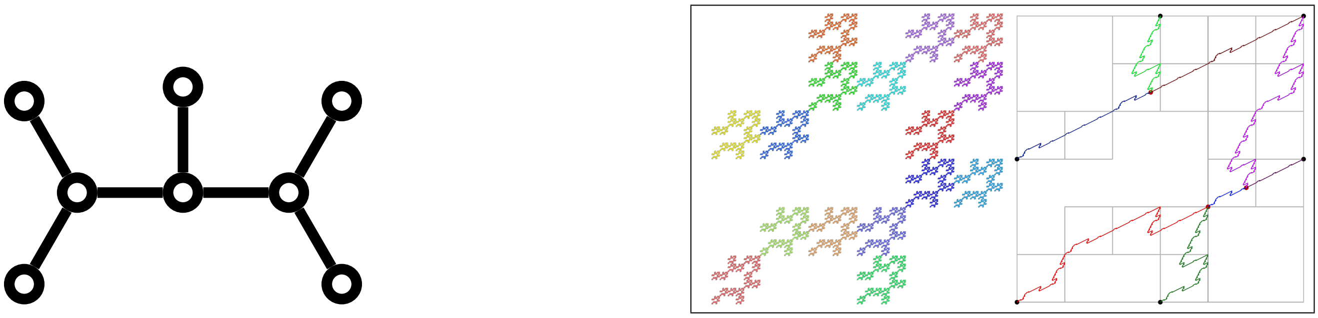


Рис. 4.18: Дерево 5. Класс 14 (**5-D6**)

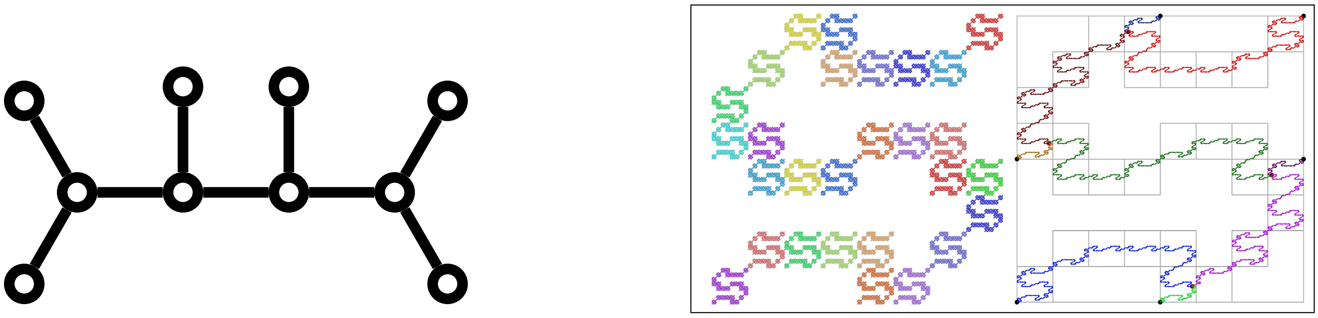


Рис. 4.19: Дерево 6. Класс 15 (**6-D6**)

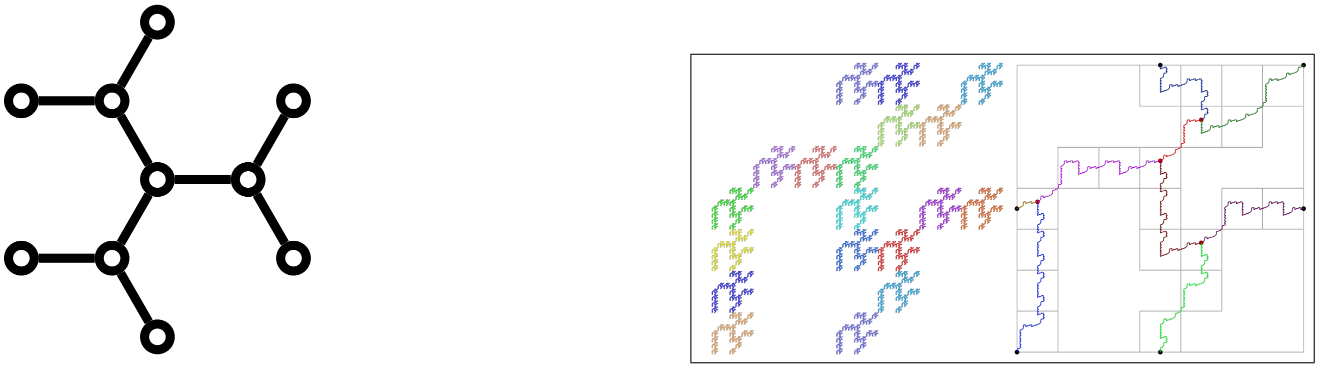


Рис. 4.20: Дерево 7. Класс 16 (**7-D6**)

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Найдено необходимое условие (условие совпадения параметров) того, что аттрактор обобщённой полигональной системы является дендритом (теорема 2.17).

2. Доказано, что при достаточно малом $\delta = \delta(\mathcal{S}) > 0$ аттрактор любой (удовлетворяющей условию совпадения параметров) δ-деформации $\mathcal{S}'$ полигональной системы $\mathcal{S}$ является дендритом, изоморфным аттрактору системы $\mathcal{S}$ (теорема 2.23).

3. Получена формула, выражающая пересечение фрактальных k-кубов K^1 и K^2 в терминах их множеств единиц D^1 и D^2. Получены условия, при которых такое пересечение будет пустым, конечным, счётным и несчётным. Для конечного пересечения получена оценка мощности.

4. Получен алгоритм, позволяющий проверить, является ли фрактальный k-куб дендритом с одноточечным пересечением.

5. Было доказано, что фрактальные квадраты, являющиеся дендритами, обладают свойством одноточечного пересечения (теорема 4.6), и поэтому фрактальный квадрат является дендритом тогда и только тогда, когда его двудольный граф пересечений является деревом (следствие 4.7).

6. Доказано, что у фрактальных квадратов, являющихся дендритами, всего семь возможных топологических типов главного дерева (теорема 4.15). Получена классификация фрактальные квадраты, являющиеся дендритами, по типу их главного дерева. В каждом классе найдены примеры фрактальных квадратов для всех типов самоподобной границы и построены их главных деревьев.

Все результаты работы, полученные в диссертации, являются новыми.

Благодарности. Я выражаю благодарность и большую признательность своему научному руководителю Тетенову А. В. за неизменную поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Я благодарен Мехонцеву Д. Ю. за консультации по работе в IFStile, а также Медных А. Д. и Асееву

В. В. за их поддержку и советы.

Дальнейшие перспективы исследования. Можно выделить несколько направлений для дальнейших исследований и обозначить задачи, решение которых будет развивать результаты диссертации.

1. Рассмотреть возможность деформаций полиэдральных систем (многомерный аналог полигональных систем) и обозначить возникающие при этом трудности.

2. Рассмотреть свойства размерности и меры пересечений фрактальных k-кубов и их граней.

3. Продолжить результаты для фрактальных k-кубов на самоаффинные губки Серпинского.

4. Рассмотреть аналог фрактальных квадратов, задаваемый с помощью треугольника или самоподобного тайла.

5. Доказать гипотезу о том, что во фрактальном квадрате типа **D6** число концов в его главном дереве γ не меньше 4. Это позволит доказать корректность тонкой классификации, о которой говорилось в конце четвёртой главы.

6. На основе имеющихся результатов написать программу, определяющую для фрактального k-куба систему уравнений Σ и сортирующая большие списки фрактальных квадратов по типу главного дерева.

Литература

[1] **Allabergenova K., Samuel M., Tetenov A.**, Intersections of the pieces of self-similar dendrites in the plane // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. T. 182. C. 114805. 6

[2] **Bandt C., Graf S.**, Self-Similar Sets 7. A Characterization of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure // Proceedings of the American Mathematical Society. 1992. T. 114. № 4. C. 995–1001. 6

[3] **Bandt C., Keller K.**, Self-Similar Sets 2. A Simple Approach to the Topological Structure of Fractals // Mathematische Nachrichten. 1991. T. 154. № 1. C. 27–39. 7, 8

[4] **Bandt C. , Rao H.**, Topology and separation of self-similar fractals in the plane // Nonlinearity. 2007. T. 20. № 6. C. 1463–1474. 28

[5] **Bandt C., Stahnke J.**, Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals // preprint, 1990 7

[6] **Barnsley M.F., Hutchinson J.E., Stenflo Ö.**, V-variable fractals: Fractals with partial self similarity // Advances in Mathematics. 2008. T. 218. № 6. C. 2051–2088.

[7] **Bedford T.**, Crinkly curves, Markov partitions and dimension: Phd Thesis / University of Warwick, 1984. 9

[8] **Bonk M., Merenkov S.**, Quasisymmetric rigidity of square Sierpiński carpets // Annals of Mathematics. 2013. T. 177. № 2. C. 591–643.

[9] **Cesaro E.**, Remarques sur la courbe de von Koch // Atti della R. Accad. della Scienze fisiche e matem. Napoli. 1905. T. 12. № 15. C. 1–12. 5

[10] **Charatonik J. J., Charatonik W. J.**, Dendrites // Aportaciones Mat. Comun. 1998. T. 22. C. 227–253. 7, 12, 22, 23

[11] **Cristea L. L., Steinsky B.**, Curves of infinite length in 4×4-labyrinth fractals // Geometriae Dedicata. 2008. T. 141. № 1. C. 1–17. 9

[12] **Cristea L. L., Steinsky B.**, Curves of infinite length in labyrinth fractals // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2011. T. 54. № 2. C. 329–344. 9

[13] **Cristea L. L., Steinsky B.**, Mixed labyrinth fractals // Topology and its Applications. 2017. T. 229. C. 112–125. 9

[14] **Elekes M., Keleti T., Máthé A.**, Self-similar and self-affine sets: measure of the intersection of two copies // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2009. T. 30. № 2. C. 399–440. 9

[15] **Falconer K. J.**, Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. — 3rd ed. — New York: J. Wiley and Sons., 2014. — 398 p. 4, 20

[16] **Fraser J. M.**, Fractal Geometry of Bedford-McMullen Carpets // Thermodynamic Formalism / под ред. M. Pollicott, S. Vaienti. : Springer International Publishing, 2021. C. 495–516. 9

[17] **Hata M.**, On the structure of self-similar sets // Japan Journal of Applied Mathematics. 1985. T. 2. № 2. C. 381–414. 7, 8, 20

[18] **Hutchinson J.**, Fractals and Self-Similarity // Indiana University Mathematics Journal. 1981. T. 30. № 5. C. 713–747. 5, 6, 11, 18, 20

[19] **Jana A., García R. E.**, Lithium dendrite growth mechanisms in liquid electrolytes // Nano Energy. 2017. T. 41. C. 552–565. 10

[20] **Kamalutdinov K. G., Tetenov A. V.**, Twofold Cantor sets in $\mathbb{R}$ // Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. 2018. T. 15. C. 801–814. 41

[21] **Kenyon R., Peres Y.**, Measures of full dimension on affine-invariant sets // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1996. T. 16. № 2. C. 307–323. 9

[22] **Kigami J.**, Analysis on fractals / Cambridge Tracts in Mathematics 143 : Cambridge University Press. 2001. 251 C. 21

[23] **Kigami J.**, Harmonic Calculus on Limits of Networks and Its Application to Dendrites // Journal of Functional Analysis. 1995. T. 128. № 1. C. 48–86. 7

[24] **H. von Koch**, Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire // Archiv for Matemat., Astron. och Fys., 1904, T. 1, C. 681–702. 5

[25] **Kuratowski, K.**, Topology : vol. 1 / K. Kuratowski. — Academic Press. 1966. — 580 p. 7, 12, 22

[26] **Kuratowski, K.**, Topology : vol. 2 / K. Kuratowski. — Academic Press. 1968. — 608 p. 7, 22

[27] **Lau K.-S., Luo J. J., Rao H.**, Topological structure of fractal squares // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2013. T. 155. № 1. C. 73–86. 9, 14, 45

[28] **Lévy, P.**, Les courbes planes ou gauches et les surface composées de parties semblables au tout // J. I'Ecole Poly. 1939. T. 144. C. 227–292. 5

[29] **Luo J.J., Liu J.-C.**, On the classification of fractal squares // Fractals. 2016. T. 24. № 01. Art. № 1650008.

[30] **Mandelbrot B.**, Les objets fractals: forme hasard et dimension // Paris. Flammarion. 1975. 4

[31] **Mauldin R. D., Williams S. C.**, Hausdorff dimension in graph directed constructions // Transactions of the American Mathematical Society. 1988. T. 309. № 2. C. 811–829. 5

[32] **McMullen C.**, The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets // Nagoya Mathematical Journal. 1984. T. 96. C. 1–9. 9

[33] **McWorter Jr. W. A., Tazelaar J. M.**, Creating fractals // Byte. 1987. T. 12. № 9. C. 123–132. 7

[34] **Mekhontsev D.**, IFStile (2016-2024) / D. Mekhontsev // [Программное обеспечение] : URL:https://ifstile.com/

[35] **Moran M.**, Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets // Monatshefte für Mathematik. 1996. T. 122. № 4. C. 387–399. 5

[36] **Moran P. A. P.**, Additive functions of intervals and Hausdorff measure // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1946. T. 42. № 1. C. 15–23. 6

[37] **Olsen L.**, Self-affine multifractal Sierpinski sponges in $\mathbb{R}^d$ // Pacific Journal of Mathematics. 1998. T. 183. № 1. C. 143–199. 14, 45

[38] **Peres Y.**, The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1994. T. 116. № 3. C. 513–526. 9

[39] **Potapov A., Potapov V.**, Fractal radioelement's, devices and systems for radar and future telecommunications: Antennas, capacitor, memristor, smart 2d frequency-selective surfaces, labyrinths and other fractal metamaterials // Journal of International Scientific Publications: Materials, Methods & Technologies. 2017. T. 11. C. 492–512. 10

[40] **Ruan H.J., Wang Y.**, Topological invariants and Lipschitz equivalence of fractal squares // J. Math. Anal. Appl. 2017. Т. 451. С. 327–344.

[41] **Samuel M., Tetenov A. V., Vaulin D. A.**, Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Т. 14. С. 737–751. 7, 8, 24, 31

[42] **Schief A.**, Separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Т. 112. №. 1. С. 111–115. 6

[43] **Strichartz R.**, Analysis on fractals // Notices AMS. 1999. Т. 46. № 10. С. 1199–1208. 7

[44] **Strichartz R.**, Isoperimetric Estimates on Sierpinski Gasket Type Fractals // Transactions of the American Mathematical Society. 1999. Т. 351. № 5. С. 1705–1752. 7

[45] **Tetenov A.**, Finiteness properties for self-similar continua // arXiv:2003.04202v2 [math.MG]. 2021. 8, 24, 28, 34

[46] **Xiao J.-C.**, Fractal squares with finitely many connected components // Nonlinearity. 2021. Т. 34. № 4. С. 1817–1836. 9

[47] **Zerner M. P. W.**, Weak separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – vol. 124, no. 11. – pp. 3529–3539. 6

[48] **Асеев В. В.** О самоподобных жордановых кривых на плоскости / В. В. Асеев, А. В Тетенов., А. С. Кравченко // Сиб. мат. журн., 2003, Т. 44, № 3, С. 481 – 492. 30, 37, 38

[49] **Асеев В. В.**, О жордановых самоподобных дугах, допускающих структурную параметризацию / В. В. Асеев, А. В. Тетенов // Сиб. матем. журн. (2005), том 46, № 4, С. 733 – 748.

[50] **Зайцева Т. И., Протасов В. Ю.**, Самоподобные 2-аттракторы и тайлы // Математический сборник. 2022. Т. 213. № 6. С. 71–110.

[51] **Потапов А. А.**, Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Университетская книга, 2005. — 848 с. 10

[52] **Потапов А.А., Кузнецов В.А.**, Способ комплексирования многочастотных радиолокационных изображений на основе фрактального подхода. — В книге: Радиолокация. Теория и практика / Под ред. А.Б. Бляхмана. — Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2023. — С. 108–115. 10

[53] **Потапов А.А.**, Расширение исследований по дальнейшей разработке и совершенствованию высокоэффективных текстурно-фрактальных методов для радаров с синтезированной апертурой // Сб. тр. VII междунар. науч.-техн. форума “Современные технологии в науке и образовании - СТНО-2024”: В 10-и тт. / Под общ. ред. О. В. Миловзорова. — Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2024. Т. 1. С. 6–25. 10

[54] **Тетенов А. В.**, О дендритах, заданных системами полиэдров и их точках ветвления / А. В. Тетенов, М. Самуэль, Д. А. Ваулин // Труды ИММ УРО РАН, 2017, т.23, № 4, С. 281 – 291. 7, 8, 25

[55] **Тетенов А. В.**, Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий / А. В. Тетенов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5, С. 1147 -– 1159.

[56] **Тетенов А. В.**, Структурные теоремы в теории самоподобных фракталов : диссертация на соискание уч. степени доктора физико-математических наук / А.В. Тетенов – Горно-Алтайск, 2010. – 216 с.

Работы автора по теме диссертации

[57] **Drozdov D., Samuel M., Tetenov A.**, On deformation of polygonal dendrites preserving the intersection graph // The Art of Discrete and Applied Mathematics. 2021. Т. 4. № 2. С. 1–21. 10

[58] **Drozdov D., Samuel M., Tetenov A.**, On δ-deformations of Polygonal Dendrites // Topological Dynamics and Topological Data Analysis. : Springer Singapore, 2021. С. 147–164. 10

[59] **Drozdov D. A., Tetenov A. V.**, On the dendrite property of fractal cubes // Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application. 2024. Т. 8. № 1. С. 73–80. 10

[60] **Drozdov D., Tetenov A.**, On fractal squares possessing finite intersection property // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2022. Т. 5. № 3. С. 164–181. 10

[61] **Drozdov D., Tetenov A.**, On the classification of fractal square dendrites // Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application. 2023. Т. 7. № 3. С. 19–96. 10

[62] **Ваулин Д. А., Дроздов Д. А., Тетенов А. В.**, О связных компонентах фрактальных кубов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 98–107. 10