На правах рукописи

Бойко Ксения Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», на кафедре математического анализа.

Научный руководитель:
Федоров Владимир Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:
Ситник Сергей Михайлович,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
Фалалеев Михаил Валентинович,
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений
Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Защита диссертации состоится **«13» декабря 2024 года** в **16:30** на заседании диссертационного совета **24.1.074.03** при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН https://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «12» ноября 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.074.03,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Дробное интегро-дифференциальное исчисление предоставляет эффективные инструменты для исследования прикладных математических задач в различных областях науки, таких как физика, математическая биология, теория финансовых рынков и многих других. В научной литературе в последние десятилетия появилось большое количество математических моделей различных реальных процессов, описываемых уравнениями с дробными производными и дробными интегралами (см. работы R. Hilfer, А. М. Нахушева, В. В. Учайкина, K. Nishimoto, В. Е. Тарасова). В то же время такие уравнения представляют интерес для теории дифференциальных уравнений и поэтому являются объектами теоретических исследований многих авторов (см. монографии K. B. Oldham, J. Spanier, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, K. S. Miller, B. Ross, А. В. Псху, K. Diethelm и библиографии к ним).

Степень разработанности темы исследования. В XVII веке Д. Валлис, Г. В. Лейбниц, Г. Ф. Лопиталь, Я. Бернулли, в XVIII веке Ж. Л. Лагранж и Л. Эйлер, в XIX и начале XX века П.-С. Лаплас, Ж.-Б. Ж. Фурье, Н. Х. Абель, Ж. Лиувилль, Г. Ф. Б. Риман, В. Грюнвальд, А. В. Летников, О. Хэвисайд, А. Зигмунд, Р. Курант и др. в своих работах заложили фундамент теории дробного интегро-дифференциального исчисления. Во второй половине XX века исследования в области дробного исчисления велись во всех направлениях, от математического анализа, до прикладных задач. Например, в середине и во второй половине XX века теория дробных производных стала активно использоваться в механике сплошных сред, в частности, в работах А. Н. Герасимова, М. Капуто. В XXI веке лишь возрос интерес к такой тематике, появляются новые виды дробных производных и интегралов.

Среди современных работ отметим работы следующих авторов, посвященные этой тематике: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, А. М. Нахушев, А. В. Псху, K. Diethelm, М. О. Мамчуев, С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. Р. К. Газизовым, А. А. Касаткиным, С. Ю. Лукащуком развиваются методы группового анализа для уравнений с дробными производными.

Задачи для различных классов уравнений с несколькими дробными производными (multi-term fractional equations) исследовались многими авторами, в частности изучались начально-краевые задачи для телеграфных (H. Jiang), диффузионных уравнений такого вида (F. Liu, E. Alvarez-Pardo), импульсных уравнений (V. Singh, D. N. Pandey). Различные уравнения в локально выпуклых (в частности, в банаховых) пространствах с приложениями к уравнениям в частных производных исследовались в работах E. G. Bazhlekova, M. Kostić, A. Karczewska, C. Lizama, H. Prado. Уравнения в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля исследовались в работах В. Е. Федорова и М. М. Турова.

В теории дифференциальных уравнений отдельный класс составляют уравнения и системы уравнений соболевского типа, особые свойства которых обусловлены неразрешенностью относительно старшей производной. При наличии вырожденного оператора при старшей производной в таком уравнении будем называть его также вырожденным эволюционным уравнением. Различные классы уравнений соболевского типа изучались в работах А. Пуанкаре, C. W. Oseen, J. Leray, E. Hopf, С. Л. Соболева и его учеников и последователей. Переходя к настоящему времени, отметим в этом направлении работы

R. E. Showalter, Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. А. Щегловой, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера, И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина.

Отметим, что один из подходов к исследованию вырожденных эволюционных уравнений первого порядка в банаховых пространствах основан на применении методов теории полугрупп операторов. Он используется в работах A. Favini, A. Yagi, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой и А. Филинкова, В. Е. Федорова.

Методы теории разрешающих полугрупп операторов дифференциальных уравнений распространены в монографии J. Prüss на эволюционные интегральные уравнения. Получаемые при этом разрешающие семейства операторов интегрального уравнения уже не обладают полугрупповым свойством, но по-прежнему позволяют исследовать многие качественные свойства решений уравнения. В работах Э. Г. Бажлековой аналогичным образом исследованы уравнения, разрешенные относительно дробной производной Герасимова — Капуто, и их разрешающие семейства операторов. Отметим также близкие к этому направлению работы А. В. Глушака и его соавторов о дробных дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах, работы М. Костича с соавторами, в которых исследуются различные общие классы разрешающих семейств операторов для интегро-дифференциальных эволюционных уравнений в локально выпуклых пространствах, включая эволюционные уравнения с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто, в том числе вырожденные, и работы некоторых других авторов (см. H. Jiang, W. Ma, L. Sun, B. Ahmad, N. Alghamdi, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas и др.).

В работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников методы теории разрешающих семейств операторов были распространены на различные уравнения в банаховых пространствах с дробными производными Герасимова — Капуто, Римана — Лиувилля, Джрбашяна — Нерсесяна, с распределенными дробными производными. При этом исследованы различные классы уравнений, как разрешенных относительно старшей дробной производной, так и вырожденных. Абстрактные результаты используются при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных. Данная диссертационная работа лежит в русле этого направления.

Обратные коэффициентные задачи для различных уравнений с дробными производными стали предметом исследования в последние полтора десятилетия — см. работы А. В. Глушака, В. Е. Федорова с соавторами, Д. Г. Орловского, А. Б. Костина, С. И. Пискарева, Р. Р. Ашурова с соавторами и др.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения начальных и начально-краевых задач для новых классов дифференциальных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто.

Задачами диссертации является получение условий существования единственного классического решения задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений, разрешенных относительно старшей производной Герасимова — Капуто, в случаях ограниченных и неограниченных линейных операторов в уравнении, а также некоторых модификаций задачи Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова — Капуто в предположении, что пара линейных операторов в уравнении при старших дробных производных спектрально ограничена или секториальна.

Полученные результаты должны содержать условия, которые относительно просто проверяются в приложениях и могут быть использованы для исследования вопросов однозначной разрешимости новых начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени.

Научная новизна. Получены условия существования и единственности решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных, а также для квазилинейных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто в линейной части, разрешенных относительно старшей из них. В случае неограниченных операторов в уравнении введено понятие разрешающего семейства операторов такого уравнения и получены необходимые и достаточные условия существования аналитического в секторе разрешающего семейства в терминах резольвенты пучка операторов. Соответствующие наборы операторов для удобства называются секториальными. Найдены представления разрешающих семейств операторов в виде интегралов Данфорда — Тейлора в случае ограниченных операторов в уравнении или при условии секториального набора операторов. Полученный аналог формулы Дюамеля для линейного неоднородного уравнения использован для исследования локальной и нелокальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения с соответствующей линейной частью.

Вырожденные уравнения рассматриваются при условии спектральной ограниченности или секториальности пары операторов при двух старших производных в уравнении. Известные для таких пар операторов результаты о существовании пар инвариантных подпространств использованы для редукции исходного вырожденного уравнения к паре уравнений, разрешенных относительно старшей производной и заданных на взаимно дополнительных подпространствах. При этом использованы новые, весьма общие условия согласования остальных операторов в уравнении с операторами при старших производных, выполняющиеся, как показано, в задачах для систем уравнений динамики вязкоупругих жидкостей.

Полученные для начальных задач результаты позволили исследовать новые классы линейных обратных задач с не зависящим от времени неизвестным параметром как для разрешенных относительно старшей производной уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто, так и для вырожденных уравнений аналогичного вида.

Абстрактные результаты позволили исследовать однозначную разрешимость новых классов начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора по пространственным переменным, включающего в себя некоторые уравнения теории фильтрации, для систем уравнений теории вязкоупругости с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени, начальные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующего вида.

Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа посвящена развитию методов качественного исследования математических моделей, использующих конструкции дробного интегро-дифференциального исчисления. Такие модели широко применяются для описания процессов и явлений, характеризуемых степенной нелокальностью, степенной памятью, фрактальностью. В диссертации получены условия существования единственного решения начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений с дробными производными по времени, моделирующих такие процессы.

Полученные результаты помимо значимости для теории дифференциальных уравнений вносят вклад в развитие теории операторов, поскольку обобщают ряд результатов теории аналитических полугрупп операторов на случай уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто.

Результаты данной работы также практически значимы, поскольку могут быть использованы при решении конкретных прикладных задач. В частности, они позволяют осуществить корректную постановку таких задач для проведения их исследования.

Методология и методы исследования. При проведении исследований в данной диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. В частности, при рассмотрении дробных линейных дифференциальных уравнений используются методы теории преобразования Лапласа, методы теории полугрупп операторов, адаптированные к теории разрешающих семейств операторов уравнений дробного порядка. Квазилинейные уравнения изучаются с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. При исследовании вырожденных эволюционных уравнений использовано существование пар инвариантных подпространств для пары операторов при старших производных, это позволяет редуцировать исходную задачу типа Шоуолтера — Сидорова к паре задач Коши на взаимно дополняющих друг друга подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. Начально-краевые задачи исследуются путем их редукции к начальным задачам для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Положения, выносимые на защиту.

1. Исследована однозначная разрешимость задачи Коши для линейных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, в случае линейных ограниченных операторов при дробных производных и интегралах в уравнении. Получено представление решения. Найдены условия локального и глобального существования единственного решения задачи Коши для соответствующих квазилинейных уравнений.
2. Найдены необходимые и достаточные условия существования аналитических в секторе разрешающих семейств операторов линейных однородных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто, в случае линейных замкнутых операторов при дробных производных и интегралах в уравнении. Получено представление разрешающих семейств операторов. Исследована однозначная разрешимость задачи Коши для линейных неоднородных уравнений соответствующего класса, решение представлено в терминах разрешающих операторов. Найдены условия локального и глобального существования единственного решения задачи Коши для квазилинейных уравнений с соответствующей линейной частью.
3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости начальных задач для вырожденных линейных и квазилинейных уравнений со спектрально ограниченной парой операторов при двух старших производных Герасимова — Капуто.
4. Получены условия существования единственного решения начальных за-

дач для вырожденных линейных уравнений в случае секториальности пары операторов при двух старших производных Герасимова — Капуто.

5. Абстрактные результаты использованы при изучении начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, начально-краевых задач для некоторых классов уравнений с многочленами от эллиптического оператора при производных Герасимова — Капуто по времени, для некоторых дробных по времени систем уравнений динамики и термоконвекции вязкоупругих сред.

Степень достоверности и апробация результатов. Строгость применяемых математических методов исследования, корректность использования математического аппарата в данной диссертации свидетельствуют о достоверности полученных результатов.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022, 2023, 2024; 3-я и 4-я Международные конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения», Иркутск, 2021 и 2022; VI и VII Международные конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021 и 2023; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2022; The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Москва, 2022; Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа, 2022, 2023; Международная научная конференция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ и связанные темы», Курск, 2022; Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 2022; International Online Conference “One-Parameter Semigroups of Operators”, Нижний Новгород, 2023; X Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, 2023; Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 2023; Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», Уфа, 2024; Летние чтения (воркшоп) «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Самара, 2024.

Публикации. Список публикаций автора включает 25 публикаций [1–25], из которых 6 опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или приравненных к ним, поскольку входят в издания, индексируемые международными реферативными базами данных и системами цитирования Web of Science и/или Scopus [1–6].

В статье [1] В. Е. Федорову принадлежит идея доказательства леммы 1, пример 2 получен Т. Д. Фуонгом. В работе [2] научному руководителю В. Е. Федорову принадлежит идея использования теоремы 1 для доказательства леммы 1 и сама схема доказательства. В. Е. Федоров в статье [3] предложил постановку начально-краевой задачи для системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде, скорректировал некоторые рассуждения. Научный руководитель В. Е. Федоров предложил схему доказательства полноты нового функционального пространства, используемого для изучения квазилинейного уравнения в работе [4]. Примеры из [5] были рассмотрены В. Е. Федоровым. В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично ее автору.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа на 133 страницах содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений и список литературы из 147 наименований.

Основное содержание диссертационной работы

Введение содержит описание актуальности темы исследования, степени ее разработанности, целей и задач работы, научной новизны полученных результатов, теоретической и практической значимости работы, методологии и методов исследования, выносимых на защиту положений, степени достоверности и апробации результатов, структуры диссертации и ее краткое содержание.

В первом параграфе **первой главы** введены необходимые определения дробного интеграла Римана — Лиувилля $J_t^\beta g(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(s)ds$ и дробной производной Герасимова — Капуто $D_t^\alpha g(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{g^{(k)}(0)t^k}{\Gamma(k+1)} \right)$. Во втором параграфе исследуются вопросы однозначной разрешимости в смысле классических решений задачи Коши для линейного однородного уравнения

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z(t), \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

операторы A_k ограничены в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, при $k = 1, 2, \ldots, n$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{Z}$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$ (отрицательным α_k соответствуют дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка $-\alpha_k$, если $\alpha_k = 0$, то, по определению, $J_t^0 g(t) := g(t)$). Здесь и далее $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Для $l = 0, 1, \ldots, m-1$ обозначим $n_l := \min\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : l \leq m_k - 1\}$. Если множество $\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : l \leq m_k - 1\}$ пусто при некоторых $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, то $n_l := n + 1$.

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $z \in AC^m(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $A_k D_t^{\alpha_k} z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $k = 1, \ldots, n$, и выполняются равенства (2) при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ и условия (1).

Во втором параграфе первой главы методами теории преобразования Лапласа получено решение задачи Коши для однородного уравнения. Обозначим $A := \max\left\{\frac{1}{2n}, \|A_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$, $r_0 := (2An)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}}$, $\gamma := \{r_0 e^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\} \cup \{re^{i\pi}, r \in [r_0, \infty)\} \cup \{re^{-i\pi}, r \in [r_0, \infty)\}$, $R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1}$, $Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) e^{\lambda t} d\lambda$, $t > 0$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $Y_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^\beta R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda$, $t > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда функция* $z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l$ *является единственным решением задачи* (1) *для уравнения* (2).

В третьем параграфе получены условия разрешимости задачи Коши (1) для линейного неоднородного уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\ldots,n$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0,1,\ldots,m-1$. *Тогда функция* $z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l + \int_0^t Y_0(t-s)f(s)ds$ *является единственным решением задачи* (1), (3).

В квазилинейных уравнениях во всех главах будут рассматриваться дробные интегралы и производные в точке $t_0 \in \mathbb{R}$: $J_t^{\beta} f(t) := \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s)ds$, $D_t^{\alpha} f(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k/\Gamma(k+1)\right)$ при $t > t_0$, $\beta > 0$, $\alpha \in (m-1,m]$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\kappa_i - 1 < \gamma_i \le \kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,2,\ldots,r$; U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B : U \to \mathcal{Z}$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0,1,\ldots,m-1$. Функцию $z \in AC^m([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ назовем решением задачи Коши для квазилинейного дробного дифференциального уравнения

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0,1,\ldots,m-1, \tag{4}$$

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \tag{5}$$

на отрезке $[t_0,t_1]$, если $D_t^{\alpha} z, D_t^{\alpha_k} z, D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2,\ldots,r$, выполнены включение $(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \ldots, D_t^{\gamma_r} z(t)) \in U$ и равенство (5) для всех $t \in [t_0,t_1]$, а также начальные условия (4).

Используя начальные данные $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ задачи Коши, определим многочлен $\tilde{z}(t) := z_0 + (t-t_0)z_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!}z_2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1}$ и векторы $\tilde{z}_i := D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde{z}(t)$, $i = 1,2,\ldots,r$. Заметим, что $\tilde{z}_i = 0$, если $\gamma_i \notin \{0,1,\ldots,m-1\}$. При $\gamma_i \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ имеем $\tilde{z}_i = z_{\gamma_i}$. Таким образом, аргумент нелинейного оператора в уравнении (5) в момент времени $t = t_0$ имеет вид $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r)$.

Обозначим $i_* := \min\{i \in \{1,2,\ldots,r\} : \gamma_i > m-1\}$, если множество $\{i \in \{1,2,\ldots,r\} : \gamma_i > m-1\}$ пусто, то $i_* := r+1$; $\bar{x} := (x_1,x_2,\ldots,x_r) \in \mathcal{Z}^r$. Для $t_1 > t_0$ определим пространство $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z}) : D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z}),\ i = i_*, i_*+1, \ldots, r\}$ и снабдим это пространство нормой $\|z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \sum_{i=i_*}^{r} \|D_t^{\gamma_i} z\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$. Доказано, что это пространство банахово.

В четвертом параграфе первой главы доказана локальная разрешимость задачи Коши для квазилинейного уравнения.

Теорема 3. *Пусть* $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $n,r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, U — *открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, *оператор* $B \in C(U,\mathcal{Z})$ *локально липшицев по* $\bar{x}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r) \in U$. *Тогда для некоторого* $t_1 > t_0$ *задача* (4), (5) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

А в пятом параграфе доказано существование единственного глобального решения, т. е. решения на произвольном заданном отрезке $[t_0,T]$.

Теорема 4. *Пусть* $n,r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0,1,\ldots,m-1$, *отображение* $B \in C([t_0,T] \times \mathcal{Z}^r;\mathcal{Z})$ *липшицево по* $\bar{x}$. *Тогда задача* (4), (5) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,T]$.

В шестом параграфе первой главы получены условия корректности обратной задачи

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,\dots,n$, $m-1 < \alpha \leq m$, $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Z}$, $T > 0$, с начальными условиями (1) и с условием переопределения

$$\int_0^T z(t)d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \tag{7}$$

где μ — функция ограниченной вариации на $(0,T]$.

Решением обратной задачи (1), (6), (7) называется пара $(z(t),u)$, где $u \in \mathcal{Z}$, а функция z является решением задачи Коши (1) для уравнения (6) с этим u, и удовлетворяет условию переопределения (7).

Теорема 5. *Пусть $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\mu : (0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача* (1), (6), (7) *корректна в том и только в том случае, когда $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$, где $\chi := \int_0^T \int_0^t Z(t-s)\varphi(s)dsd\mu(t)$, $\psi := z_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l d\mu(t)$.*

В седьмом параграфе полученные результаты о начальных задачах для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах были использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (в разделе 1.7.1) и начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени (в разделах 1.7.2–1.7.4).

Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda) = \sum_{p=0}^{\nu_1} a_p\lambda^p$, $P_2^k(\lambda) = \sum_{p=0}^{\nu_2^k} b_p^k\lambda^p$, $a_p, b_p^k \in \mathbb{C}$, $a_{\nu_1} \neq 0$, $b_{\nu_2^k}^k \neq 0$, $k = 1,2,\dots,n$, $\nu_0 := \max\{\nu_2^k : k = 1,2,\dots,n\} \leq \nu_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$(\Lambda u)(\xi) = \sum_{|q|\leq 2\rho} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}$, $(B_j u)(\xi) = \sum_{|q|\leq r_j} b_{jq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}$,

$a_q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $b_{jq} \in C^\infty(\partial\Omega)$, $j = 1,2,\dots,\rho$, $q = (q_1,q_2,\dots,q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1+\dots+q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_\rho$ регулярно эллиптичен. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H_{\{B_j\}}^{2\rho}(\Omega) := \{v \in H^{2\rho}(\Omega) : B_j v(\xi) = 0, j = 1,2,\dots,\rho, \xi \in \partial\Omega\}$ действует согласно равенству $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_s : s \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_s : s \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi,0) = u_l(\xi), \ l = 0,1,\dots,m-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{8}$$

$$B_j\Lambda^p u(\xi,t) = 0, \ \ p = 0,1,\dots,\nu_1-1, \ \ j = 1,2,\dots,\rho, \ \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{9}$$

$$P_1(\Lambda)D_t^\alpha u(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t) + h(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{10}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $h : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Возьмем $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $\mathcal{X} = \{v \in H^{2\rho\nu_1}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0,\ p = 0,1,\dots,\nu_1 - 1,\ j = 1,2,\dots,\rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$, $L = P_1(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k = P_2^k(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\dots,n$.

Пусть $P_1(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$, тогда задача (8)–(10) представима в виде задачи (1), (3), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_k = L^{-1}M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, $z_l = u_l(\cdot)$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $f(t) = L^{-1}h(\cdot,t)$. По теореме 2 в случае $\nu_0 \leq \nu_1$ существует единственное решение задачи (8)–(10) при любых $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, и $h \in C([0,T];L_2(\Omega))$ (в таком случае $L^{-1}h \in C([0,T];\mathcal{X})$).

В разделе 1.7.3 рассматривается начально-краевая задача (8), (9) для квазилинейного уравнения

$$\begin{gathered} P_1(\Lambda)D_t^{\alpha}u(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} P_2^k(\Lambda)D_t^{\alpha_k}u(\xi,t)+ \\ +H(\xi, D_t^{\gamma_1}u(\xi,t), D_t^{\gamma_2}u(\xi,t),\dots,D_t^{\gamma_r}u(\xi,t)),\quad (\xi,t) \in \Omega \times [0,T]. \end{gathered} \tag{11}$$

Положим $H : \Omega \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, $\rho_0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} := \{v \in H^{2\rho\nu_1+\rho_0}(\Omega) : B_j\Lambda^p v(\xi) = 0,\ j = 1,2,\dots,\rho,\ p = 0,1,\dots,\nu_1 - 1,\ \xi \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} := H^{\rho_0}(\Omega)$.

Если $P_1(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то задача (8), (9), (11) представима в виде (4), (5), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_k = L^{-1}M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, $z_l = u_l(\cdot)$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $B(y_1,y_2,\dots,y_r) = L^{-1}H(\cdot,y_1,y_2,\dots,y_r)$.

Теорема 6. *Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $\nu_0 \leq \nu_1$, $B_1 = I$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит начала координат и нулей многочлена P_1, $2\rho\nu_1 + \rho_0 > d/2$, $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $H \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^r;\mathbb{R})$. Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи* (8), (9), (11). *Если все частные производные H по x_i, $i = 1,2,\dots,r$, ограничены, то единственное решение задачи* (8), (9), (11) *существует на всем отрезке $[t_0,T]$.*

Вторая глава посвящена изучению вопросов однозначной разрешимости задачи Коши для разрешенных относительно старшей дробной производной линейных и квазилинейных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто и неограниченными (замкнутыми) операторами при них в линейной части.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. В первом параграфе рассмотрена задача Коши (1), (2), где $A_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $k = 1,2,\dots,n$, т. е. линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ с областями определения $D_{A_k} \subset \mathcal{Z}$, $k = 1,2,\dots,n$. Под решением задачи (1), (2) понимается функция $z \in AC^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z}) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $\sum_{k=1}^n A_k D_t^{\alpha_k} z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) для $t \in \mathbb{R}_+$.

Введем обозначения $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$, $S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$, $\mathcal{D} := \bigcap_{k=1}^n D_{A_k}$, $R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{D}$. Снабдим множество $\mathcal{D}$ нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{D}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{k=1}^n \|A_k \cdot\|_{\mathcal{Z}}$, относительно которой $\mathcal{D}$ является банаховым пространством. Через $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0,a_0)$ обозначим класс наборов операторов $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geq 0$ для которых выполняются следующие условия: (i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, $l = 0,1,\dots,m-1$ существуют $R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$; (ii) при любых $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta,a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $l = 0,1,\dots,m-1$ выполнена оценка $\left\|R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}}$.

Иногда для краткости наборы операторов из $\mathcal{A}^n_{\alpha,G} := \bigcup\limits_{\substack{\theta_0\in(\pi/2,\pi)\\ a_0\geq 0}} \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ будем называть секториальными.

Семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *l-разрешающим*, $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, для уравнения (2), если выполняются следующие условия: (i) $S_l(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$; (ii) для каждого $z_l \in \mathcal{D}$ $S_l(t)z_l$ — решение задачи (1), (2) при $z_k = 0$, $k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}$. l-Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое l-разрешающее семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \geq 0$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a) > 0$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\mathrm{Re}\, t}$.

Теорема 7. *Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Тогда существуют аналитические l-разрешающие семейства операторов уравнения (2) типа (θ_0, a_0) при $l = 0, 1, \dots, m-1$ в том и только в том случае, когда $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$. При этом если $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, то существует единственное решение задачи (1), (2) и оно имеет вид $z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l$, где $Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_{\theta,a}} R_\lambda(\lambda^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1}A_k)e^{\lambda t}d\lambda$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Решение аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.*

Теорема 8. *Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq m_k - 1\} = \emptyset$ при некотором $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Тогда для l-разрешающего семейства операторов уравнения (2) функция $D^l_t S_l(t)$ непрерывна в точке $t = 0$ в операторной норме $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ в том и только в том случае, когда $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.*

Во втором параграфе при $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ рассмотрено линейное неоднородное уравнение дробного порядка (3). Решением задачи Коши (1) для уравнения (3) будем называть функцию $z \in AC^m([0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $D^\alpha_t z \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$, $\sum_{k=1}^{n} A_k D^{\alpha_k}_t z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (3) для всех $t \in (0, T]$.

При $\gamma \in (0, 1]$ через $C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ обозначим пространство Гельдера.

Теорема 9. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$, $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (1), (3), при этом оно имеет вид $z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l + \int_0^t Y_0(t-s)f(s)ds$.*

В третьем параграфе второй главы: решением задачи Коши (4) для квазилинейного дробного дифференциального уравнения (5) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется такая функция $z \in AC^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которой $D^\alpha_t z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $\sum_{k=1}^{n} A_k D^{\alpha_k}_t z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\gamma_i}_t z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, выполняются включение $(t, D^{\gamma_1}_t z(t), \dots, D^{\gamma_r}_t z(t)) \in U$ при $t \in [t_0, t_1]$, равенство (5) для всех $t \in (t_0, t_1]$, а также условия (4).

Теорема 10. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$, при $l = 0, 1, \dots, m-1$ $z_l \in$*

$\mathcal{D}$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^r$, $B\in C(U;\mathcal{Z})$ локально липшицево по $\bar{x}$, $(t_0,\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\dots,\tilde{z}_r)\in U$. Тогда при некотором $t_1>t_0$ задача (4), (5) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

В четвертом параграфе доказана глобальная разрешимость.

Теорема 11. *Пусть $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\leq m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $n,r\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\cdots<\gamma_r<\alpha$, $(A_1,A_2,\dots,A_n)\in\mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0,a_0)$, $z_l\in\mathcal{D}$, $l=0,1,\dots,m-1$, отображение $B\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^r;\mathcal{Z})$ липшицево по $\bar{x}$. Тогда задача* (4), (5) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,T]$.

Полученные результаты используются в пятом параграфе второй главы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени. Все операторы заданы как в разделе 1.7.2, за исключением того, что $\nu_1<\nu_0$, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\leq 1<\alpha<2$ и условие (8) принимает вид

$$u(\xi,0)=u_0(\xi),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,0)=u_1(\xi),\quad \xi\in\Omega. \tag{12}$$

В силу теоремы 9 при $u_l\in\mathcal{X}$, $l=0,1,\dots,m-1$, и при $h\in C^\gamma([t_0,T];L_2(\Omega))$, $\gamma\in(0,1]$, существует единственное решение задачи (9), (10), (12).

В разделе 2.5.2 рассматривается начально-краевая задача (9), (11), (12) при $H:\Omega\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$, $\nu_1<\nu_0$. Положим $\mathcal{X}:=\{v\in H^{2\rho\nu_1+\rho_0}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\ j=1,2,\dots,\rho,\ p=0,1,\dots,\nu_1-1,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $\rho_0\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Y}:=H^{\rho_0}(\Omega)$; $L:=P_1(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_k:=P_2^k(\Lambda)\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_k}=\{v\in H^{2\rho\nu_2^k}(\Omega):B_j\Lambda^p v(\xi)=0,\ j=1,2,\dots,\rho,\ p=0,1,\dots,\nu_2^k-1,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $k=1,2,\dots,n$.

Если $P_1(\lambda_s)\neq 0$ для всех $s\in\mathbb{N}$, то задача (9), (11), (12) имеет вид (4), (5), где $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $A_k=L^{-1}M_k\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, $z_l=u_l(\cdot)$, $l=0,1,\dots,m-1$, $B(y_1,y_2,\dots,y_r)=L^{-1}H(\cdot,y_1,y_2,\dots,y_r)$.

Теорема 12. *Пусть $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\leq 1<\alpha<2$, $\alpha-\alpha_1<2$, $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_r<\alpha$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит начала координат и нулей многочлена P_1, $2\rho\nu_1+\rho_0>d/2$, $u_l\in\mathcal{X}$, $l=0,1,\dots,m-1$, $H\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^r;\mathbb{R})$, $\nu_0>\nu_1$ и выполняются следующие условия:*

(i) *в случае нечетного $\nu_0-\nu_1$ при $\nu_2^k=\nu_0$ выполняется $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1}>0$;*

(ii) *в случае четного $\nu_0-\nu_1$ при $\nu_2^k=\nu_0$ выполняется $b^k_{\nu_2^k}/a_{\nu_1}<0$.*

Тогда для некоторого $t_1>t_0$ существует единственное решение задачи (9), (11), (12). *Если все частные производные H по y_i, $i=1,2,\dots,r$, ограничены, то единственное решение задачи* (9), (11), (12) *существует на всем отрезке* $[t_0,T]$.

В разделе 2.5.3 рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений динамики вязкоупругих сред

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(\xi,0)=v_l(\xi),\quad \xi\in\Omega,\quad l=0,1,\dots,m-1, \tag{13}$$

$$v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{14}$$

$$D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi\Delta D_t^\beta v(\xi,t)+\nu\Delta D_t^\gamma v(\xi,t)+\kappa\Delta D_t^\delta v(\xi,t)-r(\xi,t)+h(\xi,t), \tag{15}$$

$$\nabla \cdot v(\xi,t) = 0, \tag{16}$$

где $(\xi,t) \in \Omega \times (0,T]$, $\chi,\nu,\kappa \in \mathbb{R}$, некоторые из чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ могут быть отрицательными. Здесь скорость $v = (v^1, v^2, \ldots, v^d)$ и градиент давления $r = (r^1, r^2, \ldots, r^d) = \nabla p$ неизвестны, функция $h : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ задана.

Положим $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 := (H^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 := (H^2(\Omega))^d$, замкнутое подпространство $\mathcal{L} := \{z \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot z = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}^1_\sigma$. Введем обозначение $\mathbb{H}^2_\sigma := \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$, через $\mathbb{H}_\pi$ обозначим ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в пространстве $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $B := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, который сгущается только при $-\infty$.

Система (15), (16) эквивалентна уравнению

$$D_t^\alpha v(\xi,t) = \chi B D_t^\beta v(\xi,t) + \nu B D_t^\gamma v(\xi,t) + \kappa B D_t^\delta v(\xi,t) + \Sigma h(\xi,t), \tag{17}$$

при этом $r(\xi,t) = \chi\Pi\Delta D_t^\beta v(\xi,t) + \nu\Pi\Delta D_t^\gamma v(\xi,t) + \kappa\Pi\Delta D_t^\delta v(\xi,t) + \Pi h(\xi,t)$, $(\xi,t) \in \Omega \times (0,T]$. Поэтому будем рассматривать задачу (13), (14), (17).

Если $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, $\alpha - \delta < 2$, то возьмем $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma$, $A_1 = \kappa B$, $A_2 = \nu B$, $A_3 = \chi B$ являются замкнутыми плотно определенными операторами, $\mathcal{D} = D_B = \mathbb{H}^2_\sigma$. Используя разложение по собственным функциям, нетрудно показать, что при $\chi,\nu,\kappa > 0$ выполняется включение $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}^3_{\alpha,G}$ и по теореме 9 для любых $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\Sigma h \in C^\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$, $\gamma \in (0,1]$, существует единственное решение задачи (13), (14), (17). Следовательно, (13)–(16) также имеет единственное решение.

Пусть $\beta > \alpha > \gamma > \delta$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\chi,\nu,\kappa \in \mathbb{R}$, тогда, поскольку спектр оператора B не содержит нуля, перепишем (17) в виде

$$D_t^\beta v(\xi,t) = \chi^{-1} B^{-1} D_t^\alpha v(\xi,t) - \chi^{-1}\nu D_t^\gamma v(\xi,t) - \chi^{-1}\kappa D_t^\delta v(\xi,t) - B^{-1}\Sigma h(\xi,t).$$

Положим $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma$, $A_1 = \chi^{-1}B^{-1}$, $A_2 = -\chi^{-1}\nu I$, $A_3 = -\chi^{-1}\kappa I$ — ограниченные операторы и по теореме 2 для любых $v_0, v_1 \in \mathbb{H}_\sigma$ при $\Sigma h \in C([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$ задача (13), (14), (17), а значит, и задача (13)–(16) имеет единственное решение.

В **третьей главе** исследованы вопросы существования и единственности решения начальных задач для уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто и с вырожденным оператором при старшей из них. В первом параграфе рассматривается случай спектрально ограниченной пары при старших производных. Будем предполагать, что $n \in \mathbb{N}$, $L, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_{M_n} — область определения оператора M_n, на которой задана норма графика $\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_\mathcal{X} + \|M_n \cdot\|_\mathcal{Y}$. Обозначим $\rho^L(M_n) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M_n) := (\mu L - M_n)^{-1} L$, $L^L_\mu(M_n) := L(\mu L - M_n)^{-1}$.

Оператор M_n называется (L,σ)-*ограниченным*, если существует такое $a > 0$, что для всех $\mu \in \mathbb{C}$ из $|\mu| > a$ следует $\mu \in \rho^L(M_n)$. При этом пару операторов (L, M_n) будем называть спектрально ограниченной. В случае (L,σ)-ограниченности оператора M_n определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M_n) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M_n)\, d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}), \tag{18}$$

где $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_q $(M_{k,q})$ обозначим сужение оператора L (M_k) на $\mathcal{X}^q$ $(D_{M_{n,q}} := D_{M_n} \cap \mathcal{X}^q)$, $q = 0, 1$,

$k=1,2,\ldots,n$. При этом известно, что $LP=QL$, $M_nPx=QM_nx$ для $x\in D_{M_n}$, поэтому $M_{n,1}\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_{n,0}\in\mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_q\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^q;\mathcal{Y}^q)$, $q=0,1$; кроме того, в рассматриваемой ситуации существуют операторы $M_{n,0}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$. Оператор M_n будем называть $(L,0)$-ограниченным, если L_0 — нулевой оператор.

Рассмотрим начальную задачу для линейного неоднородного уравнения

$$\begin{gathered} x^{(l)}(t_0)=x_l,\quad l=0,1,\ldots,m_n-1,\\ (Px)^{(l)}(t_0)=x_l,\quad l=m_n,m_n+1,\ldots,m-1, \end{gathered}\tag{19}$$

$$D_t^{\alpha}Lx(t)=\sum_{k=1}^{n}M_kD_t^{\alpha_k}x(t)+g(t),\tag{20}$$

которое называется вырожденным в случае $\ker L\neq\{0\}$. Предполагается, что, как и прежде, $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\alpha$, $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $m_k-1<\alpha_k\leq m_k\in\mathbb{Z}$, $k=1,2,\ldots,n$, $g\in([0,T];\mathcal{Y})$.

Решением задачи (19), (20) будем называть функцию $x\in AC^{m_n}([0,T];\mathcal{X})$, для которой $Px\in AC^{m}([0,T];\mathcal{X})$, $D_t^{\alpha_k}x\in C([0,T];\mathcal{X})$, $k=1,2\ldots,n$, $D_t^{\alpha}Lx$, $M_nD_t^{\alpha_n}x\in C([0,T];\mathcal{Y})$, выполняются равенства (19), (20) при всех $t\in[0,T]$.

Теорема 13. *Пусть $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\alpha$, $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $m_k-1<\alpha_k\leq m_k\in\mathbb{Z}$, $k=1,2,\ldots,n$, $L,M_k\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k=1,2,\ldots,n-1$, $M_n\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$-ограничен, $M_kP=QM_k$, $k=1,2,\ldots,n-1$, $g\in C([0,T];\mathcal{Y})$, $x_l\in\mathcal{X}$ при $l=0,1,\ldots,m_n-1$, $x_l\in\mathcal{X}^1$, $l=m_n,m_n+1,\ldots,m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (19), (20).

Во втором параграфе третьей главы рассматривается начальная задача для вырожденного квазилинейного уравнения со спектрально ограниченной парой операторов

$$\begin{gathered} x^{(l)}(t_0)=x_l,\quad l=0,1,\ldots,m_n-1,\\ (Px)^{(l)}(t_0)=x_l,\quad l=m_n,m_n+1,\ldots,m-1, \end{gathered}\tag{21}$$

$$D_t^{\alpha}Lx(t)=\sum_{k=1}^{n}M_kD_t^{\alpha_k}x(t)+N(t,D_t^{\gamma_1}x(t),D_t^{\gamma_2}x(t),\ldots,D_t^{\gamma_r}x(t)),\tag{22}$$

т. е. в случае $\ker L\neq\{0\}$. Предполагается, как прежде, $n,r\in\mathbb{N}$, $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_k-1<\alpha_k\leq m_k\in\mathbb{Z}$, $k=1,2,\ldots,n$, $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_r<\alpha$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^r$, $N\in C(U,\mathcal{Z})$.

Решением задачи (21), (22) на отрезке $[t_0,t_1]$ назовем функцию $x\in AC^{m_n}([t_0,t_1];\mathcal{X})$, для которой $Px\in AC^{m}([t_0,t_1];\mathcal{X})$, $D_t^{\alpha}Lx,M_nD_t^{\alpha_n}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Y})$, $D_t^{\alpha_k}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{X})$, $k=1,2\ldots,n$, $D_t^{\gamma_i}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{X})$, $i=1,2,\ldots,r$, выполнены включение $(t,D_t^{\gamma_1}x(t),D_t^{\gamma_2}x(t),\ldots,D_t^{\gamma_r}x(t))\in U$, равенство (22) для всех $t\in[t_0,t_1]$ и условия (21).

Обозначим $V=U\cap(\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^1)^r)$, $\tilde v_i:=D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde v(t)$, $i=1,2,\ldots,r$, где $\tilde v(t):=Px_0+(t-t_0)Px_1+\frac{(t-t_0)^2}{2!}Px_2+\cdots+\frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}Px_{m-1}$, $W=U\cap(\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^0)^r)$, $\tilde w_i:=D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde w(t)$, $i=1,2,\ldots,r$, где $\tilde w(t):=P_0x_0+(t-t_0)P_0x_1+\frac{(t-t_0)^2}{2!}P_0x_2+\cdots+\frac{(t-t_0)^{m_n-1}}{(m_n-1)!}P_0x_{m_n-1}$.

Теорема 14. *Пусть оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $N : U \to \mathcal{Y}$, *для каждого* $(t,z_1,\dots,z_r) \in U$, *такого, что* $(t,Pz_1,\dots,Pz_r) \in U$, *выполняется* $N(t,z_1,\dots,z_r) = N_1(t,Pz_1,\dots,Pz_r)$ *для некоторого оператора* $N_1 \in C(V;\mathcal{Y})$, *который локально липшицев по* $v_1,\dots,v_r$, $(t_0,\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_r) \in V$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *для* $l = m_n,\dots,m-1$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (21), (22) *на* $[t_0,t_1]$.

Теорема 15. *Пусть оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, $N : U \to \mathcal{Y}$, *для всех* $(t,z_1,\dots,z_r) \in U$, *таких что* $(t,P_0z_1,\dots,P_0z_r) \in U$ *выполняется* $N(t,z_1,\dots,z_r) = N_0(t,P_0z_1,\dots,P_0z_r)$ *для некоторого оператора* $N_0 \in C(W;\mathcal{Y})$, *который является локально липшицевым по* $w_1,\dots,w_r$, $(t_0,\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_r) \in W$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *для* $l = m_n,\dots,m-1$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (21), (22) *на* $[t_0,t_1]$.

Обозначим $\tilde{x}_i := D_t^{\gamma_i}|_{t=t_0}\tilde{x}(t)$, $i = 1,2,\dots,r$, где $\tilde{x}(t) := x_0 + (t-t_0)x_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!}x_2 + \dots + \frac{(t-t_0)^{m_n-1}}{(m_n-1)!}x_{m_n-1}$.

Теорема 16. *Пусть* $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *отображение* $N \in C(U;\mathcal{Y}^1)$ *локально липшицево по* $y_1,y_2,\dots,y_r$, $(t_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_r) \in U$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *при* $l = m_n, m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (21), (22) *на* $[t_0,t_1]$.

Теорема 17. *Пусть* $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\dots,n-1$, *оператор* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $\gamma_r < \alpha_n$, *отображение* $N \in C(U;\mathcal{Y}^0)$ *локально липшицево по* $y_1,\dots,y_r$, $(t_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_r) \in U$, $x_l \in \mathcal{X}^1$ *при* $l = m_n, m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (21), (22) *на* $[t_0,t_1]$.

При липшицевом отображении $N \in C([t_0,T] \times \mathcal{Z}^r;\mathcal{Z})$ получим аналогичные утверждения о глобальной однозначной разрешимости задачи (21), (22).

В третьем параграфе получены условия корректности линейной обратной задачи для вырожденного уравнения со спектрально ограниченной парой операторов

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{n} M_j D_t^{\alpha_j} x(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{23}$$

с условиями

$$\begin{aligned} x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad & l = 0,1,\dots,m_n-1, \\ (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad & l = m_n, m_n+1,\dots,m-1, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{25}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\dots,n$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$.

В четвертом параграфе третьей главы рассматриваются секториальные пары операторов.

Пара $(L,M) \in (\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y}))^2$ принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, если (i) существуют $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$ и $a_0 \ge 0$, такие, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) для каждых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует константа $K = K(\theta, a) > 0$, такая, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $\max\{\|R^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\lambda^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a||\lambda|^{\alpha-1}}$.

Для удобства пару операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ будем называть также секториальной. Введем также обозначение $\mathcal{H}_\alpha := \bigcup\limits_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2,\pi)\\ a_0 \geq 0}} \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Из псевдорезольвентного тождества, справедливого как для $R^L_\mu(M_n)$, так и для $L^L_\mu(M_n)$, следует, что подпространства $\ker R^L_\mu(M_n) = \ker L$, $\mathrm{im} R^L_\mu(M_n)$, $\ker L^L_\mu(M_n)$, $\mathrm{im} L^L_\mu(M_n)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M_n)$. Обозначим $\ker R^L_\mu(M_n) := \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M_n) := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\mathrm{im} R^L_\mu(M_n)$ ($\mathrm{im} L^L_\mu(M_n)$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$), а через L_q ($M_{n,q}$) обозначим сужение оператора L (M_n) на $D_{L_q} := D_L \cap \mathcal{X}^q$ ($D_{M_{n,q}} := D_{M_n} \cap \mathcal{Y}^q$) при $q = 0, 1$.

В пятом параграфе третьей главы рассматриваются вырожденные линейные уравнения с секториальной парой операторов. Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $M_1, M_2, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M_n, L \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$. Некоторые из α_k могут быть отрицательны. Рассмотрим задачу (19), (20). Ее решением назовем функцию $x \in AC^{m_n}([0, T]; \mathcal{X})$, для которой $Px \in AC^m([0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\alpha_k}_t x \in C((0, T]; \mathcal{X})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $D^\alpha_t Lx$, $M_n D^{\alpha_n}_t x \in C((0, T]; \mathcal{Y}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Y})$, $D^{\alpha_k}_t x \in C((0, T]; \mathcal{X})$, выполнены равенство (20) для всех $t \in (0, T]$ и условия (19).

Имеем $LP = QL$ для $x \in D_L$, $M_n Px = QM_n x$ для $x \in D_{M_n}$, следовательно, $M_{n,q} \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q)$, $L_q \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^q; \mathcal{Y}^q)$, $q = 0, 1$. Кроме того, существуют $M^{-1}_{n,0} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L^{-1}_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Теорема 18. *Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $L^{-1}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > -\alpha$. Тогда для некоторых $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0]$, $a_1 \geq a_0$ $(M_{1,1}L^{-1}_1, M_{2,1}L^{-1}_1, \dots, M_{n,1}L^{-1}_1) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_1, a_1)$.*

Теорема 19. *Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M_k P = QM_k + Q_0 N_k P$ для некоторых $N_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $L^{-1}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > \alpha(1 - 2\theta_0/\pi)$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, $Qg \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Y})$, $\gamma \in (0, 1]$, $x_l \in D_{M_{n,1}} \dot{+} \mathcal{X}^0$ для $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $x_l \in D_{M_{n,1}}$ при $l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи (19), (20).*

В шестом параграфе полученные результаты о начальных задачах для вырожденных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах были использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений и начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

Пусть $m, n, q \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leq m$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, L, M_k — $(q \times q)$-матрицы с элементами из $\mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\det L = 0$. Рассмотрим вырожденную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D^\alpha_t Lx(t) = \sum_{k=1}^n M_k D^{\alpha_k}_t x(t) + g(t), \quad t \geq 0, \tag{26}$$

где $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^q(t))^T$ и $g(t) = (g^1(t), g^2(t), \dots, g^q(t))^T$ — неизвестная и заданная вектор-функции соответственно со значениями в $\mathbb{C}^q$ (символ ^{T} означает транспонирование). Возьмем $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{C}^q$, тогда условие (L, p)-ограниченности оператора M_n равносильно требованию $\det(\mu L - M_n) \not\equiv 0$, при этом $p \le q - 1$. По теореме 13 начальная задача

$$\begin{gathered} x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \\ (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1, \end{gathered} \tag{27}$$

где $x_l = (x_l^1, x_l^2, \dots, x_l^q)^T \in \mathbb{C}^q$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $P_0 x_l = 0$ при $l = m_n, \dots, m-1$, для системы уравнений (26) с $g \in C([0,T]; \mathbb{C}^q)$ имеет единственное решение.

Рассмотрим уравнение с краевыми условиями (9), (10). Предположим, что $P_1(\lambda_s) = 0$ при некоторых $s \in \mathbb{N}$, тогда при условии, что многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$, оператор M_n $(L, 0)$-ограничен, при этом проекторы (18) имеют вид

$$P = \sum_{P_1(\lambda_s) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s, \quad Q = \sum_{P_1(\lambda_s) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_s \rangle \varphi_s. \tag{28}$$

Начальные условия зададим в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(\xi, 0) = u_l(\xi), \ l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad \xi \in \Omega, \\ \frac{\partial^l P_1(\Lambda) u}{\partial t^l}(\xi, 0) = y_l(\xi), \ l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1, \quad \xi \in \Omega, \end{gathered} \tag{29}$$

тогда задача (9), (10), (29) представима в виде (19), (20). Из теоремы 13 следует однозначная разрешимость задачи (9), (10), (29) при любых начальных данных $u_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_l \in L_2(\Omega)$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$, таких, что $\langle y_l, \varphi_s \rangle = 0$ при $P_1(\lambda_s) = 0$, и $h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$.

Пусть $a_p, b_p^k \in \mathbb{R}$, в случае $\nu_1 \ge \nu_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\nu_1 < \nu_n$ имеем $M_k = P_2^k(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $M_n = P_2^n(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $D_{M_n} := \{v \in H^{2\rho\nu_n}(\Omega) : B_j \Lambda^p v(\xi) = 0,\ p = 0, 1, \dots, \nu_n - 1,\ j = 1, \dots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$. Тогда $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha$ в одном из двух случаев:

(i) если $(-1)^{\nu_n - \nu_1} b_{\nu_n}/a_{\nu_1} < 0$ и многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$, то $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha$ при любом $\alpha \ge 1$;

(ii) если $(-1)^{\nu_n - \nu_1} b_{\nu_n}/a_{\nu_1} < 0$, многочлены P_1 и P_2^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_s\}$ и $\max\limits_{P_1(\lambda_s) \neq 1} \frac{P_2^n(\lambda_s)}{P_1(\lambda_s)} < 1$, то $(L, M_n) \in \mathcal{H}_\alpha$ при любом $\alpha \in (0, 1)$.

При этом $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, а из вида проекторов (28) следует, что $M_k P = Q M_k$, т.е. $N_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, в условиях теоремы 19. Таким образом, в любом из двух случаев из теоремы 19 следует однозначная разрешимость задачи (9), (10), (29) при условии $\alpha_n > \alpha(1 - 2\theta_0/\pi)$ при любых начальных данных $u_l \in D_{M_n}$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_l \in L[D_{M_n}]$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m - 1$, и $h \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0, 1]$.

В разделе 3.6.4 рассмотрены примеры вырожденных систем уравнений в частных производных, иллюстрирующие четыре случая из параграфа 3.2.

В разделе 3.6.5 рассмотрена начально-краевая задача для линеаризованной системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad (m-1)\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, 0) = (m-1) v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{30}$$

$$\tau(\xi,0)=\tau_0(\xi),\quad (m-1)\frac{\partial\tau}{\partial t}(\xi,0)=(m-1)\tau_1(\xi),\quad \xi\in\Omega, \tag{31}$$

$$v(\xi,t)=0,\quad \tau(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{32}$$

$$D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi D_t^\alpha\Delta v(\xi,t)+\nu\Delta v(\xi,t)+\kappa D_t^\delta\Delta v(\xi,t)-r(\xi,t)+h(\xi,t), \tag{33}$$

$$\nabla\cdot v(\xi,t)=0, \tag{34}$$

$$D_t^\alpha\tau(\xi,t)=\varrho\triangle\tau(\xi,t)+\varsigma v_n(\xi,t)+f(\xi,t). \tag{35}$$

где $(\xi,t)\in\Omega\times(0,T]$, $m-1<\alpha\leq m\in\{1,2\}$, $\delta<0$, $\chi,\nu,\kappa,\varrho,\varsigma\in\mathbb{R}$, Δ — оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega):=\{w\in H^2(\Omega):w(\xi)=0,\ \xi\in\partial\Omega\}$, плотной в $L_2(\Omega)$.

Положим $\mathcal{X}=\mathbb{H}_\sigma^2\times\mathbb{H}_\pi\times L_2(\Omega)$, $\mathcal{Y}=\mathbb{L}_2\times L_2(\Omega)=\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi\times L_2(\Omega)$, $L=\begin{pmatrix} I-\chi B & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I\end{pmatrix}$, $M_1=\begin{pmatrix} \kappa B & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \kappa\Pi\Delta & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix} \nu B & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\ \nu\Pi\Delta & -I & \mathbb{O}\\ \varsigma P_n & \mathbb{O} & \varrho\triangle\end{pmatrix}$, $g(t)=\begin{pmatrix}\Sigma h(\cdot,t)\\ \Pi h(\cdot,t)\\ f(\cdot,t)\end{pmatrix}$, $t\in[0,T]$. Здесь P_n — проектор, действующий по правилу $(v_1,v_2,\ldots,v_n)\to v_n$. Тогда $L,M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_2\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_2}=\mathbb{H}_\sigma^2\times\mathbb{H}_\pi\times H_0^2(\Omega)$. Имеем $x(t)\in\mathcal{X}$, где $x(t)=(v(\cdot,t),r(\cdot,t),\tau(\cdot,t))$.

Теорема 20. *Пусть $\alpha\in(0,2)$, $\chi,\nu,\kappa,\varsigma\in\mathbb{R}$, $\chi\notin\sigma(B)$, $\varrho>0$, $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, $\tau_0\in H_0^2(\Omega)$ для $\alpha\in(0,1]$, $v_0,v_1\in\mathbb{H}_\sigma$, $\tau_0,\tau_1\in H_0^2(\Omega)$ при $\alpha\in(1,2)$; $h\in C([0,T];\mathbb{L}_2)$, $\Sigma h\in C^\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$, $f\in C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$, $\gamma\in(0,1]$. Тогда существует единственное решение задачи* (30)–(35).

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стали теоремы о существовании и единственности классического решения начальных задач для широких классов линейных и квазилинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто, с ограниченными или с замкнутыми операторами в линейной части уравнения. Рассмотрены как разрешенные относительно старшей производной уравнения, так и уравнения, содержащие вырожденный линейный оператор при этой производной. Во втором случае используемые условия на пару операторов при двух старших производных в уравнении позволяют вырожденное уравнение редуцировать к паре уравнений, разрешенных относительно старшей производной.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности решения начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ряда начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно старшей дробной производной по времени.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях: исследование вопросов существования и единственности сильных решений аналогичных задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто; исследование новых классов обратных задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто:

задач с зависящим от времени неизвестным параметром, нелинейных обратных задач; исследование вопросов управляемости уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто; исследование различных задач оптимального управления для систем, динамика которых описывается уравнениями с несколькими производными Герасимова — Капуто.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Федоров, В. Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными / В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг // Мат. заметки Сев.-Восточ. федер. ун-та. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 85–104. (Scopus).

2. Boyko, K. V. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 46, No. 6. — P. 1293–1302. (Web of Science, Scopus).

3. Fedorov, V. E. Degenerate multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives in the sectorial case / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, No. 4699. — 24 p. (Web of Science, Scopus).

4. Fedorov, V. E. Some classes of quasilinear equations with Gerasimov — Caputo derivatives / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. DEMMCA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. Vol. 423. — P. 1–16. (Scopus).

5. Федоров, В. Е. Квазилинейные уравнения с секториальным набором операторов при производных Герасимова — Капуто / В. Е. Федоров, К. В. Бойко // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 248–259. (Web of Science, Scopus).

Fedorov, V. E. Quasilinear equations with a sectorial set of operators at Gerasimov — Caputo derivatives / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2023. — Vol. 321, No. 1. — P. 78–89. (Web of Science, Scopus).

6. Бойко, К. В. Линейные и квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Челяб. физ.-мат. журн. — 2024. — Т. 9, вып. 1. — С. 5–22. (Scopus).

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

7. Бойко, К. В. Обратная задача для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 213. — С. 38–46.

8. Бойко, К. В. Разрешимость задачи Коши для одного класса линейных уравнений с несколькими дробными производными / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2021. — С. 17–18.

9. Бойко, К. В. Вырожденные квазилинейные уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): материалы 3-й Междунар. конф. — Иркутск: Издательство ИГУ, 2021. — С. 12–13.

10. Бойко, К. В. Линейное уравнение с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии информатики и физики: материалы VI Междунар. науч. конф. — Нальчик: Издательство «Принт Центр», 2021. — С. 50.

11. Бойко, К. В. Обратная задача для уравнения с дробными производными / К. В. Бойко // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2022. — С. 15–16.

12. Бойко, К. В. Обратная задача для вырожденного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2022: тез. докл. — Владимир: Аркаим, 2022. — С. 93–94.

13. Бойко, К. В. Вырожденное линейное уравнение с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Девятая Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям: тез. докл. — Москва: РУДН, 2022. — С. 130–131.

14. Бойко, К. В. Вырожденные квазилинейные уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022): материалы 4-й Междунар. конф. — Иркутск: Издательство ИГУ, 2022. — С. 11–13.

15. Бойко, К. В. О разрешимости линейного неоднородного уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто в секториальном случае / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя математическая школа-2022: материалы Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ, 2022. — С. 145–147.

16. Бойко, К. В. Аналитические разрешающие семейства для уравнения с производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Вещественный, комплексный и функциональный анализ и связанные темы: сб. тез. Междунар. конф. — Курск: Издательство КГУ, 2022. — С. 4–6.

17. Бойко, К. В. Один класс квазилинейных уравнений с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф. — Ташкент: «Университет», 2022. — С. 84–85.

18. Boyko, K. V. Local solutions of quasilinear equations with Gerasimov — Caputo derivatives. Sectorial case / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // Book of Abstracts of International Online Conference One-Parameter Semigroups of Operators — Nizhny Novgorod, 2023. — P. 6–8.

19. Бойко, К. В. Решение неоднородного уравнения с дробными производными / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 24–25.

20. Бойко, К. В. Нелокальное решение квазилинейного уравнения / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // X Международная конференция по математическому моделированию: тез. докл. — Якутск: Северо-Восточный федеральный университет, 2023. — С. 33.

21. Бойко, К. В. Вырожденное дробное дифференциальное уравнение с производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко // Уфимская осенняя математическая школа-2023: материалы Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна,

2023. — С. 25–27.

22. Бойко, К. В. Локальное решение квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто. Секториальный случай / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф. — Ташкент: Фергана, 2023. — С. 331–333.

23. Бойко, К. В. Глобальное решение квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто. Секториальный случай / К. В. Бойко // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии информатики и физики: материалы междунар. науч. конф. — Нальчик: Издательство «Принт Центр», 2023. — С. 71.

24. Бойко, К. В. Решение неоднородного уравнения с дробными производными и гельдеровой неоднородностью / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 16–17.

25. Бойко, К. В. Вопросы существования и единственности локального решения квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто / К. В. Бойко, В. Е. Федоров // Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации: сб. материалов Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 12–13.