

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **Гальта Алексея Альбертовича**
СВОЙСТВО РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Диссертация Алексея Альбертовича Гальта посвящена изучению конечных групп типа Ли, а также полупростых алгебраических групп над замкнутым полем ненулевой характеристики. Точнее, в диссертации изучается расщепимость нормализаторов торов над этими торами, а также для подгрупп, содержащих нетривиальную нормальную r -подгруппу, уточняется теорема Майкла Ашбахера о максимальных подгруппах простых конечных классических групп.

В любой полупростой алгебраической группе над замкнутым полем все максимальные торы сопряжены между собой, а факторгруппа $\bar{N}/\bar{T}$ нормализатора тора $\bar{N}$ по тору $\bar{T}$ изоморфна группе Вейля W системы корней. В статье о нормализаторах торов, опубликованной в 1966 году, Жак Титс задал вопрос: в каких случаях естественная проекция $\bar{N} \rightarrow W$ имеет сечение? Один из основных результатов диссертации – полный ответ на вопрос Титса для всех групп Шевалле односвязных и присоединенных типов. Если характеристика поля равна 2, то сечение существует по очевидным причинам: можно просто взять матрицы-перестановки, соответствующие элементам группы Вейля. Если же характеристика нечетна, то матрицы-перестановки не обязаны лежать даже в специальной линейной группе. В этом случае ответ угадать невозможно. Сечение существует для групп

- $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ при $n \neq 2$,
- $\mathrm{PSL}_n(q)$,
- $\mathrm{SL}_n(q)$ при нечетном n ,
- всех групп типов B_n , D_n и G_2

и только для них. Доказательство этого результата не слишком длинное по сравнению с основным результатом работы – ответом на аналогичный вопрос для всех конечных групп типа Ли.

Дело в том, что в конечной группе максимальные торы уже не обязаны быть сопряженными. Классы сопряженных максимальных торов индексируются в этом случае классами сопряженных элементов группы Вейля (для простоты изложения я не комментирую случай скрученных групп). При этом нормализаторы у разных торов не изоморфны, а факторгруппа N/T нормализатора N тора T , соответствующего классу элемента $w \in W$, изоморфна централизатору w в W . Таким образом, разбор случаев происходит не только по системе корней и форме группы, но и по различным несопряженным между собой торами. В классических группах все зависит от циклического типа перестановки, соответствующей элементу группы Вейля. Впрочем, для некоторых типов важна еще разрешимость уравнения $\mu^2 = -1$, откуда получается зависимость от значения $q \bmod 4$. Для исключительных групп происходит скрупулезный анализ всех классов сопряженных торов, и только для некоторых случаев ответ получается при помощи общих соображений. Для вычислений с матрицами использовались “умные калькуляторы”, MAGMA и GAP. Использование этих компьютерных программ здесь абсолютно уместно: без них вычисления затянулись бы на десятилетия, а достоверность ответов была бы только ниже.

После завершения классификации простых конечных групп (точнее после того, как специалисты поверили, что все конечные простые группы известны, хотя полного доказательства еще не было) Майкл Ашбахер инициировал классификацию максимальных подгрупп простых конечных групп. Существенную часть простых конечных групп составляют классические группы, для которых Ашбахер определил 8 классов максимальных подгрупп и доказал, что любая максимальная подгруппа простой классической группы либо принадлежит одному из классов, либо является почти простой группой. Последняя глава диссертации посвящена уточнению теоремы Ашбахера для подгрупп, содержащих нетривиальную нормальную r -подгруппу, где r некоторое простое число. Не будучи специалистом по теории конечных групп, я не очень понял мотивацию этого уточнения, но так или иначе результаты этой главы выглядят интересными, доказательства нетривиальны, а любые сведения про подгруппы линейных групп над кольцами могут быть полезны.

Оценивая работу в целом, следует сказать, что А. А. Гальт проделал титанический труд, полностью решив трудную и интересную классификационную задачу, а также продемонстрировал великолепные знания теории алгебраических и конечных групп. Автором получены новые научные результаты и разработаны новые методы, представляющие несомненную ценность для специалистов по теории алгебраических и конечных групп, а также теории представлений. Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, отражены в публикациях автора и представлены на российских и международных конференциях. Доказательства однозначно подтверждают правильность всех результатов диссертации. Автореферат соответствует содержанию работы и правильно отражает ее основные направления.

Текст диссертации содержит небольшое количество опечаток и погрешностей изложения, основной из которых является отсутствие определений некоторых символов до того, как они используются в формулировке. Например, я потратил много времени, пытаясь найти определение циклического типа элемента группы Вейля симплектической группы до теоремы 2.2 (стр. 26), но оказалось, что оно приведено на странице 31. Конкретные замечания приведены ниже (я не стал указывать опечатки в словах, но они тоже присутствуют).

- (1) Символ n_s используется во всем тексте, при этом приходится догадаться, что $n_s = n_s(1)$.
- (2) На странице 18 написано, что “значения $N_{r,s}$ можно выбрать произвольно на множестве экстраспециальных пар”, в то время, как выбрать можно только знаки.
- (3) Обозначение $O^{p'}$ не определено. Можно только догадаться, что оно означает.
- (4) В начале параграфа 1.4 появляется символ Δ , который определен через несколько страниц, как система простых корней.
- (5) Я не понял определения положительности цикла из группы Вейля системы корней C_n , потому что в тексте не написано, каким образом фиксируется первый элемент цикла.
- (6) В формулировке предложения 2.2.8 должно быть “Пусть U – подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) \dots$ ” вместо “Пусть T – подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) \dots$ ”. Аналогичная опечатка в предложении 2.3.6.
- (7) В теореме 2.4.1 зачем-то сказано, что $\overline{T}$ – σ -инвариантный тор, хотя все торы в группе над замкнутым полем равноправны.

Указанные недостатки изложения никоим образом не влияют на положительную оценку работы.

В заключении надо отметить, что диссертация представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, удовлетворяющую всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, А. А. Гальт, несомненно заслуживает присвоения степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

01.11.2024

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук, доцент
Алексей Владимирович Степанов
телефон: +7 921 7542854
email: stepanov239@gmail.com
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный университет
доцент факультета
математики и компьютерных наук

(А. В. Степанов)