

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

На правах рукописи

Минушкина Лилия Сергеевна

**Периодические траектории динамических систем,
моделирующих функционирование генных сетей**

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Голубятников Владимир Петрович

Новосибирск — 2024

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 3 |
| Глава 1. Динамические системы малых размерностей со ступенчатыми правыми частями | 13 |
| 1.1 Трехмерная система | 13 |
| 1.2 Четырехмерная система | 20 |
| Глава 2. Шестимерная динамическая система со ступенчатыми правыми частями | 34 |
| 2.1 Постановка задачи | 34 |
| 2.2 Дискретизация фазового портрета | 35 |
| 2.3 Существование цикла в инвариантной подобласти | 38 |
| 2.4 Единственность и устойчивость цикла в инвариантной подобласти | 43 |
| 2.5 Поведение траекторий в неинвариантной подобласти в безразмерном случае | 47 |
| Глава 3. Динамические системы с гладкими правыми частями | 53 |
| 3.1 Трехмерная динамическая система | 53 |
| 3.1.1 Постановка задачи | 53 |
| 3.1.2 Построение инвариантной области и ее дискретизация | 53 |
| 3.1.3 Существование цикла | 56 |
| 3.1.4 Инвариантная поверхность | 58 |
| 3.2 Шестимерная динамическая система | 59 |
| 3.2.1 Постановка задачи | 59 |
| 3.2.2 Построение инвариантной области и ее дискретизация | 59 |
| 3.2.3 Существование цикла | 61 |
| 3.2.4 Инвариантная поверхность | 63 |
| Заключение | 66 |
| Список литературы | 68 |

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В настоящее время активно развивается такая междисциплинарная область науки, как биоинформатика, а также связанная с ней математическая биология. Процессы, протекающие в различных биологических системах, начиная с клеток и заканчивая популяциями, описываются нелинейными динамическими системами. Качественный анализ решений динамических систем позволяет до проведения биологических экспериментов выявить стационарные состояния и циклы, а также решить вопросы (не)единственности и устойчивости этих циклов, которые соответствуют осциллирующим режимам функционирования биологических систем. Полученные данные о поведении траекторий динамических систем применяются при поиске бифуркационных значений параметров, например, в [13] в рамках проведения численных экспериментов. Поиск бифуркационных значений также актуален для биологов, поскольку изменение качественных характеристик фазового портрета означает изменение режимы работы биологической системы.

Настоящая работа посвящена исследованию математических моделей генных сетей. Генные сети представляют собой группу генов, взаимодействующих между собой через первичные продукты, такие, как белки и мРНК, а также через вторичные, например, димеры. Это взаимодействие характеризуется положительными и отрицательными регуляторными связями, основанными на биохимических реакциях синтеза и разложения веществ, см. [20]. В математических моделях биохимические реакции описываются с помощью динамических систем дифференциальных уравнений, в которых скорость изменения концентрации каждого вещества зависит от концентраций веществ, участвующих в реакции. Отметим, что в настоящей работе рассматриваются модели гипотетических генных сетей — теоретических объектов, имеющих более простую структуру, чем природные генные сети, и состоящих из однотипных элементов, построенных по строгим правилам. Принципы построения данных объектов приведены в монографии [27] “Системная и компьютерная биология”.

Большинство моделей генных сетей основаны на уравнениях биохимической кинетики, которые были выведены Б. Гудвином и представлены в его монографии “Динамическая теория регуляторных процессов” [19]. Развиваемая автором теория построена в предположении широкой распространенности и важности колебательных режимов в клетке. Автор отмечает, что открытие регуляторных механизмов позволяет описать биохимические реакции с помощью дифференциальных уравнений, используя принципы статистической механики. Б. Гудвином были предложены нелинейные уравнения регуляции синтеза белков, мРНК и метаболитов, для исследования которых потребовались новые методы и подходы качественного анализа.

В 1975 году в работе [48] Л. Гласс предложил модель генной сети, представляющую собой кусочно-линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольной размерности с одной отрицательной и остальными положительными регуляторными связями. Здесь регуляторным связям соответствуют ступенчатые функции, и показано, что такая система является предельным случаем системы уравнений с гладкими функциями Хилла, характеризующими скорости транскрипции белков. Далее, в работах [49, 53] были разработаны методы дискретизации для динамических систем со ступенчатыми функциями. Подобные системы представляют интерес как с математической точки зрения, так и с биологической, поскольку ступенчатые функции соответствуют некоторым механизмам переключения в биохимических реакциях, вызванным, например, воздействием внешней среды.

Один из примеров осциллирующих режимов функционирования биологической системы — околосуточные колебания, называемые биологическими часами или циркадными ритмами. Система дифференциальных уравнений, имеющая кольцевую структуру и описывающая искусственные внутриклеточные часы для клеток бактерии *E.coli*, предложена в работах [46, 47], где три отрицательные регуляторные связи выражены функциями Хилла, а три положительные — линейными функциями. Далее, вопросы существования и устойчивости периодических решений для подобных моделей с гладкими правыми частями исследовались в работах [1, 8, 26]. В настоящей работе рассматривается подобная модель со ступенчатыми правыми частями, уравнения которой не обладают симметрией относительно циклической перестановки индексов. В работах [55, 58, 60] изучались вопросы взаимного расположения и количества предельных циклов

для двумерных динамических систем, уравнения которых содержат кусочно-линейные функции. В случае двумерной системы с полиномиальными правыми частями задача о числе предельных циклов представляет собой 16-ю проблему Гильберта, решенную в конце XX века, см. [54].

Цели и задачи исследования

Цель работы — изучение динамических систем, моделирующих функционирование генных сетей. В рамках работы над диссертацией были поставлены и решены следующие задачи:

- Описание фазового портрета данных динамических систем, выявление циклов и исследование вопросов единственности и устойчивости циклов;
- Исследование таких свойств отображения Пуанкаре, как монотонность и выпуклость;
- Стратификация инвариантных областей, описание комбинаторной структуры фазового портрета;
- Описание поведения траекторий, поиск условий неустойчивости стационарной точки с целью выявления циклов;
- Построение инвариантных поверхностей для траекторий динамической системы.

Научная новизна

Ранее в [49] изучались безразмерные трехмерные и четырехмерные динамические системы, моделирующие генные сети. В таких моделях коэффициенты, соответствующие скоростям разложения веществ в реакциях, равны единице. Траектории систем, рассмотренных в [49], имели кусочно-линейный вид. В настоящей работе изучаются модели генных сети, у которых скорости разложения различны, как и скорости синтеза.

В диссертации продолжается исследование шестимерных моделей генных сетей с тремя положительными и тремя отрицательными регуляторными связями. Изначально такая модель искусственной генной сети была предложена

в [46] с гладкими правыми частями, где положительные регуляторные связи выражены линейными функциями. Кроме того, данная модель рассматривалась в симметричном относительно циклической перестановки пар переменных $(m_1, p_1) \rightarrow (m_2, p_2) \rightarrow (m_3, p_3) \rightarrow (m_1, p_1) \rightarrow \dots$ случае. В настоящей работе было исследовано поведение траекторий двух подобных несимметричных систем, одна из которых имеет ступенчатые функции в правых частях, соответствующие регуляторным связям, а в другой модели правые части гладкие, а скорости разложения веществ в реакции описаны нелинейными функциями. В ступенчатом случае исследованы вопросы существования, единственности и устойчивости циклов.

Для шестимерной динамической системы формализован алгоритм поиска блоков минимальной и максимальной валентности, который может быть распространен на системы бóльших размерностей.

Теоретическая и практическая значимость работы

Настоящая работа носит теоретический характер. Полученные результаты можно распространить на системы бóльших размерностей со сходной структурой и монотонными функциями в правых частях, описывающими регуляторные связи. Результаты, приведенные в Главе 3, могут применяться при численном исследовании гладких моделей генных сетей, например, для поиска бифуркационных значений параметров, как в [13].

Разработанные методы и подходы были использованы соавторами при исследовании ряда природных генных сетей. В частности, в работе [41] рассмотрена шестимерная модель циркадного осциллятора, имеющего некольцевую структуру с немонотонными регуляторными связями. Полученные результаты вошли в отчеты по грантам РФФИ № 18-01-00057 и РНФ № 23-21-00019.

Методология и методы исследования

При исследовании поведения траекторий динамических систем, описывающих генные сети, используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, изложенные, например, в [18, 23, 36, 39]. В Главе 3 изучаются динамические системы с гладкими правыми частями, для которых применяется метод линеаризации в окрестности стационарной точки, а также вспомогатель-

ные критерии устойчивости характеристического многочлена матрицы Якоби, см. [5, 36]. Дальнейшие рассуждения о поведении траектории в окрестности стационарной точки, приведенные в Главе 3, основаны на теореме Гробмана – Хартмана. В случае, когда стационарная точка является гиперболической, данная теорема позволяет построить инвариантную поперность для траекторий динамической системы. Доказательство существования цикла для динамических систем, описанных в Главе 3 настоящей работы, опирается на результаты в области дифференциальной топологии, в частности, на теорему Брауэра о неподвижной точке, см. [34].

Классические теоремы о поведении траекторий в окрестности стационарной точки не применимы в случае динамических систем с разрывными правыми частями, как в Главах 1 и 2, поскольку системы такого вида не имеют точек покоя. В данном случае нами применялся метод дискретизации инвариантной области, который был предложен в работах [53, 49] и далее развит В. П. Голубятниковым, М. В. Казанцевым и А. А. Акинъшиным, см. [1, 6, 22]. Данный метод заключается в разбиении инвариантного параллелепипеда на подобласти, состоящие из более мелких параллелепипедов. Каждая подобласть содержит параллелепипеды одинаковой валентности, т.е. числа граней, через которые траектории динамической системы могут перейти в соседние параллелепипеды (блоки). В блоках такого разбиения можно найти решение системы, доопределив его на плоскостях разрыва по непрерывности, построить отображение Пуанкаре в явном виде и исследовать его свойства. Кроме того, разбиение инвариантной области и выделение инвариантной области позволяет точнее локализовать циклы в фазовых портретах систем больших размерностей. Для динамических систем, описанных в Главе 3, метод дискретизации также применяется с целью локализации циклов.

В последнем разделе Главы 2 построена траектория кусочно-линейной шестимерной системы со ступенчатыми функциями $\dot{m}_i = L_i(p_{i-1}) - m_i$, $\dot{p}_i = \Gamma_i(m_i) - p_i$, $i = 1, 2, 3$, у которой коэффициенты, отвечающие за скорости разложения веществ, равны единице. Здесь и далее систему такого вида будем называть безразмерной. Описание характера фазового портрета данной динамической системы основано на исследовании алгебраических свойств сдвигов точек вдоль траектории системы и применении теоремы Фробениуса – Перрона, сформулированной в [7].

Положения, выносимые на защиту

1. Получены достаточные условия существования цикла для трехмерной модели генной сети со ступенчатыми правыми частями
2. Получены достаточные условия существования, единственности и устойчивости цикла в инвариантной подобласти для четырехмерной модели генной сети с отрицательной и тремя положительными регуляторными связями, выраженными ступенчатыми функциями.
3. Разработан алгоритм построения инвариантных областей для динамических систем. Проведено построение инвариантной подобласти для шестимерной модели генной сети с положительными и отрицательными регуляторными связями.
4. Получены достаточные условия существования, единственности и устойчивости цикла для шестимерной динамической системы со ступенчатыми убывающими и возрастающими функциями в правых частях.
5. Проведено исследование поведения траекторий шестимерной динамической системы со ступенчатыми функциями в неинвариантной подобласти в безразмерном случае. Найдены условия, при которых в данной подобласти рассматриваемая динамическая система не имеет циклов.
6. Для модели трехкомпонентной генной сети с отрицательными связями и для модели шестикомпонентной генной сети с тремя положительными и тремя отрицательными связями, выраженными гладкими функциями, получены условия, при которых в инвариантной области существует единственная стационарная точка и существует цикл.
7. Построены двумерные инвариантные поверхности в инвариантных подобластях для трехмерной и шестимерной динамической системы с гладкими правыми частями.

Публикации

Результаты по теме диссертации опубликованы в сборниках трудов 4 конференций [17, 29, 30, 42], 12 научных статьях, из которых 8 — в изданиях, вклю-

ченных в перечень журналов, рекомендуемых ВАК, и состоящих в базах Scopus и Web of Science.

Работы [15, 16, 50, 51, 52] опубликованы в соавторстве с научным руководителем В. П. Голубятниковым, которому принадлежит постановка задачи и общее руководство. Доказательства теорем и вспомогательных лемм, приведенные в указанных научных статьях, являются результатом совместной работы, в которую автор диссертации внес принципиальный вклад.

Результаты, представленные в публикациях [32, 31], были получены автором самостоятельно.

В публикации [25] автору принадлежит описание математической постановки задачи для модели генных сетей с разрывными функциями и пример использования алгоритма для шестимерной динамической системы, а описание алгоритма и пример его использования для десятимерной системы с гладкими правыми частями — соавтору.

В работе [2] автором и В. П. Голубятниковым было описано построение инвариантных поверхностей для четырехмерной динамической системы со ступенчатыми функциями. В статье [9] автору диссертации принадлежит исследование стратификаций и слоений в случае шестимерной блочно-линейной динамической системы типа Еловица – Лейблера. Среди результатов, представленных в публикации [12], автором были получены достаточные условия существования цикла совместно с В. П. Голубятниковым.

Работа [13] содержала вычислительные эксперименты, которые были проведены соавторами, иллюстрирующие теоретические результаты, полученные автором диссертации.

Апробация результатов

Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах «Уравнения математической биологии» в Новосибирском государственном университете (руководители д. ф. - м. н., проф. В. П. Голубятников, к. ф. - м. н., доц. Э. А. Бибердорф, 2019 – 2024 гг.), «Обратные задачи математической физики» (руководители д. ф. - м. н. М. В. Нецадим, д. ф. - м. н. Д. С. Аниконов), «Избранные вопросы математического анализа» (руководитель д. ф. - м. н., проф. Г. В. Демиденко), «Информационно-вычислительные технологии»

(руководители д. ф. -м. н. С.Б. Медведев, д. ф. -м. н., проф. В.М. Ковеня, д. т.н., проф. В.Б. Баракнин), «Прикладная гидродинамика» (руководитель чл. – корр. РАН В. В. Пухначев). а также на 15 конференциях:

- Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2018», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 19 – 22 сентября 2018 г.;
- Международная конференция «Мальцевские чтения», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2018, 2020 и 2023 гг.;
- XV Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Математический центр в Академгородке, Новосибирск, 30 октября – 6 ноября 2023 г.;
- Российско-китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения», Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Математический центр в Академгородке, Новосибирск, 2 – 6 ноября 2023 г.;
- Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование», Омский государственный университет, Омск, 2019, 2020, 2021 и 2023 гг.
- 12th, 13th, 14th International Multiconference «Bioinformatics of Genome Regulation and Structure/Systems Biology» — BGRS/SB, ФИЦ «Институт цитологии и генетики», Новосибирск, 2020, 2022, 2024 г.;
- Конференция «Женщины в математике», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 6 июня 2022 г.;
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова и Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Суздаль, 28 июня – 4 июля 2024 г.

Структура и основные результаты работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Библиографический список содержит 60 наименований, в том числе публикации автора по теме диссертации. Общий объем составляет 72 страницы, включает 4 рисунка.

Введение состоит из обзора литературы и описания современного состояния исследуемой области математики, также во Введении приведены основные результаты работы по теме диссертации.

Глава 1 посвящена исследованию поведения траекторий двух динамических систем малых размерностей с разрывными функциями в правых частях. В разделе 1.1 приведена постановка задачи, биологическая интерпретация математической модели трехкомпонентной генной сети, дискретизация положительно инвариантной области. В данном разделе также описано построение отображения Пуанкаре, исследование свойств этого отображения и доказана Теорема 1 о существовании цикла в инвариантной области. В разделе 1.2 изучается четырехмерная динамическая система с одной отрицательной и тремя положительными регуляторными связями, которые в уравнениях системы выражены ступенчатыми функциями. Для этой системы построена диаграмма переходов траектории по блокам разбиения в инвариантной подобласти, доказаны вспомогательные утверждения о свойствах отображения Пуанкаре и теоремы о существовании, единственности и устойчивости цикла в инвариантной подобласти.

В Главе 2 изучается шестимерная динамическая система, описывающая генную сеть с тремя отрицательными и тремя положительными регуляторными связями. В разделе 2.1 приводится постановка задачи и ее биологическая интерпретация. Раздел 2.2 посвящен построению положительно инвариантного параллелепипеда для данной системы и его разбиению на подобласти, состоящие из более мелких параллелепипедов (блоков). В данном разделе также описан алгоритм поиска блоков минимальной валентности, равной единице, и максимальной валентности, равной пяти, а также построены диаграммы переходов траектории

по блокам в подобласти, состоящей из одновалентных блоков, и в подобласти из пятиявалентных блоков. В разделах 2.3 и 2.4 исследуются вопросы существования, единственности и устойчивости цикла, содержащегося в объединении 12 одновалентных блоков. В явном виде получены формулы переходов траектории данной системы по блокам валентности один. В данных разделах показано, что композиция 12 таких переходов является монотонной, и найдены условия, при которых эта композиция имеет неподвижную точку, а траектория этой точки является единственным и устойчивым циклом в инвариантной подобласти, состоящей из 12 одновалентных блоков.

В разделе 2.5 рассматривается безразмерный случай шестимерной динамической системы, т.е. все коэффициенты в правых частях, отвечающие за скорости разложения веществ, равны единице. Показано, что в неинвариантной подобласти, содержащей блоки максимальной валентности, траектории такой системы кусочно-линейны. Найдены условия для параметров, отвечающих за скорости синтеза, при которых данная подобласть не содержит циклов.

В Главе 3 изучаются трехмерная и шестимерная модель генных сетей, в которых вещества взаимодействуют по тому же принципу, что и в Главах 1 и 2. В данных моделях процессы синтеза и разложения веществ в биохимической реакции описаны нелинейными гладкими функциями в правых частях уравнений. Для таких систем построены инвариантные параллелепипеды, как в Главах 1 и 2, показана единственность стационарной точки и найдены условия, при которых в окрестности стационарной точки данные системы имеют циклы. В разделах 3.1 и 3.2 Главы 3 также описано построение двумерных инвариантных поверхностей, образованных траекториями рассматриваемых систем.

Глава 1. Динамические системы малых размерностей со ступенчатыми правыми частями

1.1 Трехмерная система

В настоящей главе будем исследовать качественное поведение трехмерной динамической системы со ступенчатыми функциями

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_3) - k_1x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = L_2(x_1) - k_2x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = L_3(x_2) - k_3x_3. \quad (1.1)$$

Данная система является моделью кольцевой геной сети, в которой взаимодействуют три компонента с концентрациями x_i . Скорость синтеза L_i вещества с номером i здесь зависит от концентрации вещества с номером $i - 1$. Скорость разложения выражена линейными функциями с коэффициентами k_i . Все L_i являются монотонно убывающими ступенчатыми функциями, а именно:

$$L_i(x_{i-1}) = \begin{cases} a_i k_i > 0 & \text{при } 0 \leq x_{i-1} \leq 1; \\ 0 & \text{при } x_{i-1} > 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь и далее положим $i = 1, 2, 3$; $i - 1 := 3$ при $i = 1$. Ранее в [49] рассматривались подобные динамические системы со ступенчатыми функциями, где коэффициенты k_i равны единице. Уравнения, в правых частях которых стоят функции вида (1.2), могут описывать механизмы переключения режимов функционирования моделируемых молекулярно-генетических систем, см. [27].

Для локализации и дискретизации фазового портрета будем строить положительно инвариантную область.

Определение 1.1. Область \mathcal{Q}^3 называется положительно инвариантной, если траектории динамической системы (1.1), попадающие в \mathcal{Q}^3 , не выходят из нее при $t \rightarrow +\infty$.

В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда все $a_1, a_2, a_3 > 1$. Как показано в [12], при невыполнении данного условия система (1.1) циклов не имеет.

Лемма 1.1. Параллелепипед $\mathcal{Q}^3 = [0, a_1] \times [0, a_2] \times [0, a_3]$ является инвариантным для траекторий системы (1.1).

Доказательство данной леммы следует из проверки знаков производных $\frac{dx_i}{dt}$ на плоскостях $\{x_i = 0\}$, $\{x_i = a_i\}$, которые являются внешними гранями параллелепипеда. Действительно, для всех i при $x_i = 0$ выполняется неравенство $\dot{x}_i|_{x_i=0} = L_i(x_{i-1}) \geq 0$. Если $x_i = a_i$, то $\dot{x}_i|_{x_i=a_i} = L_i(x_{i-1}) - a_i k_i \leq 0$, а при $x_i > a_i$ знак производной сохраняется. Значит, на внешних гранях векторное поле системы (1.1) направлено внутрь данного параллелепипеда. Следовательно, попав в параллелепипед Q^3 , траектории останутся в нем с ростом времени.

Если все $a_i > 1$, то область Q^3 содержит точку $E^3 = (1, 1, 1)$, в которой все ступенчатые функции L_i имеют разрыв первого рода. Стационарных точек динамическая система (1.1) не имеет.

Проведем через точку E^3 гиперплоскости $\{x_i = 1\}$. В результате параллелепипед Q^3 разбивается на 8 более мелких параллелепипедов, которые будем называть блоками. Обозначим каждый блок бинарным мультииндексом $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\}$, где $\varepsilon_i = 0$, если $x_i < 1$, и $\varepsilon_i = 1$ иначе.

Метод дискретизации инвариантной области, описанный выше, применялся в работах [6, 22, 49] как для трехмерных динамических систем, так и для старших размерностей.

Для данного разбиения справедлива

Лемма 1.2. *Для любой пары B_1, B_2 смежных блоков разбиения траектории всех точек их общей грани $F = B_1 \cap B_2$ проходят через эту грань только в одну сторону: либо из B_1 в B_2 , либо из B_2 в B_1 .*

Доказательство данной леммы приведено в [22] и следует из монотонности функций L_i .

Для полученного разбиения определим понятие валентности.

Определение 1.2. *Валентностью n -мерного блока B называется число его $(n - 1)$ -мерных граней, через которые траектории динамической системы могут переходить из B в соседние с ним блоки.*

Отметим, что для трехмерной системы (1.1) шесть из восьми блоков имеют валентность, равную единице. При переходе нумерация каждого следующего блока отличается от предыдущего значением только одного индекса и меняется согласно правилу

$$\{\#00*\} \rightarrow \{\#01*\}, \quad \{\#11*\} \rightarrow \{\#10*\}, \quad (1.3)$$

где # и * могут равняться нулю или единице или быть пустыми.

Через внутренние грани $\{x_i = 1\}$ трехвалентных блоков $\{000\}$ и $\{111\}$ траектории могут только выходить в соседние блоки. Порядок перехода траекторий системы (1.1) по одновалентным блокам области \mathcal{Q}^3 определяется диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 \{101\} & \xrightarrow{F_0} & \{001\} & \xrightarrow{F_1} & \{011\} \\
 F_5 \uparrow & & & & F_2 \downarrow \\
 \{100\} & \xleftarrow{F_4} & \{110\} & \xleftarrow{F_3} & \{010\}
 \end{array} \tag{1.4}$$

В данной диаграмме над каждой стрелкой указана внутренняя грань, по которой пересекаются два соседних блока.

$$F_0 : \{x_1^{(0)} = 1\} \times \{0 \leq x_2^{(0)} \leq 1\} \times \{1 \leq x_3^{(0)} \leq a_3\};$$

$$F_1 : \{0 \leq x_1^{(1)} \leq 1\} \times \{x_2^{(1)} = 1\} \times \{1 \leq x_3^{(1)} \leq a_3\};$$

$$F_2 : \{0 \leq x_1^{(2)} \leq 1\} \times \{1 \leq x_2^{(2)} \leq a_2\} \times \{x_3^{(2)} = 1\};$$

$$F_3 : \{x_1^{(3)} = 1\} \times \{1 \leq x_2^{(3)} \leq a_2\} \times \{0 \leq x_3^{(3)} \leq 1\};$$

$$F_4 : \{1 \leq x_1^{(4)} \leq a_1\} \times \{x_2^{(4)} = 1\} \times \{0 \leq x_3^{(4)} \leq 1\};$$

$$F_5 : \{1 \leq x_1^{(5)} \leq a_1\} \times \{0 \leq x_2^{(5)} \leq 1\} \times \{x_3^{(5)} = 1\}.$$

Обозначим $\varphi_j : F_j \rightarrow F_{j+1}$ сдвиг внутренних точек грани F_j вдоль траекторий системы (1.1), $j = \overline{1, 5}$, $F_6 = F_0$. Все дальнейшие вычисления, контролирующие переходы траекторий системы (1.1) из блока в блок, производятся для точек указанных граней.

Внутри каждого блока разбиения система (1.1) линейна с постоянными коэффициентами, а ее решение можно найти в явном виде. Поставим задачу Коши с начальными данными в момент времени $t = 0$:

$$x_1|_{t=0} = 1, \quad x_2|_{t=0} = x_2^{(0)}, \quad x_3|_{t=0} = x_3^{(0)},$$

где $(1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ — внутренняя точка грани F_0 . Такая задача Коши корректна при доопределении решения на грани F_0 , см. [38]. Решив эту задачу, получим уравнения интегральных кривых $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$x_1(t) = e^{-k_1 t}, \quad x_2(t) = (x_2^{(0)} - a_2)e^{-k_2 t} + a_2,$$

$$x_3(t) = (x_3^{(0)} - a_3)e^{-k_3 t} + a_3.$$

Исключим t , чтобы найти уравнения траектории в блоке $\{001\}$:

$$x_2 = (x_2^{(0)} - a_2)x_1^{k_2/k_1} + a_2, \quad x_3 = (x_3^{(0)} - a_3)x_1^{k_3/k_1} + a_3.$$

Данная траектория входит в блок $\{011\}$ в следующий момент времени $t = t_1$, пересекая грань F_1 во внутренней точке $(x_1^{(1)}, 1, x_3^{(1)})$, где

$$x_1^{(1)} = \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - x_2^{(0)}} \right)^{k_1/k_2}; \quad x_3^{(1)} = a_3 + (x_3^{(0)} - a_3) \cdot \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - x_2^{(0)}} \right)^{k_3/k_2}.$$

Полученные формулы описывают сдвиг $\varphi_0 : F_0 \rightarrow F_1$ внутренней точки грани F_0 вдоль траектории системы (1.1) в блоке $\{001\}$. Аналогичным образом будем решать задачи Коши с начальными данными на гранях, перечисленных в диаграмме (1.4). В итоге получаем формулы переходов траектории по блокам диаграммы (1.4)

С грани F_1 на грань F_2 :

$$\varphi_1 : F_1 \rightarrow F_2 : \quad x_1^{(2)} = x_1^{(1)} \cdot \left(x_3^{(1)} \right)^{-k_1/k_3};$$

$$x_2^{(2)} = a_2 + (1 - a_2) \cdot \left(x_3^{(1)} \right)^{-k_2/k_3}; \quad x_3^{(2)} = 1;$$

С грани F_2 на грань F_3 :

$$\varphi_2 : F_2 \rightarrow F_3 : \quad x_1^{(3)} = 1; \quad x_2^{(3)} = a_2 + (x_2^{(2)} - a_2) \cdot \left(\frac{a_1 - 1}{a_1 - x_1^{(2)}} \right)^{k_2/k_1};$$

$$x_3^{(3)} = \left(\frac{a_1 - 1}{a_1 - x_1^{(2)}} \right)^{k_3/k_1};$$

С грани F_3 на грань F_4

$$\varphi_3 : F_3 \rightarrow F_4 : \quad x_1^{(4)} = a_1 + (1 - a_1) \cdot \left(x_2^{(3)} \right)^{-k_1/k_2}; \quad x_2^{(4)} = 1;$$

$$x_3^{(4)} = x_3^{(3)} \cdot \left(x_2^{(3)}\right)^{-k_3/k_2};$$

С грани F_4 на грань F_5

$$\varphi_4 : F_4 \rightarrow F_5 : \quad x_1^{(5)} = a_1 + (x_1^{(4)} - a_1) \cdot \left(\frac{a_3 - 1}{a_3 - x_3^{(4)}}\right)^{k_1/k_3};$$

$$x_2^{(5)} = \left(\frac{a_3 - 1}{a_3 - x_3^{(4)}}\right)^{k_2/k_3}; \quad x_3^{(5)} = 1;$$

С грани F_5 на грань $F_6 = F_0$

$$\varphi_5 : F_5 \rightarrow F_6 = F_0 : \quad x_1^{(6)} = 1; \quad x_2^{(6)} = x_2^{(5)} \cdot \left(x_1^{(5)}\right)^{-k_2/k_1};$$

$$x_3^{(6)} = a_3 + (1 - a_3) \cdot \left(x_1^{(5)}\right)^{-k_3/k_1}.$$

Все переходы корректно определены и являются гладкими функциями от координат внутренних точек граней, вплоть до их границ. Отметим, что композиция сдвигов $\Phi : F_0 \rightarrow F_0$ имеет неподвижную точку с координатами $(1, 1, 1)$, которую будем называть тривиальной. Найдем условия, при которых у отображения Φ существует нетривиальная неподвижная точка.

Рассмотрим две точки $M = (1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in F_0$ и $\widetilde{M} = (1, \widetilde{x}_2^{(0)}, \widetilde{x}_3^{(0)}) \in F_0$ и их образы $\Phi(M) = (1, x_2^{(6)}, x_3^{(6)})$ и $\Phi(\widetilde{M}) = (1, \widetilde{x}_2^{(6)}, \widetilde{x}_3^{(6)})$ внутри той же грани. Покажем, что справедлива

Лемма 1.3. *Если $\widetilde{x}_2^{(0)} \leq x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)} \leq \widetilde{x}_3^{(0)}$ то $\widetilde{x}_2^{(6)} \leq x_2^{(6)}$, $x_3^{(6)} \leq \widetilde{x}_3^{(6)}$, причем если из двух первых неравенств хотя бы одно строгое, то оба последних неравенства строгие.*

Поскольку $\Phi = \varphi_5 \dots \varphi_0$, то будем проверять неравенства, используя полученные выше формулы для каждого перехода, начиная с $\varphi_0 : F_0 \rightarrow F_1$:

$$x_1^{(1)} = \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - x_2^{(0)}}\right)^{k_1/k_2} \geq \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - \widetilde{x}_2^{(0)}}\right)^{k_1/k_2} = \widetilde{x}_1^{(1)};$$

$$x_3^{(1)} = a_3 + (x_3^{(0)} - a_3) \cdot \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - x_2^{(0)}}\right)^{k_3/k_2} \leq$$

$$\leq a_3 + (\tilde{x}_3^{(0)} - a_3) \cdot \left(\frac{a_2 - 1}{a_2 - \tilde{x}_2^{(0)}} \right)^{k_3/k_2} = \tilde{x}_3^{(1)}.$$

Выполнение второго неравенства кажется не столь очевидным, но оно верно, поскольку $x_3^{(0)} \leq \tilde{x}_3^{(0)} < a_3$.

Остальные неравенства проверяются аналогичным образом, а строгость неравенств для образов следует из строгости неравенств для начальных координат $\tilde{x}_2^{(0)} < x_2^{(0)}$ или $x_3^{(0)} < \tilde{x}_3^{(0)}$. Далее под монотонностью отображения Φ будем иметь в виду выполнение данных неравенств, задающих частичный порядок для точек грани F_0 .

Далее докажем вспомогательную лемму о производных отображения Пуанкаре Φ .

Лемма 1.4. *Производные*

$$d_{11} = \frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}}, \quad d_{12} = \frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_3^{(0)}}, \quad d_{21} = \frac{\partial x_3^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}}, \quad d_{22} = \frac{\partial x_3^{(6)}}{\partial x_3^{(0)}},$$

вычисленные при $x_2^{(0)} = 1$, $x_3^{(0)} = 1$, удовлетворяют неравенствам

$$d_{11} > 1, \quad d_{12} < 0, \quad d_{21} < 0, \quad d_{22} > 1.$$

Данные оценки для производных вытекают из непосредственного вычисления матриц Якоби для каждого перехода. Приведем здесь матрицы для композиций пар $\varphi_1\varphi_0 : F_0 \rightarrow F_2$, $\varphi_3\varphi_2 : F_2 \rightarrow F_4$, $\varphi_5\varphi_4 : F_4 \rightarrow F_6 = F_0$, вычисленные в точке $E^3 = (1, 1, 1)$.

$$J(\varphi_1\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{a_3 k_1}{(a_2 - 1)k_2} & -\frac{k_1}{k_3} \\ 1 - a_3 & \frac{(a_2 - 1)k_2}{k_3} \end{pmatrix};$$

$$J(\varphi_3\varphi_2) = \begin{pmatrix} \frac{a_2 k_3}{(a_1 - 1)k_1} & -\frac{k_3}{k_2} \\ 1 - a_2 & \frac{(a_1 - 1)k_1}{k_2} \end{pmatrix};$$

$$J(\varphi_5\varphi_4) = \begin{pmatrix} \frac{a_1k_3}{(a_3-1)k_3} & -\frac{k_2}{k_1} \\ 1-a_1 & \frac{(a_3-1)k_3}{k_1} \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби композиции $\Phi = \varphi_5\varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1\varphi_0$ является произведением трех вычисленных матриц, а ее элементы имеют вид:

$$d_{11} = 1 + a_1a_3 + \frac{a_1a_2a_3}{(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)},$$

$$d_{22} = 1 + a_1a_3(a_2-1),$$

$$d_{12} = -\frac{a_1k_2}{(a_3-1)k_3} \left[\frac{a_2}{a_1-1} + (a_2-1)a_3 \right],$$

$$d_{21} = -\frac{a_3k_3}{k_2} \left[\frac{a_2}{a_2-1} + (a_3-1)a_1 \right],$$

При условии, что все $a_i > 1$, получаем

$$d_{11} > 1, \quad d_{12} < 0, \quad d_{21} < 0, \quad d_{22} > 1.$$

В работе [12] доказана следующая

Лемма 1.5. *Если точка $(x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ прямоугольника $[0, 1] \times [1, a_3]$ достаточно близка к его вершине $(1, 1)$ и отлична от нее, то $x_2^{(6)} < x_2^{(0)}$ и $x_3^{(6)} > x_3^{(0)}$.*

В самом деле, $x_2^{(6)} = x_3^{(6)} = 1$ при $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$, тогда для точек $x_2^{(0)} = 1 - \Delta x_2$, $x_3^{(0)} = 1 + \Delta x_3$ из малой окрестности вершины $(1, 1)$ их образы $x_2^{(6)}$, $x_3^{(6)}$ под действием отображения Пуанкаре Φ будут равны

$$x_2^{(6)} = 1 - (d_{11} + \alpha)\Delta x_2 + (d_{12} + \beta)\Delta x_3; \quad x_3^{(6)} = 1 - (d_{21} + \gamma)\Delta x_2 + (d_{22} + \delta)\Delta x_3$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \rightarrow 0$, когда Δx_2 и Δx_3 стремятся к нулю. Пусть $\Delta x_2, \Delta x_3 > 0$ и настолько малы, что выполнены неравенства

$$d_{11} + \alpha > 1; \quad d_{12} + \beta < 0; \quad d_{21} + \gamma < 0; \quad d_{22} + \delta > 1.$$

Тогда $x_2^{(6)} < 1 - \Delta x_2 = x_2^{(0)}$ и $x_3^{(6)} > 1 + \Delta x_3 = x_3^{(0)}$, и лемма доказана.

Под действием монотонного непрерывного отображения Пуанкаре Φ грань F_0 переходит в свою внутренность и является инвариантной относительно это-

го отображения. При этом вершина $(1, 0, a_3)$ грани F_0 , противоположная точке E^3 , переходит внутрь F_0 , а при нескольких итерациях отображения Пуанкаре мы получим монотонно убывающую последовательность точек, не доходящую до точки E^3 и ограниченную снизу в силу Леммы 1.5. Такая последовательность имеет предельную точку, неподвижную относительно Φ , а ее траектория является циклом, содержащимся в объединении блоков диаграммы (1.4). Таким образом, доказана

Теорема 1.1. *Если все $a_i > 1$, то у системы (1.1) существует цикл, который переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы (1.4).*

В работе [12] было показано, что условие $a_i > 1$ существования цикла является не только достаточным, но и необходимым.

1.2 Четырехмерная система

В работе [49] была предложена n -мерная модель генной сети с одной отрицательной и $n - 1$ положительной связью в безразмерном случае. Будем рассматривать четырехмерный случай такой системы со ступенчатыми функциями

$$\frac{dy_1}{dt} = L(y_4) - k_1 y_1; \quad \frac{dy_j}{dt} = \Gamma_j(y_{j-1}) - l_j y_j, \quad (1.5)$$

здесь и далее $j = 2, 3, 4$. Отметим, что, в отличие от [49], положительные коэффициенты k_1, l_j , отвечающие за разложение веществ, различны.

Отрицательная связь в такой генной сети описывается монотонной убывающей функцией $L(y_4)$, определяемой, как и ранее, соотношением (1.2). Монотонно возрастающие функции, выражающие положительные связи, заданы следующим образом:

$$\Gamma_j(y_{j-1}) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq y_{j-1} \leq 1; \\ b_j l_j > 0, & \text{при } y_{j-1} > 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Принципы построения инвариантной области для траекторий системы (1.5) аналогичны принципам, приведенным в предыдущем разделе. Дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении, что $a_1, b_2, b_3, b_4 > 1$.

Вычислив производные при $y_j = 0$, $y_1 = 0$, $y_1 = a_1$, $y_j = b_j$, $j = 2, 3, 4$, можно увидеть, что векторное поле системы (1.5) на внешних гранях $\{y_1 = a_1\}$, $\{y_1 = 0\}$, $\{y_j = 0\}$, $\{y_j = b_j\}$, а также при $y_1 \geq a_1$, $y_j \geq b_j$ направлено внутрь параллелепипеда \mathcal{Q}^4 , а значит, траектории, попав в \mathcal{Q}^4 , не покидают его с ростом времени. Таким образом, справедлива

Лемма 1.6. *Параллелепипед $\mathcal{Q}^4 = [0, a_1] \times [0, b_2] \times [0, b_3] \times [0, b_4]$ является инвариантным для траекторий системы (1.5).*

Разобьем инвариантный параллелепипед на 16 блоков, проведя через точку $E^4 = (1, 1, 1, 1)$ гиперплоскости $\{y_1 = 1\}$, $\{y_j = 1\}$, параллельные координатным. В результате 8 из 16 блоков имеют валентность, равную единице, а оставшиеся блоки трехвалентные. В настоящей работе рассматриваются траектории, проходящие по одновалентным блокам. Для убывающей функции L правила смены индекса при переходе из блока в блок определены в предыдущем разделе. Для возрастающих функций Γ_j справедливы следующие правила

$$\{\#01*\} \rightarrow \{\#00*\}, \quad \{\#10*\} \rightarrow \{\#11*\},$$

где $\#$ и $*$ — наборы индексов, возможно, пустые. Правила перехода для монотонно убывающих и монотонно возрастающих функций установлены в работе [22]. Для системы (1.5) направления переходов траектории по одновалентным блокам разбиения определяются диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 \{1111\} & \xrightarrow{F_0=\{y_1=1\}} & \{0111\} & \xrightarrow{F_1=\{y_2=1\}} & \{0011\} \\
 F_7=\{y_4=1\} \uparrow & & & & F_2=\{y_3=1\} \downarrow \\
 \{1110\} & & & & \{0001\} \\
 F_6=\{y_3=1\} \uparrow & & & & F_3=\{y_4=1\} \downarrow \\
 \{1100\} & \xleftarrow{F_5=\{y_2=1\}} & \{1000\} & \xleftarrow{F_4=\{y_1=1\}} & \{0000\}
 \end{array} \tag{1.7}$$

Для упрощения дальнейших вычислений выполним параллельный перенос координат, при котором точка E_4 перейдет в начало системы координат:

$$x_i = y_i - 1; \quad i = \overline{1, 4}.$$

Тогда область Q^4 будет представлена следующим образом:

$$Q^4 = [-1, a - 1] \times [-1, b_2 - 1] \times [-1, b_3 - 1] \times [-1, b_4 - 1].$$

Поскольку в каждом блоке разбиения система (1.5) линейна, можно в явном виде выписать уравнения траектории, проходящей по блокам диаграммы (1.7). В качестве начальной точки при $t = 0$ зададим точку $X^{(0)}$ на грани $F_0 = \{1111\} \cap \{0111\}$ с координатами

$$x_1^{(0)} = 0; \quad x_2^{(0)} > 0; \quad x_3^{(0)} > 0; \quad x_4^{(0)} > 0.$$

В блоке $\{0111\}$ система (1.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1(x_1 + 1); & \dot{x}_2 &= -l_2(x_2 + 1); \\ \dot{x}_3 &= l_3b_3 - l_3(x_3 + 1); & \dot{x}_4 &= l_4b_4 - l_4(x_4 + 1). \end{aligned}$$

Тогда траектория с началом в точке $X^{(0)}$ в указанном блоке описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_1^{(0)} + 1)e^{-k_1t} - 1; & x_2(t) &= (x_2^{(0)} + 1)e^{-l_2t} - 1; \\ x_3(t) &= (b_3 - 1) + (x_3^{(0)} - (b_3 - 1))e^{-l_3t}; \\ x_4(t) &= (b_4 - 1) + (x_4^{(0)} - (b_4 - 1))e^{-l_4t}. \end{aligned}$$

Далее траектория в момент $t = t_1$ пересекает грань $F_1 = \{0111\} \cap \{0011\}$ в точке $X^{(1)}$ с координатами, полученными из решения системы с учетом $x_2^{(1)} = 0$,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (1 + x_2^{(0)})^{-\frac{k_1}{l_2}} - 1; & x_2^{(1)} &= 0; \\ x_3^{(1)} &= (b_3 - 1) + \frac{x_3^{(0)} - (b_3 - 1)}{(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_3}{l_2}}}; & x_4^{(1)} &= (b_4 - 1) + \frac{x_4^{(0)} - (b_4 - 1)}{(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_4}{l_2}}}. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют сдвиг $f_0 : F_0 \rightarrow F_1$ точек грани вдоль траектории, переходящей из блока $\{0111\}$ в блок $\{0011\}$, где система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1(x_1 + 1); & \dot{x}_2 &= -l_2(x_2 + 1); \\ \dot{x}_3 &= -l_3(x_3 + 1); & \dot{x}_4 &= l_4b_4 - l_4(x_4 + 1). \end{aligned}$$

Решая эту систему, мы получаем

$$x_1(t) = (x_1^{(1)} + 1)e^{-k_1 t} - 1; \quad x_2(t) = (x_2^{(1)} + 1)e^{-l_2 t} - 1;$$

$$x_3(t) = (x_3^{(1)} + 1)e^{-l_3 t} - 1; \quad x_4(t) = (b_4 - 1) + (x_4^{(1)} - (b_4 - 1))e^{-l_4 t}.$$

Приравняем третье выражение к нулю, поскольку $x_3^{(2)} = 0$ в некоторый момент времени $t = t_2$.

Отсюда $e^{-l_3 t_2} = \frac{1}{x_3^{(1)} + 1}$, и координаты точки $X^{(2)}$ выражаются через координаты точки $X^{(1)}$ следующим образом

$$x_1^{(2)} = (x_1^{(1)} + 1)(1 + x_3^{(1)})^{-\frac{k_1}{l_3}} - 1; \quad x_2^{(2)} = (x_3^{(1)} + 1)^{-\frac{l_2}{l_3}} - 1;$$

$$x_3^{(2)} = 0; \quad x_4^{(2)} = (b_4 - 1) + \frac{x_4^{(1)} - (b_4 - 1)}{(1 + x_3^{(1)})^{\frac{l_4}{l_3}}}.$$

Данные формулы описывают второй переход $f_1 : F_1 \rightarrow F_2$. Аналогично выводятся формулы для остальных переходов. Их композиция является отображением Пуанкаре $\tilde{\Phi} = f_7 f_6 f_5 f_4 f_3 f_2 f_1 f_0$ грани F_0 в себя.

С целью упрощения дальнейших вычислений введем линейный диффеоморфизм $\mathcal{L} = K^3 \rightarrow F_0$, где $K^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ — трехмерный единичный куб, действующий по правилу

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) = (0, (b_2 - 1)u_1, (b_3 - 1)u_2, (b_4 - 1)u_3),$$

и далее будем исследовать свойства нормализованного отображения Пуанкаре $\Phi = \mathcal{L}^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ \mathcal{L} : K^3 \rightarrow K^3$ единичного куба K^3 в себя.

Докажем вспомогательное утверждение о монотонности и выпуклости координатных функций отображения Пуанкаре $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Утверждение 1.1. *а) Все первые производные координатных функций φ_j положительны, вторые производные отрицательны;*

б) Отображение Φ инъективно, его якобиан $\det J(\Phi)$ строго положителен в каждой точке единичного куба K^3 ;

$$c) \left. \frac{d\varphi_j(u_1, u_2, u_3)}{du_j} \right|_O > 1.$$

Для доказательства данного утверждения достаточно вычислить производные компонент отображения $\tilde{\Phi}$, поскольку действие диффеоморфизма \mathcal{L} не меняет знаки производных.

Матрица первых производных перехода $f_0 : F_0 \rightarrow F_1$ имеет вид:

$$\frac{\partial(x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_1^{(1)})}{\partial(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})} = \begin{pmatrix} \frac{l_3(b_3 - 1 - x_3^{(0)})}{l_2(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_3}{l_2} + 1}} & (1 + x_2^{(0)})^{-\frac{l_3}{l_2}} & 0 \\ \frac{l_4(b_4 - 1 - x_4^{(0)})}{l_2(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_4}{l_2} + 1}} & 0 & (1 + x_2^{(0)})^{-\frac{l_4}{l_2}} \\ -\frac{k_1}{l_2}(1 + x_2^{(0)})^{-\frac{k_1}{l_2} - 1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На грани $F_1 = \{x_2^{(1)} = 0\}$ направление, соответствующее координате $x_1^{(1)}$, является отрицательным. Сделаем замену по правилу $x_1^{(1)} := -x_1^{(1)}$. Третья строка матрицы при такой замене умножается на (-1) . Тогда грань F_1 будет лежать в положительном октанте и все первые производные больше нуля. Далее, вычислим вторые производные уже для положительных элементов матрицы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_3^{(0)} \partial x_2^{(0)}} &= -\frac{l_3}{l_2}(1 + x_2^{(0)})^{-\frac{l_3}{l_2} - 1}; & \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{(\partial x_2^{(0)})^2} &= \left(-\frac{l_3}{l_2} - 1\right) \frac{l_3(b_3 - 1 - x_3^{(0)})}{l_2(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_3}{l_2} + 2}}; \\ \frac{\partial^2 x_4^{(1)}}{\partial x_4^{(0)} \partial x_2^{(0)}} &= -\frac{l_4}{l_2}(1 + x_2^{(0)})^{-\frac{l_4}{l_2} - 1}; & \frac{\partial^2 x_4^{(1)}}{(\partial x_2^{(0)})^2} &= \left(-\frac{l_4}{l_2} - 1\right) \frac{l_4(b_4 - 1 - x_4^{(0)})}{l_2(1 + x_2^{(0)})^{\frac{l_4}{l_2} + 2}}; \\ \frac{\partial^2 x_1^{(1)}}{(\partial x_2^{(0)})^2} &= \left(-\frac{k_1}{l_2} - 1\right) \frac{k_1}{l_2}(1 + x_2^{(0)})^{-\frac{k_1}{l_2} - 2}. \end{aligned}$$

Поскольку при $i = 2, 3, 4$ все координаты $0 < x_i^{(0)} < b_i - 1$, то $\frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_3^{(0)} \partial x_2^{(0)}}$,

$\frac{\partial^2 x_4^{(1)}}{\partial x_4^{(0)} \partial x_2^{(0)}}$, $\frac{\partial^2 x_1^{(1)}}{(\partial x_2^{(0)})^2}$ отрицательны.

Вычислим ниже первые производные второго перехода $f_1 : F_1 \rightarrow F_2$:

$$\frac{\partial(x_4^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})}{\partial(x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_1^{(1)})} = \begin{pmatrix} \frac{l_4(b_4 - 1 - x_4^{(1)})}{l_3(1 + x_3^{(1)})^{\frac{l_4}{l_3} + 1}} & (1 + x_3^{(1)})^{-\frac{l_4}{l_3}} & 0 \\ -\frac{k_1(1 + x_1^{(1)})}{l_3(1 + x_3^{(1)})^{\frac{k_1}{l_3} + 1}} & 0 & (1 + x_3^{(1)})^{-\frac{k_1}{l_3}} \\ -\frac{l_2}{l_3}(1 + x_3^{(1)})^{-\frac{l_2}{l_3} - 1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На грани F_2 координатные оси, соответствующие $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$, имеют отрицательное направление. Умножив на (-1) вторую и третью строки, а также третий столбец, отвечающий за $x_1^{(1)}$, получим матрицу с положительными производными. Продифференцируем элементы матрицы еще раз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_4^{(2)}}{\partial x_4^{(1)} \partial x_3^{(1)}} &= -\frac{l_4}{l_3}(1 + x_3^{(1)})^{-\frac{l_4}{l_3} - 1}; & \frac{\partial^2 x_4^{(2)}}{(\partial x_3^{(1)})^2} &= \left(-\frac{l_4}{l_3} - 1\right) \frac{l_4(b_4 - 1 - x_4^{(1)})}{l_3(1 + x_3^{(1)})^{\frac{l_4}{l_3} + 2}}; \\ \frac{\partial^2 x_1^{(2)}}{\partial x_1^{(1)} \partial x_3^{(1)}} &= -\frac{k_1}{l_3}(1 + x_3^{(1)})^{-\frac{k_1}{l_3} - 1}; & \frac{\partial^2 x_1^{(2)}}{(\partial x_3^{(1)})^2} &= \left(-\frac{k_1}{l_3} - 1\right) \frac{k_1(1 + x_1^{(1)})}{l_3(1 + x_3^{(1)})^{\frac{k_1}{l_3} + 2}}; \\ \frac{\partial^2 x_2^{(2)}}{(\partial x_3^{(1)})^2} &= \left(-\frac{l_2}{l_3} - 1\right) \frac{l_2}{l_3}(1 + x_3^{(1)})^{-\frac{l_2}{l_3} - 2}. \end{aligned}$$

На грани F_1 координаты удовлетворяют неравенствам:

$$-1 < x_1^{(1)} \leq 0; \quad 0 < x_3^{(1)} < b_3 - 1; \quad 0 < x_4^{(1)} < b_4 - 1,$$

значит, и для формул перехода f_1 вторые производные отрицательны.

Несложные, но громоздкие вычисления показывают, что первые производные $\tilde{\Phi} = f_7 \circ f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0$ положительны, а вторые производные формул каждого перехода отрицательны. При этом нормализация на знак производной не влияет, отсюда можем заключить, что первые производные компонент Φ положительны, а вторые — отрицательны. Якобиан этого отображения равен произведению якобианов переходов f_i , каждый из которых больше нуля. Это

нетрудно получить, раскрыв определитель каждой матрицы Якоби по третьей строке.

Далее, вычислим матрицы Якоби в начале системы координат:

$$\frac{\partial(x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_1^{(1)})}{\partial(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})} \Big|_O = \begin{pmatrix} \frac{l_3(b_3 - 1)}{l_2} & 1 & 0 \\ \frac{l_4(b_4 - 1)}{l_2} & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x_4^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})}{\partial(x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_1^{(1)})} \Big|_O = \begin{pmatrix} \frac{l_4(b_4 - 1)}{l_3} & 1 & 0 \\ -\frac{k_1}{l_3} & 0 & 1 \\ -\frac{l_2}{l_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы произведения восьми таких матриц положительны. Утверждение 1.1 доказано.

Доказательство единственности неподвижной точки отображения Пуанкаре было проведено ранее для трехмерной системы со ступенчатыми функциями вида (1.2) в работе [11]. Идея заключается в последовательном представлении каждой j -той компоненты отображения Φ как функции, зависящей от координат с номерами $j + 1, \dots, 3$. На последнем шаге мы получим выражение для третьей координатной функции φ_3 и для третьей координаты u_3^0 неподвижной точки, из которого можно найти и координаты u_1^0, u_2^0 . Для четырехмерной и шестимерной систем потребуется провести большее число шагов, чем в [11].

Лемма 1.7. *На интервале $(0, 1)$ существует единственная точка u_1^0 такая, что $\varphi_1(u_1^0, 0, 0) = u_1^0$.*

Для доказательства Леммы 1.7 введем функцию $\Delta_0(u_1) = \varphi_1(u_1, 0, 0) - u_1$. При $u_1 = 0$ это выражение равно нулю, а $\Delta_0(1) = \varphi_1(1, 0, 0) - 1 < 0$. Вторая производная $\frac{d^2\Delta_0}{du_1^2} = \frac{d^2\varphi_1}{du_1^2}$ отрицательна по Утверждению 1.1, а значит, на интервале $(0, 1)$ функция Δ_0 выпукла вверх и на концах принимает значения разных знаков. Тогда существует единственная точка $u_1^0 \in (0, 1)$, в которой

$$\frac{d\Delta_0}{du_1} \Big|_{u_1=u_1^0} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} \Big|_{u_1=u_1^0} < 1 \quad \text{и} \quad \varphi(u_1^0, 0, 0) = u_1^0.$$

Лемма 1.7 доказана.

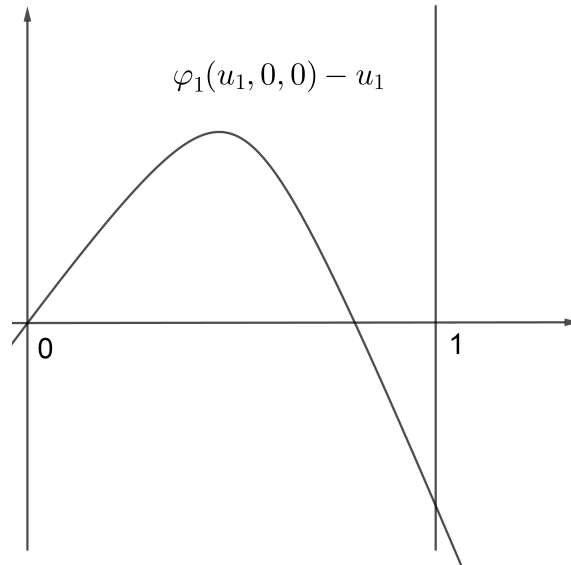


Рис. 1 – График $\Delta_0(u_1)$

Далее введем функцию $\Delta_1(u_1, u_2, u_3) = \varphi_1(u_1, u_2, u_3) - u_1$ для фиксированных $(u_2, u_3) \in (0, 1] \times (0, 1]$ и покажем, что теперь уже внутри единичного куба K^3 справедлива

Лемма 1.8. *Существует единственная точка $u_1 = \psi_1(u_2, u_3)$ на интервале $(0, 1)$, для которой верно*

$$\Delta_1(\psi_1(u_2, u_3), u_2, u_3) = 0, \quad \text{или} \quad \varphi_1(\psi_1(u_2, u_3), u_2, u_3) = \psi_1(u_2, u_3).$$

Кроме того, в этой точке $\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} < 0$.

Из прямых вычислений и монотонности отображения Пуанкаре следует, что для всех ненулевых (u_2, u_3) справедливы неравенства $\Delta_1(0, u_2, u_3) > 0$ и $\Delta_1(1, u_2, u_3) < 0$. Вторая производная $\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial u_1^2}$ совпадает со второй производной координатной функции φ_1 , которая отрицательна. Отсюда у выпуклой вверх функции $\Delta_1(u_1)$, принимающей на концах отрезка $[0, 1]$ значения разных знаков, существует единственная точка u_1 , в которой $\Delta_1(u_1) = 0$, или $u_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3)$. Первая производная $\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1}$ не обращается в ноль в окрестности этой точки. Тогда по теореме о неявной получим представление $u_1 = \psi_1(u_2, u_3) \in (0, 1)$, где $\varphi_1(\psi_1(u_2, u_3), u_2, u_3) = \psi_1(u_2, u_3)$. При этом функция $\psi_1(u_2, u_3)$ гладкая и определена единственным образом. Для первой производной в точке $P_1 = (\psi_1(u_2, u_3), u_2, u_3)$ выполняется неравенство $\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} < 0$, отсюда $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} < 1$.

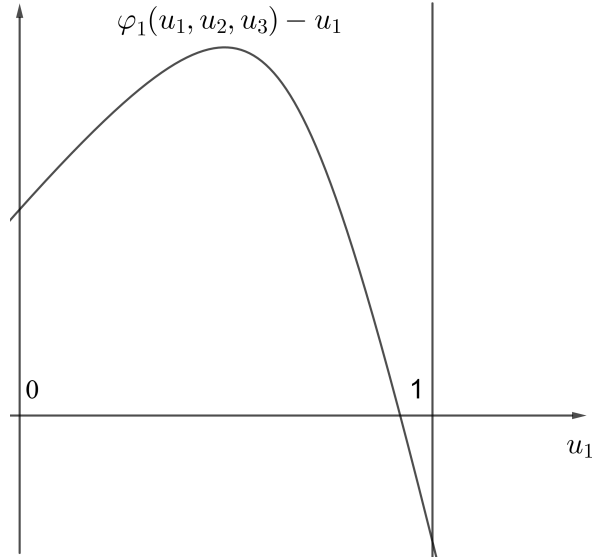


Рис. 2 – График $\Delta_1(u_1, u_2, u_3)$ при фиксированных (u_2, u_3)

Продифференцируем второе равенство из Леммы 1.8:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3};$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} \left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3}.$$

Правые части обеих равенств положительны, как и выражение в скобках, тогда в точке P_1

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} > 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} > 0.$$

Вычислив вторые производные в той же точке, получим:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_2^2} \left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_2^2};$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_3^2} \left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u_3}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_3} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_3^2};$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_2 \partial u_3} \left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_3}\right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_2 \partial u_3}.$$

Из предыдущих выкладок и Утверждения 1.1 вытекает, что вторые производные в левых частях полученных равенств отрицательны.

Проведем аналогичные рассуждения для второй координатной функции. Пусть $\Delta_2(u_2, u_3) = \varphi_2(\psi_1(u_2, u_3), u_2, u_3) - u_2$. Эта функция является выпуклой вверх, при этом $\Delta_2(0, u_3) > 0$ и $\Delta_2(1, u_3) < 0$ для всех $u_3 \in (0, 1]$. Тогда най-

дется точка $u_2 = \psi_2(u_3)$ и притом единственная, в которой $\Delta_2 = 0$, а ее первая производная отрицательна, как это показано на Рис. 2.

Лемма 1.9. *Для любых $u_3 \in (0, 1]$, интервал $(0, 1)$ содержит единственную точку $u_2 = \psi_2(u_3)$, в которой $\frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} < 0$, а также*

$$\Delta_2(\psi_1(\psi_2(u_3), u_3), \psi_2(u_3), u_3) = 0,$$

$$\text{т.е. } \varphi_2(\psi_1(\psi_2(u_3), u_3), \psi_2(u_3), u_3) = \psi_2(u_3).$$

Продифференцируем последнее равенство из Леммы 1.9 в точке $P_2 = (\psi_1(\psi_2(u_3), u_3), \psi_2(u_3), u_3)$:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} = \psi_2'(1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2})$$

Из доказательства Леммы 1.8 получим положительное выражение слева. Справа в скобках имеем первую производную функции Δ_2 , взятую с противоположным знаком. По Лемме 1.9 эта производная отрицательна. Тогда условие $\psi_2' > 0$ дает нам положительную правую часть. Если продифференцировать указанное равенство еще раз, то получим $\psi_2'' < 0$. Эти неравенства понадобятся при доказательстве следующей

Лемма 1.10. *Вторая производная по переменной u_3 функции $\Delta_3 = \varphi_3(\psi_1(\psi_2(u_3), u_3), \psi_2(u_3), u_3) - u_3$ является отрицательной.*

Вычислим сначала первую производную функции Δ_3 по переменной u_3 :

$$\frac{\partial \Delta_3}{\partial u_3} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \cdot \psi_2' + \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} \right) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \cdot \psi_2' + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} - 1$$

Для определения знаков производных будем использовать леммы, доказанные на предыдущих шагах.

Далее вычислим вторую производную функции Δ_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_3}{\partial u_3^2} = & 2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1 \partial u_3} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_3^2} + \\ & + (\psi_2')^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_2^2} \right) + \\ & + 2\psi_2' \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1 \partial u_3} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_2 \partial u_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_2 \partial u_3} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \right) + \psi_2'' \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \right) \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в этой сумме является отрицательным, согласно предыдущим рассуждениям. Отсюда вытекает утверждение Леммы 1.10.

Функция $\Delta_3 = \varphi_3(\psi_1(\psi_2(u_3), u_3), \psi_2(u_3), u_3) - u_3$ является выпуклой вверх и на концах интервала $(0, 1)$ принимает значения разных знаков. В итоге найдется единственная точка $u_3^0 \in (0, 1)$ такая, что

$$\Delta_3(u_3^0) = \varphi_3(\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0), u_3^0) - u_3^0 = 0,$$

или $\varphi_3(\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0), u_3^0) = u_3^0$. Точка U_0 , координаты которой определяются соотношениями

$$\varphi_1(\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0), u_3^0) = \psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0)$$

$$\varphi_2(\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0), u_3^0) = \psi_2(u_3^0)$$

$$\varphi_3(\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0), u_3^0) = u_3^0,$$

является неподвижной для отображения $\Phi : K^3 \rightarrow K^3$, или $P_0 = \mathcal{L}^{-1}U_0$ для $\tilde{\Phi} : F_0 \rightarrow F_0$. Таким образом, мы доказали единственность цикла в подобласти, состоящей из одновалентных блоков.

Теорема 1.2. При $a_1 > 1$, $b_j > 1$, $j = 2, 3, 4$ инвариантная подобласть фазового портрета системы (1.5) содержит в точности один цикл \mathcal{C} , проходящий по блокам согласно стрелкам диаграммы (1.7). Отображение Пуанкаре $\tilde{\Phi} : F_0 \rightarrow F_0$ (или $\Phi : K^3 \rightarrow K^3$) имеет единственную нетривиальную неподвижную точку.

В данном разделе докажем теорему

Теорема 1.3. Если $a_1 > 1$, $b_j > 1$, $j = 2, 3, 4$, то цикл из Теоремы 1.2 является устойчивым.

Для доказательства рассмотрим характеристический полином матрицы Якоби J_Φ , вычисленной в неподвижной точке U_0 .

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \cdot \text{tr} J_\Phi - \lambda \cdot I_2 + \det J_\Phi.$$

Покажем, что все корни данного полинома по модулю не превосходят единицы. Из Утверждения 1.1 следует, что $P(0) = \det J_\Phi > 0$. Далее,

$$\frac{d^2 P}{d\lambda^2} = -6\lambda + 2\text{tr} J_\Phi < 0 \quad \text{при } \lambda > \frac{\text{tr} J_\Phi}{3}.$$

$$P(1) = -1 + \text{tr} J_\Phi - I_2 + \det J_\Phi,$$

где I_2 — сумма главных миноров матрицы J_Φ .

Введем обозначения

$$\psi'_{1i} = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_i}, \quad i = 2, 3, \quad \psi'_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial u_3}, \quad a_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Из Леммы 1.8 получим соотношения

$$\psi'_{12} \cdot (1 - a_{11}) = a_{12}, \quad \psi'_{13} \cdot (1 - a_{11}) = a_{13}, \quad 0 < a_{11} < 1.$$

Далее, из доказательства Леммы 1.9 имеем

$$a_{21}\psi'_{12}\psi'_2 + a_{21}\psi'_{13} + a_{22}\psi'_2 + a_{23} = \psi'_2, \quad a_{21}\psi'_{1,2} + a_{22} < 1,$$

Следующее неравенство вытекает из $\frac{\partial \Delta_3}{\partial u_3} < 0$:

$$a_{31}\psi'_{13} + \psi'_2 (a_{31}\psi'_{12} + a_{32}) < 1 - a_{33}.$$

Преобразуем эти соотношения, выразим ψ'_{1i} через элементы матрицы Якоби.

Таким образом, в неравенствах останутся только a_{jk} и ψ'_2 :

$$\frac{a_{21}a_{13}}{1 - a_{11}} + a_{23} = \psi'_2 \cdot \left(1 - a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{1 - a_{11}} \right);$$

$$a_{21}a_{12} < (1 - a_{22})(1 - a_{11});$$

$$\left(\frac{a_{31}a_{12}}{1 - a_{11}} + a_{32} \right) \psi'_2 < 1 - a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{1 - a_{11}}.$$

Выражение производной ψ'_2 из первого равенства позволяет получить оценку, которая влечет $P(1) < 0$:

$$\psi'_2 = \frac{a_{23}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{13}}{(1 - a_{22})(1 - a_{11}) - a_{21}a_{12}} < \frac{(1 - a_{11})(1 - a_{33}) - a_{13}a_{31}}{a_{32}(1 - a_{11}) + a_{31}a_{12}}.$$

Как было доказано выше, отображение Пуанкаре имеет единственную неподвижную точку $U_0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, отличную от тривиальной, и координаты u_1^0, u_2^0 этой точки определяются координатой u_3^0 как функции $\psi_1(\psi_2(u_3^0), u_3^0), \psi_2(u_3^0)$ соответственно. Для оценки первой производной $\left. \frac{dP}{d\lambda} \right|_{\lambda=1}$ потребуются следующие неравенства

$$a_{31}a_{13} < (1 - a_{33})(1 - a_{11}); \quad a_{23}a_{32} < (1 - a_{22})(1 - a_{33}).$$

В итоге из оценок на элементы матрицы Якоби получаем

$$3 - 2\text{tr}_\Phi + I_2 > 0, \quad \text{или} \quad \left. \frac{dP}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} < 0.$$

Поскольку матрица Якоби J_Φ состоит из положительных элементов, по теореме Фробениуса-Перрона его наибольшее по модулю собственное число положительно и соответствующий ему собственный вектор имеет положительные координаты. Согласно рассуждениям, приведенным выше, характеристический полином этой матрицы на концах интервала $(0, 1)$ принимает значения разных знаков, его график является выпуклым вверх. Тогда полином $P(\lambda)$ имеет хотя бы корень $\lambda \in (0, 1)$, а все остальные корни по модулю не превосходят единицы.

Значит, при больших натуральных N существует $0 < q < 1$ такое, что $\|J_\Phi^N\| < q^N$.

Пусть u_0 — нетривиальная неподвижная точка отображения Пуанкаре. Разложим $\Phi^N(u)$ в окрестности неподвижной точки $u_0 = \Phi(u_0)$ по формуле Тейлора и найдем такую функцию $\alpha(u)$, стремящуюся к нулю при $u \rightarrow u_0$, что

$$\Phi^N(u) = u_0 + J_\Phi^N(u - u_0) + \alpha(u)\|u - u_0\|.$$

Зафиксируем настолько малое $\delta > 0$, что при $\|u - u_0\| < \delta$ будет справедливо неравенство $\|J_{\Phi}^N\| + \|\alpha(u)\| \leq q^N$. Оценим разность $\|\Phi^N(u) - u_0\|$ с помощью неравенства треугольника

$$\|\Phi^N(u) - u_0\| \leq \|J_{\Phi}^N\| \cdot \|u - u_0\| + \|\alpha(u)\| \|u - u_0\| \leq q^N \|u - u_0\|.$$

При $N \rightarrow \infty$ образ точки u из малой окрестности u_0 остается в этой окрестности, а траектория этой точки приближается к циклу \mathcal{C} с экспоненциальной скоростью. Кроме того, цикл является предельным для любой траектории с началом во внутренней точке грани F_0 в силу свойств отображения Φ и единственности. Значит, цикл \mathcal{C} экспоненциально устойчивый и Теорема 1.3 доказана.

Глава 2. Шестимерная динамическая система со ступенчатыми правыми частями

2.1 Постановка задачи

В данной главе будем исследовать поведение траекторий шестимерной динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= L_1(p_3) - k_1 m_1; & \frac{dp_1}{dt} &= \Gamma_1(m_1) - l_1 p_1, \\ \frac{dm_2}{dt} &= L_2(p_1) - k_2 m_2; & \frac{dp_2}{dt} &= \Gamma_2(m_2) - l_2 p_2, \\ \frac{dm_3}{dt} &= L_3(p_2) - k_3 m_3; & \frac{dp_3}{dt} &= \Gamma_3(m_3) - l_3 p_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

моделирующей кольцевую генную сеть с отрицательными и положительными регуляторными связями, называемую репрессилатором. Ранее в [8, 46] была построена модель синтетического молекулярного репрессилатора, в которой отрицательная регуляторная связь была выражена функцией Хилла $\frac{\alpha}{1 + p_j^n}$, положительная связь — линейной функцией. Правые части уравнений системы (2.1) содержат убывающие и возрастающие ступенчатые функции

$$L_j(x) = \begin{cases} a_j k_j > 0, & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad \Gamma_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ b_j l_j > 0, & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

описывающие отрицательные и положительные регуляторные связи соответственно. В отличие от системы из [46], уравнения динамической системы (2.1) несимметричны относительно циклической перестановки пар переменных $(m_1, p_1) \rightarrow (m_2, p_2) \rightarrow (m_3, p_3) \rightarrow (m_1, p_1) \rightarrow \dots$. Скорости разложения веществ в биохимической реакции в данной модели выражены линейными функциями с отрицательными коэффициентами $-k_j, -l_j$.

2.2 Дискретизация фазового портрета

Рассмотрим шестимерный параллелепипед

$$\mathcal{Q}^6 = [0, a_1] \times [0, b_1] \times [0, a_2] \times [0, b_2] \times [0, a_3] \times [0, b_3],$$

здесь и далее предполагаем, что $a_j > 1$, $b_j > 1$, $j = 1, 2, 3$, тогда точка $E = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ является внутренней для \mathcal{Q}^6 . Каждый блок обозначим бинарным мультииндексом

$$\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6\},$$

где $\varepsilon_i = 1$, если соответствующая переменная системы (2.1) больше 1, и $\varepsilon_i = 0$ иначе.

При переходе траекторий системы (2.1) по блокам нумерация каждого следующего блока отличается от предыдущего значением только одного индекса. Для того чтобы определить, в какой блок траектории могут перейти из исходного блока, нужно рассмотреть пары соседних индексов в нумерации. Для пар индексов справедливы правила, описанные в [22]. Если второму индексу в этой паре соответствует уравнение с убывающей функцией L_j , то нумерация блока меняется по правилу

$$\{*00\# \} \rightarrow \{*01\# \}, \quad \{*11\# \} \rightarrow \{*10\# \}.$$

В случае возрастающих функций Γ_j правила изменения мультииндексов при переходе траектории из блока в блок имеют вид

$$\{*01\# \} \rightarrow \{*00\# \}, \quad \{*10\# \} \rightarrow \{*11\# \},$$

здесь символы $*$ и $\#$ обозначают наборы индексов, возможно, пустые.

На основе понятия валентности, определенного в разделе 1.1, можно выделить в \mathcal{Q}^6 три подобласти, которые будем обозначать W_1 , W_3 и W_5 . Первая подобласть W_1 содержит одновалентные блоки, W_5 состоит из пятивалентных блоков и W_3 содержит трехвалентные блоки. В настоящей работе изучается поведение траекторий в подобластях W_1 и W_5 . Фазовый портрет динамической системы (2.1) в W_3 имеет более сложную и громоздкую комбинаторную структуру, которая на данный момент не исследована.

Чтобы найти все блоки, содержащиеся в W_1 и в W_5 , был разработан алгоритм, описанный в работе [25].

Найдем нумерацию первого одновалентного блока и построим диаграмму сдвигов точек начальной грани вдоль траекторий системы (2.1), правая часть которой имеет вид $LGLGLG$.

Пусть для определенности в блоке, с которого начинается диаграмма, $\varepsilon_1 = 0$, т.е. $m_1 < 1$. Построение можно начать и с $\varepsilon_1 = 1$, поскольку траектория рано или поздно пересечет гиперплоскость $m_1 = 1$.

Далее требуем, чтобы переход осуществлялся через грань $p_1 = 1$, т.е. значение ε_2 в следующем блоке должно поменяться. Определим знак производной во втором уравнении системы (2.1), которое имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = \Gamma_1(m_1) - l_1 p_1.$$

В данном уравнении $\Gamma_1(m_1) = 0$, поскольку для любой точки внутри искомого блока выполняется неравенство $m_1 < 1$. Тогда при $p_1 > 1$ траектория выходит из блока только через грань $p_1 = 1$, и $\varepsilon_2 = 1$. Заметим, что при переходе значения остальных ε_j для следующего блока не меняются.

Для переменной m_2 имеем $L_2(p_1) = 0$, тогда производная $\frac{dm_2}{dt} = -k_2 m_2$ отрицательна, при $m_2 < 1$ траектории системы (2.1) не выходят через грань $m_2 = 1$. На этом шаге нумерация искомого блока имеет вид $\{010\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\}$.

Продолжая аналогичные рассуждения для остальных индексов, получаем блок $\{010011\}$. Проверим последний индекс: при $\varepsilon_6 = 1$ выполняется неравенство $p_3 > 1$, тогда $L_1(p_3) = 0$, а значит, через грань $m_1 = 1$ траектория выходить не может.

После того, как найдена нумерация первого одновалентного блока, остальные блоки можно найти последовательно по правилам перехода, приведенным выше. Отметим, что если зафиксировать значение индекса для первой переменной ($\varepsilon_1 = 0$) и определить направление перехода, выбрав грань ($p_1 = 1$), можно найти нумерацию одновалентного блока единственным образом. А если зафиксировать $\varepsilon_1 = 1$, или выбрать другой индекс для начала построения, то при построении получится блок валентности один, всего таких блоков 12.

В итоге подобласть W_1 содержит 12 одновалентных блоков, а порядок перехода траекторий по блокам определяет диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{110011\} & \xrightarrow{F_0=\{m_1=1\}} & \{010011\} & \xrightarrow{F_1=\{p_1=1\}} & \{000011\} & \xrightarrow{F_2=\{m_2=1\}} & \{001011\} \\
 \uparrow F_{11}=\{p_3=1\} & & & & & & F_3=\{p_2=1\} \downarrow \\
 \{110010\} & & & & & & \{001111\} \\
 \uparrow F_{10}=\{m_3=1\} & & & & & & F_4=\{m_3=1\} \downarrow \\
 \{110000\} & & & & & & \{001101\} \\
 \uparrow F_9=\{p_2=1\} & & & & & & F_5=\{p_3=1\} \downarrow \\
 \{110100\} & \xleftarrow{F_8=\{m_2=1\}} & \{111100\} & \xleftarrow{F_7=\{p_1=1\}} & \{101100\} & \xleftarrow{F_6=\{m_1=1\}} & \{001100\}
 \end{array} \quad (2.3)$$

Далее найдем первый блок максимальной валентности, равной пяти, по аналогичному алгоритму.

Сначала зафиксируем значение первого индекса $\varepsilon_1 = 0$ и потребуем, чтобы через грань $m_1 = 1$ траектории из блока не выходили. Тогда значение второго индекса $\varepsilon_2 = 1$, что соответствует $p_1 > 1$ и по правилам переход $01 \rightarrow 00$ для функции Γ_1 может осуществляться через грань $p_1 = 1$. В итоге имеем $\{01\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\}$.

Через грань $m_2 = 1$ траектории также могут выходить. Для пары индексов $1\varepsilon_3$ это возможно в случае $\varepsilon_3 = 1$, поскольку третье уравнение системы (2.1) содержит убывающую функцию L_2 .

С помощью аналогичных рассуждений восстановим остальные индексы: $\{011\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\} \rightarrow \{0110\varepsilon_5\varepsilon_6\} \rightarrow \{01100\varepsilon_6\} \rightarrow \{011001\}$ Остановимся на последнем индексе $\varepsilon_6 = 1$. В построенном блоке $p_3 > 1$ и через грань $m_1 = 1$ траектории действительно не выходят, поскольку в первом уравнении стоит ступенчатая функция $L_1(p_3)$. Переход $10 \rightarrow 11$ невозможен для функций такого вида. Значит, траектории могут выходить через все грани, кроме $m_1 = 1$ и валентность искомого блока действительно равна пяти.

В итоге мы нашли блок $\{011001\}$, из которого траектории могут попасть в блоки $\{001001\}$, $\{010001\}$, $\{011101\}$, $\{011011\}$, $\{011000\}$. Последний из них имеет валентность, равную пяти, а остальные четыре являются трехвалентными. Область W_5 не является инвариантной для траекторий системы (2.1). Из блоков, которые содержатся в W_5 , траектории могут перейти в один из четырех блоков, лежащих в W_3 , или остаться в W_5 . Попасть в W_1 из W_5 , не переходя в W_3 , траектории не могут, поскольку при каждом переходе валентность блока уменьшается

только на 2 или сохраняется, как было показано ранее в работе [22]. В данной работе будем исследовать поведение траекторий, которые остаются в области W_5 .

Итак, диаграмма переходов в области W_5 , состоящей из 12 пятивалентных блоков, имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{111001\} & \xrightarrow{G_0=\{m_1=1\}} & \{011001\} & \xrightarrow{G_1=\{p_3=1\}} & \{011000\} & \xrightarrow{G_2=\{m_3=1\}} & \{011010\} \\
 \uparrow G_{11}=\{p_1=1\} & & & & & & \downarrow G_3=\{p_2=1\} \\
 \{101001\} & & & & & & \{011110\} \\
 \uparrow G_{10}=\{m_2=1\} & & & & & & \downarrow G_4=\{m_2=1\} \\
 \{100001\} & & & & & & \{010110\} \\
 \uparrow G_9=\{p_2=1\} & & & & & & \downarrow G_5=\{p_1=1\} \\
 \{100101\} & \xleftarrow{G_8=\{m_3=1\}} & \{100111\} & \xleftarrow{G_7=\{p_3=1\}} & \{100110\} & \xleftarrow{G_6=\{m_1=1\}} & \{000110\}
 \end{array} \quad (2.4)$$

Оставшиеся 40 блоков в области Q^6 лежат в подобласти W_3 , и комбинаторная структура переходов из блока в блок в этой подобласти намного сложнее, чем в W_1 и W_5 , см. [10].

2.3 Существование цикла в инвариантной подобласти

Построим траекторию системы (2.1), проходящую по блокам подобласти W_1 согласно диаграмме (2.3). Зафиксируем на грани $F_6 = \{001100\} \cap \{101100\}$ внутреннюю точку $P^{(6)}$ с координатами

$$m_1^{(6)} = 1, \quad p_1^{(6)} < 1, \quad m_2^{(6)} > 1, \quad p_2^{(6)} > 1, \quad m_3^{(6)} < 1, \quad p_3^{(6)} < 1.$$

В каждом блоке диаграммы (2.3) система (2.1) является линейной с постоянными коэффициентами, что позволяет контролировать поведение траекторий. Решение задачи Коши определяет уравнение траектории в блоке $\{101100\}$ с началом на грани F_6 :

$$\begin{aligned}
 m_1(t) &= a_1 + (1 - a_1)e^{-k_1 t}, \quad p_1(t) = b_1 + (p_1^{(6)} - b_1)e^{-l_1 t}, \quad m_2(t) = a_2 + (m_2^{(6)} - a_2)e^{-k_2 t}, \\
 p_2(t) &= b_2 + (p_2^{(6)} - b_2)e^{-l_2 t}, \quad m_3(t) = m_3^{(6)} e^{-k_3 t}, \quad p_3(t) = p_3^{(6)} e^{-l_3 t}.
 \end{aligned}$$

Данная траектория пересекает следующую грань $F_7 = \{101100\} \cap \{111100\}$ в точке $P^{(7)}$, у которой $p^{(7)} = 1$. Подставив эту координату в уравнения траектории, получим выражения для остальных координат, которые мы будем называть формулами перехода $\varphi_6 : F_6 \rightarrow F_7$:

$$m_1^{(7)} = a_1 + (1 - a_1) \cdot \left(\frac{b_1 - 1}{b_1 - p_1^{(6)}} \right)^{\frac{k_1}{l_1}}, \quad p_1^{(7)} = 1,$$

$$m_2^{(7)} = a_2 + (m_2^{(6)} - a_2) \cdot \left(\frac{b_1 - 1}{b_1 - p_1^{(6)}} \right)^{\frac{k_2}{l_1}}, \quad p_2^{(7)} = b_2 + (p_2^{(6)} - b_2) \cdot \left(\frac{b_1 - 1}{b_1 - p_1^{(6)}} \right)^{\frac{l_2}{l_1}},$$

$$m_3^{(7)} = m_3^{(6)} \cdot \left(\frac{b_1 - 1}{b_1 - p_1^{(6)}} \right)^{\frac{k_3}{l_1}}, \quad p_3^{(7)} = p_3^{(6)} \cdot \left(\frac{b_1 - 1}{b_1 - p_1^{(6)}} \right)^{\frac{l_3}{l_1}}.$$

Решая следующую задачу Коши с начальной точкой $P^{(7)}$, найдем уравнения, описывающие сдвиг точки $P^{(6)}$ вдоль траектории уже в блоке $\{111100\}$:

$$m_1(t) = a_1 + (m_1^{(7)} - a_1)e^{-k_1 t}, \quad p_1(t) = b_1 + (1 - b_1)e^{-l_1 t},$$

$$m_2(t) = m_2^{(7)}e^{-k_2 t}, \quad p_2(t) = b_2 + (p_2^{(7)} - b_2)e^{-l_2 t},$$

$$m_3(t) = m_3^{(7)}e^{-k_3 t}, \quad p_3(t) = p_3^{(7)}e^{-l_3 t}.$$

Пусть эта траектория пересекает грань $F_8 = \{111100\} \cap \{110100\}$ в некоторой точке $P^{(8)}$ с координатой $m_2^{(8)} = 1$. Тогда формулы перехода $\varphi_7 : F_7 \rightarrow F_8$ выглядят следующим образом:

$$m_1^{(8)} = a_1 + (m_1^{(7)} - a_1) \cdot (m_2^{(7)})^{-\frac{k_1}{k_2}}, \quad p_1^{(8)} = b_1 + (1 - b_1) \cdot (m_2^{(7)})^{-\frac{l_1}{k_2}},$$

$$m_2^{(8)} = 1, \quad p_2^{(8)} = b_2 + (p_2^{(7)} - b_2) \cdot (m_2^{(7)})^{-\frac{l_2}{k_2}},$$

$$m_3^{(8)} = m_3^{(7)} \cdot (m_2^{(7)})^{-\frac{k_3}{k_2}}, \quad p_3^{(8)} = p_3^{(7)} \cdot (m_2^{(7)})^{-\frac{l_3}{k_2}}.$$

Остальные переходы $\varphi_i : F_i \rightarrow F_{i+1}$ определяются аналогичным образом как решения задач Коши в блоках диаграммы (2.3). Их композиция $\Phi : F_0 \rightarrow F_0 = \varphi_{11}\varphi_{10}\varphi_9\varphi_8\varphi_7\varphi_6\varphi_5\varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1\varphi_0$ будет отображением Пуанкаре грани F_0 в себя. Точка $E = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ является неподвижной относительно каждого отображения φ_i , а значит, и относительно композиции Φ .

Вычислим матрицы Якоби преобразований $\varphi_6 : F_6 \rightarrow F_7$ и $\varphi_7 : F_7 \rightarrow F_8$ в точке E :

$$J(\varphi_6)|_E = \frac{\partial(m_2^{(7)}, p_2^{(7)}, m_3^{(7)}, p_3^{(7)}, m_1^{(7)})}{\partial(p_1^{(6)}, m_2^{(6)}, p_2^{(6)}, m_3^{(6)}, p_3^{(6)})} \Big|_E = \begin{pmatrix} -\frac{k_2(a_2 - 1)}{l_1(b_1 - 1)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_2(b_2 - 1)}{l_1(b_1 - 1)} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{l_1(b_1 - 1)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{l_3}{k_1(b_1 - 1)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1(a_1 - 1)}{l_1(b_1 - 1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(\varphi_7)|_E = \frac{\partial(p_2^{(8)}, m_3^{(8)}, p_3^{(8)}, m_1^{(8)}, p_1^{(8)})}{\partial(m_2^{(7)}, p_2^{(7)}, m_3^{(7)}, p_3^{(7)}, m_1^{(7)})} \Big|_E = \begin{pmatrix} \frac{l_2(b_2 - 1)}{k_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_3}{-k_2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_1(a_1 - 1)}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{l_1(b_1 - 1)}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби композиции $\varphi_7\varphi_6$ имеет вид

$$J(\varphi_7\varphi_6)|_E = \begin{pmatrix} -\frac{l_2 a_2 (b_2 - 1)}{l_1 (b_1 - 1)} & \frac{l_2 (b_2 - 1)}{k_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_3 a_2}{l_1 (b_1 - 1)} & -\frac{k_3}{k_2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{l_3 a_2}{l_1 (b_1 - 1)} & -\frac{l_3}{k_2} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 a_2 (a_1 - 1)}{l_1 (b_1 - 1)} & \frac{k_1 (a_1 - 1)}{k_2} & 0 & 0 & 0 \\ -(a_2 - 1) & \frac{l_1 (b_1 - 1)}{k_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Каждые матрицы $J(\varphi_s)$ и $J(\varphi_{s+4})$ отличаются друг от друга только циклической перестановкой индексов элементов первого столбца по правилу $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Парные произведения $J(\varphi_{4j-3}\varphi_{4j-4}) = J(\varphi_{4j-3})J(\varphi_{4j-4})$ а также $J(\varphi_{4j-1}\varphi_{4j-2}) = J(\varphi_{4j-1})J(\varphi_{4j-2})$ отличаются от $J(\varphi_1\varphi_0)$, (соответственно от $J(\varphi_3\varphi_2)$) только циклической перестановкой индексов элементов первых двух столбцов.

Рассмотрим матрицу Якоби отображения Φ , вычисленную в точке E :

$$J(\Phi) = J(\varphi_{11}\varphi_{10}) \cdot J(\varphi_9\varphi_8) \cdot J(\varphi_7\varphi_6) \cdot J(\varphi_5\varphi_4) \cdot J(\varphi_3\varphi_2) \cdot J(\varphi_1\varphi_0).$$

Каждый элемент этой матрицы представляется в виде суммы либо только положительных, либо только отрицательных слагаемых, это выполняется уже на этапе перемножения матриц попарных произведений.

Результаты вычисления произведений этих матриц являются немного более громоздкими, чем в случае систем (1.1), (1.5), однако для доказательства существования цикла достаточно лишь найти знаки элементов матрицы $J(\Phi)$:

$$\text{sign} \frac{\partial(y_1^{(12)} x_2^{(12)} y_2^{(12)} x_3^{(12)} y_3^{(12)})}{\partial(y_1^{(0)} x_2^{(0)} y_2^{(0)} x_3^{(0)} y_3^{(0)})} = \begin{pmatrix} + & - & - & + & + \\ - & + & + & - & - \\ - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + \\ + & - & - & + & + \end{pmatrix}.$$

Для диагональных элементов $J(\Phi)_{11}$ и $J(\Phi)_{22}$ выполняются следующие свойства:

Лемма 2.1. $J(\Phi)_{11} > 1$; $J(\Phi)_{22} > 1$.

Доказательство вытекает из следующих соображений. Первый диагональный элемент $J(\Phi)_{11}$ представим в виде суммы положительных слагаемых, которая содержит произведение всех элементов $J(\varphi_{2s+1}\varphi_{2s})_{11}$, которое равно $\frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)}$. По условиям теоремы все $a_j > 1$, поэтому это выражение больше 1, а значит, и $J(\Phi)_{11} > 1$.

Второй диагональный элемент $J(\Phi)_{22}$ также представляет собой сумму положительных слагаемых, одно из которых является произведением всех $J(\varphi_{2s}\varphi_{2s+1})_{22}$. Это произведение равно единице, тогда вся сумма больше 1.

Далее, введем на грани \mathcal{F}_0 частичный порядок. Для двух точек $P = (1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ и $\tilde{P} = (1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$ будем говорить, что P меньше \tilde{P}

(или $P \prec \tilde{P}$), если выполнены неравенства:

$$\tilde{y}_1 \geq y_1; \quad \tilde{x}_2 \leq x_2; \quad \tilde{y}_2 \leq y_2; \quad \tilde{x}_3 \geq x_3; \quad \tilde{y}_3 \geq y_3.$$

Зафиксируем две точки на грани \mathcal{F}_0 :

$$P = (1, y_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, x_3^{(0)}, y_3^{(0)}), \quad \tilde{P} = (1, \tilde{y}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}, \tilde{y}_2^{(0)}, \tilde{x}_3^{(0)}, \tilde{y}_3^{(0)})$$

и их образы под действием отображения Φ

$$\Phi(P) = (1, y_1^{(12)}, x_2^{(12)}, y_2^{(12)}, x_3^{(12)}, y_3^{(12)}) \quad \Phi(\tilde{P}) = (1, \tilde{y}_1^{(12)}, \tilde{x}_2^{(12)}, \tilde{y}_2^{(12)}, \tilde{x}_3^{(12)}, \tilde{y}_3^{(12)}).$$

Для отображения $\Phi : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ справедлива

Лемма 2.2. *Отображение $\Phi : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ монотонно, то есть, если выполнены неравенства*

$$\tilde{y}_1^{(0)} \geq y_1^{(0)}; \quad \tilde{x}_2^{(0)} \leq x_2^{(0)}; \quad \tilde{y}_2^{(0)} \leq y_2^{(0)}; \quad \tilde{x}_3^{(0)} \geq x_3^{(0)}; \quad \tilde{y}_3^{(0)} \geq y_3^{(0)}, \quad (2.5)$$

то выполняются и неравенства

$$\tilde{y}_1^{(12)} \geq y_1^{(12)}; \quad \tilde{x}_2^{(12)} \leq x_2^{(12)}; \quad \tilde{y}_2^{(12)} \leq y_2^{(12)}; \quad \tilde{x}_3^{(12)} \geq x_3^{(12)}; \quad \tilde{y}_3^{(12)} \geq y_3^{(12)}. \quad (2.6)$$

При этом если хотя бы одно из неравенств (2.5) строгое, то все неравенства (2.6) строгие.

Доказательство данной леммы основано на проверке пяти неравенств для каждого преобразования сдвига φ_s подстановкой в формулы перехода. В этом случае ориентация граней задается порядком переменных: $(y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \rightarrow (x_2, y_2, x_3, y_3, x_1) \rightarrow (y_2, x_3, y_3, x_1, y_1) \rightarrow \dots \rightarrow (y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Лемма 2.3. *Если точка $P = (1, y_1, x_2, 1, 1, 1) \in \mathcal{F}_0$ достаточно близка к точке E и отлична от нее, то $\Phi(P) \succ P$.*

Точка $P_0 = (1, b_1, 0, 0, a_3, b_3) \in \mathcal{F}_0$, противоположная точке E в грани \mathcal{F}_0 , под действием Φ переходит во внутреннюю точку $P_1 = \Phi(P_0)$ грани \mathcal{F}_0 . Из леммы 3.2.2 следует, что образы точки P_0 при итерациях отображения Пуанкаре Φ

$$P_0 \succ P_1 \succ P_2 \succ P_3 \succ \dots \succ E,$$

где $P_k = \Phi(P_{k-1})$, образуют монотонно убывающую последовательность, ограниченную снизу точкой E , а из Леммы 2.3 следует, что предельная точка P_* этой последовательности не может совпадать с точкой E , поскольку точка E является отталкивающей. Следовательно, точка P_* лежит во внутренности грани \mathcal{F}_0 , а значит, найдена неподвижная точка преобразования $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, отличная от точки E . Таким образом, траектория точки P_* проходит по всем блокам диаграммы (2.3) и является нетривиальным циклом системы (2.1). Отсюда вытекает

Теорема 2.1. *Если все $a_j, b_j > 1$, то у системы (2.1) существует цикл, который переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы (2.3).*

2.4 Единственность и устойчивость цикла в инвариантной подобласти

Будем рассматривать нормализованное отображение Пуанкаре $\Psi : K^5 \rightarrow K^5$, представляющее собой композицию $\Psi = \mathcal{L} \circ \Phi \circ \mathcal{L}^{-1}$. Непосредственным вычислением производных $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ можно проверить, что верно следующее

Утверждение 2.1. *а) Для всех точек $u \in K^5$, отличных от начала координат O , выполнены неравенства $0 < \psi_j(u) < 1$, и $\psi_j(0, 0, 0, 0, 0) = 0$. Здесь и далее $j = \overline{1, 5}$.*

б) Отображение Ψ инъективно, его якобиан $J(\Psi)$ строго положителен во всех точках K^5 .

в) Первые производные координатных функций ψ_j строго положительны. В начале координат $\frac{\partial \psi_k}{\partial u_k} > 1$, $k = 1, 2$. Все их вторые производные строго отрицательны.

Как и в предыдущей главе, проверка данного утверждения опирается на уже вычисленные производные компонент отображения Φ , в силу того, что нормализация не влияет на знаки производных.

Доказательство единственности цикла проведем по той же схеме, что и для четырехмерной системы (1.5), но здесь оно будет состоять из пяти шагов. Для каждой координатной функции отображения Ψ покажем, что существует единственная точка, в которой значение координатной функции равно соответствующей координате. При этом на последнем шаге получим зависимость от пятой ко-

ординаты u_5 , по которой можно определить оставшиеся координаты неподвижной точки отображения Ψ .

Лемма 2.4. *Существует единственное число $u_1^0 \in (0, 1)$ такое, что $\psi_1(u_1^0, 0, 0, 0, 0, 0) = u_1^0$.*

Введем функцию $\Delta_0(u_1) = \psi_1(u_1, 0, 0, 0, 0, 0) - u_1$. Эта функция выпукла вверх, поскольку ее вторая производная отрицательна. При этом $\Delta_0(0) = 0$, $\Delta_0(1) < 0$, а $\left. \frac{d\Delta_0}{du_1} \right|_{u_1=0} > 0$. Значит, существует единственная точка $u_1^0 \in (0, 1)$, в которой $\Delta_0(u_1^0) = 0$ и ее первая производная функции отрицательна.

Далее зафиксируем точку $u^{(1)} = (u_2, u_3, u_4, u_5)$ и определим функцию $\Delta_1 = \psi_1(u_1, u^{(1)}) - u_1$. Вторая производная этой функции совпадает со второй производной ψ_1 , которая отрицательна.

На концах интервала $(0, 1)$ Δ_1 принимает значения разных знаков. Отсюда вытекает

Лемма 2.5. *Для каждой точки $u^{(1)} = (u_2, u_3, u_4, u_5)$ существует единственное $u_1 = \chi_1(u^{(1)})$ в интервале $(0, 1)$ такое, что*

$$\Delta_1(u_1) = \psi_1(\chi_1(u^{(1)}), u^{(1)}) - \chi_1(u^{(1)}) = 0.$$

При этом первая производная функции Δ_1 строго отрицательна в этой точке.

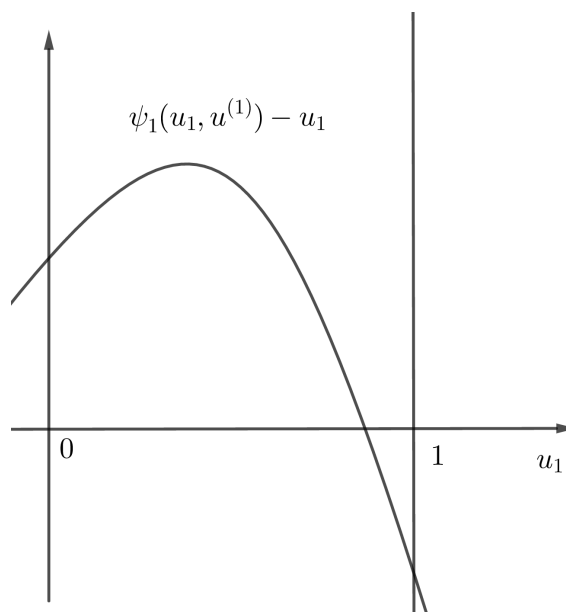


Рис. 3 – График $\Delta_1(u_1, u^{(1)})$ для фиксированного $u^{(1)}$

Проведя аналогичные рассуждения, можно установить справедливость следующих лемм

Лемма 2.6. Для каждого $u^{(2)} = (u_3, u_4, u_5)$ существует единственное $u_2 = \chi_2(u^{(2)}) \in (0, 1)$ такое, что

$$\psi_2(\chi_1(u^{(1)}), \chi_2(u^{(2)}), u^{(2)}) - \chi_2(u^{(2)}) = 0.$$

Лемма 2.7. Для каждой u_4, u_5 существует единственное $u_3 = \chi_3(u_4, u_5) \in (0, 1)$ такое, что

$$\psi_3(\chi_1(u^{(1)}), \chi_2(u^{(2)}), \chi_3(u_4, u_5), u_4, u_5) = \chi_3(u_4, u_5).$$

Лемма 2.8. Для каждого $u_5 \in [0, 1]$ существует единственное $u_4 = \chi_4(u_5) \in (0, 1)$ такое, что

$$\psi_4(\chi_1(u^{(1)}), \chi_2(u^{(2)}), \chi_3(u_4, u_5), \chi_4(u_5), u_5) = \chi_4(u_5).$$

Лемма 2.9. На интервале $(0, 1)$ существует единственное число u_5^0 такое, что

$$\psi_5(\chi_1(u^{(1)}), \chi_2(u^{(2)}), \chi_3(\chi_4(u_5^0), u_5^0), \chi_4(u_5^0), u_5^0) = u_5^0.$$

Здесь $u^{(2)} = (\chi_3(\chi_4(u_5^0), u_5^0), \chi_4(u_5^0), u_5^0)$ и $u^{(1)} = (\chi_2(u^{(2)}), \chi_3(\chi_4(u_5^0), u_5^0), \chi_4(u_5^0), u_5^0)$. Таким образом, в K^5 существует единственная неподвижная точка отображения Пуанкаре u^* с координатами

$$u_5^* = u_5^0, \quad u_4^* = \chi_4(u_5^*), \quad u_3^* = \chi_3(u_4^*, u_5^*),$$

$$u_2^* = \chi_2(u_3^*, u_4^*, u_5^*), \quad u_1^* = \chi_1(u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*)$$

Этой точке соответствует точка $P^* = \mathcal{L}^{-1}(u_*)$ на грани F_0 , и ее траектория является искомым циклом \mathcal{C} . Введем в единичном кубе K^5 частичный порядок. Будем говорить, что точка $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in K^5$ "меньше" точки $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4, \tilde{u}_5)$ относительно частичного порядка ($U \prec \tilde{U}$), если

$$u_1 < \tilde{u}_1, \quad u_2 < \tilde{u}_2, \quad u_3 < \tilde{u}_3, \quad u_4 < \tilde{u}_4, \quad u_5 < \tilde{u}_5. \quad (2.7)$$

Монотонность отображения Пуанкаре можно показать последовательной проверкой неравенств для координат, определенных формулами переходов φ_j , как это было сделано в Главе 1.

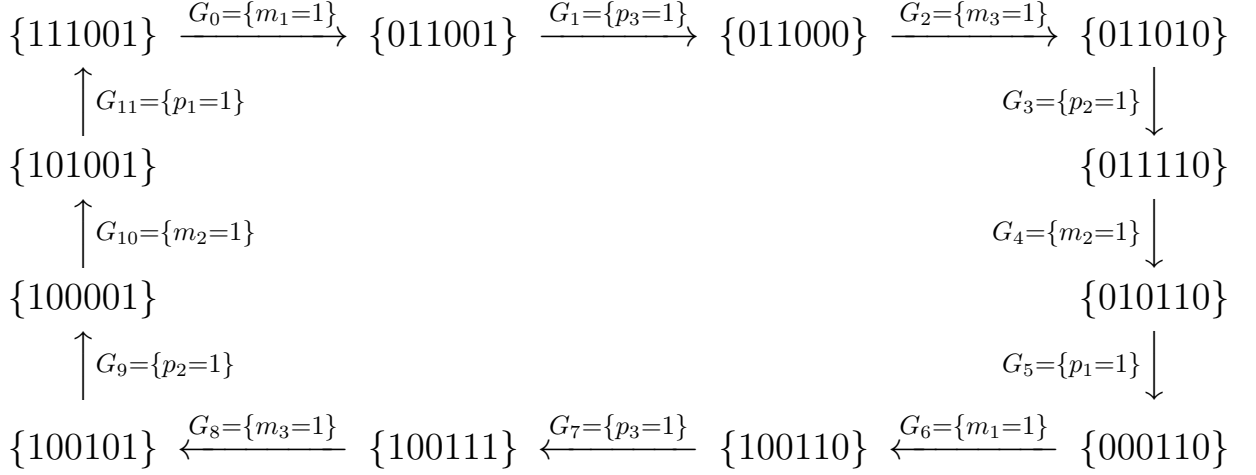
Из Утверждения 2.1 следует, что точка E отталкивает от себя точки, попадающие в ее малую окрестность.

Обозначим через P точку в единичном кубе K^5 , которой соответствует вершина грани F_0 с координатами $(1, b_1, 0, 0, a_3, b_3)$. Ее образ под действием отображения Ψ попадает внутрь единичного куба, то есть $\Psi(\Psi(P)) \prec \Psi(P) \prec P$. Возьмем точку V в малой окрестности начала координат. Согласно второму из доказанных свойств Ψ , начало координат $O \in K^5$, соответствующее точке E в исходной системе координат, является отталкивающим для точек из малой окрестности. Другими словами выполняется цепочка неравенств $O = \Psi(O) \prec V \prec \Psi(V)$. Таким образом, монотонно убывающая последовательность итераций $P, \Psi(P), \Psi(\Psi(P)), \Psi(\Psi(\Psi(P))) \dots$ ограничена снизу, а значит, существует единственный предел, которым и является неподвижная точка U^* . Окрестность U^* содержит все точки M такие, что $V \prec M \prec P$. Тогда частичный порядок (2.7) выполняется и для их образов: $\Psi(V) \prec \Psi(M) \prec \Psi(P)$, $\Psi(\Psi(V)) \prec \Psi(\Psi(M)) \prec \Psi(\Psi(P))$ и так далее. Траектория с началом в каждой такой M стремится к циклу \mathcal{C} с ростом итераций отображения Ψ . В частности, траектории точек из малой окрестности U^* при больших t попадают в окрестность \mathcal{C} . Отсюда следует устойчивость цикла \mathcal{C} . В итоге справедлива

Теорема 2.2. *Если $a_j, b_j > 1$, цикл \mathcal{C} является единственным и устойчивым в области W_1 .*

2.5 Поведение траекторий в инвариантной подобласти в безразмерном случае

В этом разделе будем изучать траектории системы (2.1), которые проходят только по пятивалентным блокам в подобласти W_5 согласно диаграмме



Здесь и далее будем полагать, что для всех $j = 1, 2, 3$ уравнения системы являются безразмерными, т.е. $k_j = l_j = 1$, а все $a_j > 1$, $b_j > 1$.

Для упрощения вычислений, произведем замену переменных, как для четырехмерной системы ЛГГГ:

$$x_j = m_j - 1, \quad y_j = p_j - 1, \quad j = 1, 2, 3,$$

Тогда система (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= L_1(y_3) - x_1 - 1; & \frac{dy_1}{dt} &= \Gamma_1(x_1) - y_1 - 1, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= L_2(y_1) - x_2 - 1; & \frac{dy_2}{dt} &= \Gamma_2(x_2) - y_2 - 1, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= L_3(y_2) - x_3 - 1; & \frac{dy_3}{dt} &= \Gamma_3(x_3) - y_3 - 1,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Вершины инвариантного параллелепипеда также сдвинутся на единицу:

$$\mathcal{Q}^6 = [-1, a_1 - 1] \times [-1, b_1 - 1] \times [-1, a_2 - 1] \times [-1, b_2 - 1] \times [-1, a_3 - 1] \times [-1, b_3 - 1],$$

а точка $E = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ перейдет в начало координат.

Опишем подробно только четыре перехода по цепочке $\{010110\} \rightarrow \{000110\} \rightarrow \{100110\} \rightarrow \{100111\} \rightarrow \{100101\}$.

Данная часть траектории начинается в точке $X^{(4)} \in f_4 = \{011110\} \cap \{010110\}$ с координатами

$$x_1^{(4)} < 0, \quad y_1^{(4)} > 0, \quad x_2^{(4)} = 0, \quad y_2^{(4)} > 0, \quad x_3^{(4)} > 0, \quad y_3^{(4)} < 0.$$

Система (2.8) в блоке $\{010110\}$ записывается в виде

$$\dot{x}_1 = -a_1 - x_1 - 1; \quad \dot{y}_1 = -y_1 - 1; \quad \dot{x}_2 = -x_2 - 1;$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 - 1; \quad \dot{x}_3 = -x_3 - 1; \quad \dot{y}_3 = b_3 - y_3 - 1.$$

В предположениях безразмерности траектория этой системы в каждом блоке является прямолинейной и задается уравнениями

$$x_1 = a_1 - 1 + (x_1^{(4)} + 1 - a_1)e^{-t}; \quad y_1 = -1 + (1 + y_1^{(4)})e^{-t}; \quad x_2 = -1 + (1 + x_2^{(4)})e^{-t};$$

$$y_2 = -1 + (1 + y_2^{(4)})e^{-t}; \quad x_3 = -1 + (1 + x_3^{(4)})e^{-t}; \quad y_3 = b_3 - 1 + (y_3^{(4)} + 1 - b_3)e^{-t}.$$

Формулы переходы траекторий по внутренним граням блоков разбиения описываются дробно-линейными функциями. В некоторый момент времени $t = t_1$ траектория пересечет грань $f_5 = \{010110\} \cap \{000110\}$ в точке $X^{(5)}$, координаты которой записываются в векторно-матричной форме следующим образом:

$$\vec{X}^{(5)} = \begin{pmatrix} x_2^{(5)} \\ y_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \\ y_3^{(5)} \\ x_1^{(5)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + y_1^{(4)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ x_1^{(4)} \\ y_1^{(4)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + y_1^{(4)}} M_4 \cdot \vec{X}^{(4)}$$

Приведем формулы сдвигов начальной точки вдоль траекторий системы (2.8) в блоках $\{000110\} \rightarrow \{100110\} \rightarrow \{100111\} \rightarrow \{100101\}$.

Переход с грани $f_5 = \{010110\} \cap \{000110\}$ на грань $f_6 = \{000110\} \cap \{100110\}$ имеет вид

$$\vec{X}^{(6)} = \begin{pmatrix} y_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ y_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \\ y_3^{(6)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{x_1^{(5)}}{a_1 - 1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1 - 1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1 - 1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a_1 - 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{b_3 - 1}{a_1 - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(5)} \\ y_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \\ y_3^{(5)} \\ x_1^{(5)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{x_1^{(5)}}{a_1 - 1}} M_5 \cdot \vec{X}^{(5)}$$

Переход с грани $f_6 = \{000110\} \cap \{100110\}$ на грань $f_7 = \{100110\} \cap \{100111\}$ имеет вид

$$\vec{X}^{(7)} = \begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ y_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ y_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{y_3^{(6)}}{b_3 - 1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_3 - 1}{b_3 - 1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a_1 - 1}{b_3 - 1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b_3 - 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b_3 - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ y_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \\ y_3^{(6)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{y_3^{(6)}}{b_3 - 1}} M_6 \cdot \vec{X}^{(6)}$$

Переход с грани $f_7 = \{100110\} \cap \{100111\}$ на грань $f_8 = \{100111\} \cap \{100101\}$ имеет вид

$$\vec{X}^{(8)} = \begin{pmatrix} y_3^{(8)} \\ x_1^{(8)} \\ y_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ y_2^{(8)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + x_3^{(7)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 - 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(7)} \\ y_1^{(7)} \\ x_2^{(7)} \\ y_2^{(7)} \\ x_3^{(7)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + x_3^{(7)}} M_7 \cdot \vec{X}^{(7)}$$

Отметим, что координаты $y_1^{(4)}$ и $x_3^{(7)}$ положительны, а $x_1^{(5)}$ и $y_3^{(6)}$ отрицательны, тогда множители, стоящие перед матрицами в формулах переходов, меньше единицы.

Вычислим композицию четырех переходов траектории точки $X^{(4)}$ системы (2.8) с грани f_4 на грань f_8 :

$$\vec{X}^{(8)} = \begin{pmatrix} y_3^{(8)} \\ x_1^{(8)} \\ y_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ y_2^{(8)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + x_3^{(7)})(1 - \frac{y_3^{(6)}}{b_3 - 1})(1 - \frac{x_1^{(5)}}{a_1 - 1})(1 + y_1^{(4)})} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b_3 - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-a_1}{b_3 - 1} & 1 & 0 \\ 0 & b_1 - 1 & 0 & \frac{b_1}{a_1 - 1} & 1 \\ 0 & a_2 - 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ x_1^{(4)} \\ y_1^{(4)} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \gamma_2} M^{VIII} \cdot \vec{X}^{(4)},$$

где $M^{VIII} = M_7 M_6 M_5 M_4$ — матрица композиции четырёх переходов, а положительное слагаемое γ_2 зависит от координат $y_1^{(4)}, x_1^{(5)}, y_3^{(6)}, x_3^{(7)}$. Вычислим матрицу, обратную к M^{VIII}

$$(M^{VIII})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_2 b_1}{(a_1 - 1)(b_3 - 1)} & \frac{a_2 b_1}{a_1 - 1} & a_2 & 1 & 1 \\ \frac{a_1 a_2 b_1}{(a_1 - 1)(b_3 - 1)} & \frac{a_2 b_1}{a_1 - 1} & a_2 & 1 & 0 \\ \frac{a_1 a_2 b_1}{a_1 - 1} - 1 & \frac{a_2 b_1 (b_3 - 1)}{a_1 - 1} & a_2 (b_3 - 1) & b_3 - 1 & 0 \\ \frac{a_1 (a_2 b_1 - 1)}{b_3 - 1} & a_2 b_1 - 1 & (a_1 - 1) a_2 & a_1 - 1 & 0 \\ \frac{a_1 (a_2 - 1) b_1}{(a_1 - 1)(b_3 - 1)} & \frac{(a_2 - 1) b_1}{a_1 - 1} & a_2 - 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

При $a_j > 1, b_j > 1$ все ее элементы неотрицательны, как и у $(M^{XII})^{-1}, (M^{IV})^{-1}$. Тогда $(M_{12})^{-1} = (M^{IV})^{-1} \cdot (M^{VIII})^{-1} \cdot (M^{XII})^{-1}$ с неотрицательными элементами удовлетворяет теореме Фробениуса-Перрона, приведенной в [7]. Выполнение условий теоремы гарантирует, что наибольшее по модулю собственное число $\tilde{\lambda}$ матрицы $(M_{12})^{-1}$ положительно и ему соответствует собственный вектор \vec{v} с положительными координатами. Этот же вектор является собственным и для матрицы M_{12} с собственным значением $\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$.

Значение характеристического полинома матрицы M^{XII} в точке $\lambda = 0$ равно единице, а в точке $\lambda = 1$ представляет собой выражение:

$$\frac{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 (a_2 a_3 b_2 (-b_1 + b_3) + a_1 (a_3 (b_1 - b_2) b_3 + a_2 b_1 (b_2 - b_3 + a_3 b_2 b_3)))}{(-1 + a_1) (-1 + a_2) (-1 + a_3) (-1 + b_1) (-1 + b_2) (-1 + b_3)}$$

Если

$$b_3 \geq b_1 \geq b_2 > 1 \quad \text{или} \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 1 \quad \text{или} \quad b_2 \geq b_3 \geq b_1 > 1$$

и $a_j > 1$, то данное выражение отрицательно, а характеристический полином имеет корень на $(0, 1)$.

Сдвиги начальной точки $X^{(0)}$ вдоль траектории системы (2.8) представляют собой проективные преобразования, которые переводят луч в луч. Рассмотрим отрезок $OX^{(0)}$ на грани f_0 , лежащий на луче l , параллельном собственному вектору \vec{v} . После однократного обхода по блокам диаграммы (2.4) этот отрезок сжимается, т.е. образ $X^{(12)}$ начальной точки попадает внутрь $OX^{(0)}$. Сжатие усиливается и за счет множителей $\frac{1}{1+\gamma_j} < 1$, стоящих перед матрицами сдвигов. Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ кусочно-линейная траектория по спирали притягивается к началу координат и не является циклом.

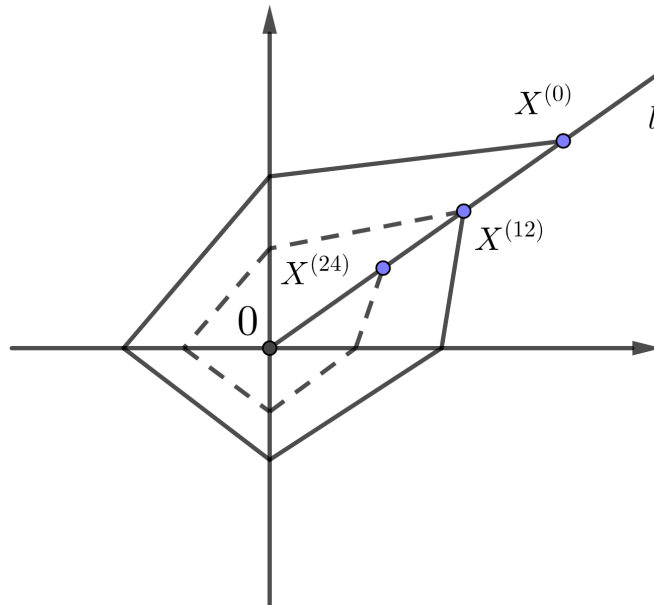


Рис. 4 – Двумерная иллюстрация

Образы всех внутренних для F_0 точек, лежащих на луче l , образуют двумерную кусочно-линейную инвариантную для траекторий системы (2.8) поверхность Σ в неинвариантной области W_5 .

Таким образом, доказана

Теорема 2.3. *Если выполняется одно из условий:*

а) $b_3 \geq b_1 \geq b_2 > 1$

б) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 1$

в) $b_2 \geq b_3 \geq b_1 > 1$,

и при этом все $a_j > 1$, то траектории точек из $\Sigma \subset W_5$ по спирали притягиваются к началу системы координат.

Глава 3. Динамические системы с гладкими правыми частями

3.1 Трехмерная динамическая система

3.1.1 Постановка задачи

В данной главе исследуются свойства фазовых портретов моделей генных сетей, в которых компоненты взаимодействуют по принципу, описанному в предыдущих главах. Отличие состоит в том, что скоростям синтеза и разложения веществ соответствуют не ступенчатые, а гладкие монотонные нелинейные функции.

Подобные модели были представлены в работе [53], где авторы не ограничивались трехмерными системами, а исследовали случай произвольной размерности.

В настоящей работе рассматривается несимметричная модель трехкомпонентной кольцевой генной сети

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_3) - \Gamma_1(x_1); \quad \frac{dx_2}{dt} = L_2(x_1) - \Gamma_2(x_2); \quad \frac{dx_3}{dt} = L_3(x_2) - \Gamma_3(x_3), \quad (3.1)$$

где скорость изменения концентрации $x_j > 0$ каждого вещества зависит от концентрации предыдущего, и эта зависимость описывается гладкими монотонно убывающими функциями L_j . В отличие от моделей, описанных в предыдущих главах, здесь процессу деградации соответствуют гладкие нелинейные монотонно возрастающие функции Γ_j . В качестве таких функций могут выступать дробно-линейные функции $\frac{\alpha x}{\beta + x}$, как в работе [53], где коэффициенты α и β положительны.

3.1.2 Построение инвариантной области и ее дискретизация

Для локализации цикла в фазовом портрете и исследования поведения траекторий в окрестности стационарной точки будем строить инвариантную область в виде параллелепипеда

$$\mathcal{Q}^3 = [x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \times [x_3^-, x_3^+].$$

При построении наложим дополнительные ограничения на правые части уравнений системы (3.1), а именно

$$\sup \Gamma_j \geq \max L_j = L_j(0), \quad (3.2)$$

чтобы для всех аргументов были определены значения обратных функций Γ_j^{-1} . Отметим, что L_j и Γ_j принимают положительные значения.

Для каждой переменной x_j найдем максимальные x_j^- и минимальные x_j^+ такие, чтобы при $x_j < x_j^-$ и $x_j > x_j^+$ траектории системы (3.1) могли только входить в параллелепипед, т.е. векторное поле было направлено внутрь области Q^3 :

$$\dot{x}_j|_{x_j < x_j^-, x_{j-1} > 0} = L_j(x_{j-1}) - \Gamma_j(x_j)|_{x_j < x_j^-, x_{j-1} > 0} \geq L_j(x_{j-1}^+) - \Gamma_j(x_j^-) > 0;$$

$$\dot{x}_j|_{x_j > x_j^+, x_{j-1} > 0} = L_j(x_{j-1}) - \Gamma_j(x_j)|_{x_j > x_j^+, x_{j-1} > 0} \leq L_j(x_{j-1}^-) - \Gamma_j(x_j^+) < 0;$$

Если для всех $j = 1, 2, 3$ выполняется неравенство (3.2), то в качестве левых границ отрезков можно взять $x_j^- = 0$, тогда правые границы равны $x_j^+ = \Gamma_j^{-1}(L_j(0))$, причем для всех $x_j \in [x_j^-, x_j^+]$ значения обратных функций определены. В итоге траектории системы (3.1), попадая в параллелепипед

$$Q^3 = [0, \Gamma_1^{-1}(L_1(0))] \times [0, \Gamma_2^{-1}(L_2(0))] \times [0, \Gamma_3^{-1}(L_3(0))], \quad (3.3)$$

не выходят из него с ростом времени, и справедлива

Лемма 3.1. *Параллелепипед Q^3 , определенный в (3.3), является положительно инвариантной областью системы (3.1).*

Найдем стационарную точку системы, приравнивая правые части уравнений к нулю. Из первого уравнения $L_1(x_3) = \Gamma_1(x_1) \Rightarrow x_1 = \Gamma_1^{-1}(L_1(x_3))$. Далее, из второго и третьего уравнений получаем

$$x_3 = \Gamma_3^{-1}(L_3(\Gamma_2^{-1}(L_2(\Gamma_1^{-1}(L_1(x_3)))))) = \mathcal{L}(x_3).$$

В левой части уравнения стоит монотонно возрастающая функция, а в правой части функция \mathcal{L} представляет собой композицию трех монотонно убывающих и трех монотонно возрастающих функций. Значит, координата x_3 стационарной

точки системы определяется из данного уравнения однозначно. Координаты x_1 и x_2 можно получить из уравнений $x_1 = \Gamma_1^{-1}(L_1(x_3))$, $x_2 = \Gamma_2^{-1}(L_2(x_1))$.

Таким образом, доказана

Лемма 3.2. *Область \mathcal{Q}^3 содержит единственную стационарную точку $S_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ системы (3.1).*

Проведем через точку S_0 гиперплоскости $x_j = x_j^0$, разбив параллелепипед \mathcal{Q}^3 на 8 более мелких параллелепипедов (блоков). Занумеруем их бинарными мультииндексами $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$. Проверим, что для полученного разбиения справедливо правило перехода (1.3) траектории системы (3.1), как и для системы (1.1). При переходе траектории из блока в блок нумерация каждого следующего блока отличается от предыдущего только одним индексом, а правило перехода зависит от предыдущего индекса. Пусть блок разбиения имеет нумерацию $\{*00\# \}$, где $*$ и $\#$ обозначают индекс или его отсутствие. В данном блоке $x_{i-1} < x_{i-1}^0$, $x_i < x_i^0$. Вычислим знак производной \dot{x}_i на грани $x_i = x_i^0$:

$$\dot{x}_i|_{x_{i-1} < x_{i-1}^0, x_i = x_i^0} = L_i(x_{i-1}) - \Gamma_i(x_i)|_{x_{i-1} < x_{i-1}^0, x_i = x_i^0} \geq 0.$$

Тогда траектория выходит из блока с номером $\{*00\# \}$ и попадает в блок $\{*01\# \}$. Переход осуществляется через грань $x_i = x_i^0$, где x_i^0 — координата стационарной точки S_0^3 . Теперь вычислим производную на грани $x_i = x_i^0$, по которой пересекаются блоки $\{*11\# \}$ и $\{*10\# \}$, и $x_{i-1} < x_{i-1}^0$.

$$\dot{x}_i|_{x_{i-1} > x_{i-1}^0, x_i = x_i^0} = L_i(x_{i-1}) - \Gamma_i(x_i)|_{x_{i-1} > x_{i-1}^0, x_i = x_i^0} \leq 0.$$

Отсюда можно заключить, что переход выполняется по правилу $\{*11\# \} \rightarrow \{*10\# \}$, т.е. траектория входит в блок $\{*10\# \}$ через грань $x_i = x_i^0$. Направление перехода определяется однозначно в силу Леммы 1.2, приведенной в Главе 1 и доказанной в работе [22]. В полученном разбиении блоки с номерами $\{000\}$ и $\{111\}$ являются трехвалентными, через их внутренние грани траектории могут только выходить. Используя правила перехода (1.3) и Лемму 1.2, построим диаграмму переходов траектории по шести блокам разбиения, имеющим валентность, равную единице.

Построенная для системы (3.1) диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
 \{100\} & \xrightarrow{F_0} & \{101\} & \xrightarrow{F_1} & \{001\} \\
 F_5 \uparrow & & & & F_2 \downarrow \\
 \{110\} & \xleftarrow{F_4} & \{010\} & \xleftarrow{F_3} & \{011\}
 \end{array} \quad (3.4)$$

Отметим, что диаграммы переходов траекторий по блокам разбиения для систем (1.1) и (3.1) совпадают.

3.1.3 Существование цикла

Пусть $\Phi : F_0 \rightarrow F_0$ — отображение Пуанкаре грани F_0 в себя, состоящее из шести сдвигов точек граней вдоль траектории системы (3.1) в порядке, определенном диаграммой (3.4). В Главе 1 формулы таких переходов были получены в явном виде для системы (1.1) со ступенчатыми функциями и линейной деградацией. В случае системы (3.1) построить отображение Пуанкаре Φ в явном виде нельзя в силу произвольности функций L_j и Γ_j . Для системы (3.1) с гладкими функциями в правых частях проведем линеаризацию в окрестности стационарной точки S_0^3 .

Матрица линеаризованной системы в окрестности стационарной точки S_0^3 имеет вид

$$J(S_0^3) = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & -p_2 & 0 \\ 0 & -q_3 & -p_3 \end{pmatrix},$$

где элементы p_j и $-q_j$ — это производные функций $\Gamma'_j(x_j^0)$ и $L'_j(x_{j-1}^0)$ соответственно, вычисленные в стационарной точке S_0^3 .

Вычислим характеристический полином $P(\lambda)$ для матрицы линеаризации системы (3.1) в стационарной точке S_0^3

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (p_1 + p_2 + p_3)\lambda^2 + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3)\lambda + p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3.$$

Все коэффициенты многочлена $P(\lambda)$ одного знака, для определенности будем считать их положительными. Тогда один из корней λ_1 данного полинома отрицательный, а два других $\lambda_{2,3}$ — комплексно сопряженные с ненулевой веществен-

ной частью. Согласно критерию Вышнеградского, если

$$(p_1 + p_2 + p_3)(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) < p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3, \quad (3.5)$$

то многочлен неустойчив, т.е. в данном случае имеет пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3}$ с положительной вещественной частью.

Определение 3.1. *Стационарную точку S динамической системы будем называть гиперболической, если матрица линеаризации, вычисленная в точке S , не имеет чисто мнимых собственных значений.*

Следовательно, стационарная точка S_0^3 при выполнении условия (3.5) является гиперболической и для нее выполнены условия теоремы Гробмана – Хартмана, см. [23, 39]. Приведем формулировку теоремы

Теорема. *(Д. М. Гробман, Ф. Хартман)*

Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, отображение $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и $O \in \mathbb{R}^n$ – гиперболическая неподвижная точка отображения Φ . Тогда существуют такие окрестности U_1, U_2, V_1, V_2 точки O и такой гомеоморфизм $h: U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$, что $\Phi = h^{-1} \circ D\Phi_0 \circ h$ на U_1 , т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : U_1 & \longrightarrow & U_2 \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ D\Phi_0 : V_1 & \longrightarrow & V_2 \end{array}$$

Здесь $D\Phi_0$ – линейная часть отображения Φ .

Вырежем из грани $F_0 = \{100\} \cap \{101\}$ пересечение этой грани с малой окрестностью Ω точки S_0 и обозначим данную усеченную грань $\Sigma = F_0 \setminus (\Omega \cap F_0)$. Под действием композиции шести сдвигов вдоль траекторий системы согласно стрелкам диаграммы (3.4), точки данной усеченной грани Σ перейдут во внутренность Σ . По теореме Брауэра отображение Пуанкаре Φ , состоящее из данных шести сдвигов, имеет неподвижную точку $P \in \Sigma$, а траектория этой точки является циклом системы (3.1).

Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Если выполняются условия (3.2) и (3.5), то у системы (3.1) существует цикл S^3 , который содержится в инвариантной области Q^3 и проходит согласно диаграмме (1.4).*

3.1.4 Инвариантная поверхность

Опишем построение инвариантной поверхности для системы (3.1) в малой окрестности стационарной точки S_0^3 в случае, когда выполняется условие (3.5) и стационарная точка S_0^3 является гиперболической. Пусть V и \bar{V} — комплексные собственные векторы, соответствующие паре комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью. Пусть собственный вектор V имеет координаты $(1, z_2, z_3)^T$. Чтобы найти знаки координат векторов $\operatorname{Re} V$ и $\operatorname{Im} V$, вычислим $(J(S_0^3) - (\alpha + i\beta)E)V$, где $\alpha, \beta > 0$. В результате имеем

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -\frac{q_2}{\lambda_1 + p_2}; \quad z_3 = -\frac{\lambda_1 + p_1}{q_1}.$$

Поскольку все $p_j, q_j > 0$, то вещественные части координат $\operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Re} z_3$ отрицательны, а мнимые части $\operatorname{Im} z_2 > 0$ и $\operatorname{Im} z_3 < 0$. Вектор $\operatorname{Re} V$, координаты которого имеют знаки $(+ - -)$, попадает в блок $\{100\}$ из диаграммы (1.4), а вектор $\operatorname{Im} V$ со знаками $(0 + -)$ лежит в объединении блоков $\{010\} \cup \{110\}$ той же диаграммы переходов. Тогда плоскость Π_1^2 , натянутая на эти векторы, также содержится в объединении этих блоков. Третий собственный вектор имеет все координаты одного знака, значит он направлен либо в блок $\{000\}$, либо в $\{111\}$.

Проведем в плоскости Π_1^2 отрезок $[S_0^3, P_0]$ с началом в стационарной точке S_0^3 . Пусть $\Psi = D\Phi_0$ — линейная часть отображения Пуанкаре, и по теореме Гробмана – Хартмана существует гомеоморфизм h такой, что $\Phi = h^{-1} \circ \Psi \circ h$. Под действием Ψ отрезок $[S_0^3, P_0]$ переходит в $[S_0^3, \Psi(P_0)]$, причем $[S_0^3, P_0] \subset [S_0^3, \Psi(P_0)]$ в силу того, что $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$. При большом числе итераций отображения Ψ получим последовательность вложенных отрезков

$$[S_0^3, P_0] \subset [S_0^3, \Psi(P_0)] \subset [S_0^3, \Psi(\Psi(P_0))] \subset \dots \subset [S_0^3, P^*],$$

ограниченную сверху отрезком $[S_0^3, P^*]$, где P^* — неподвижная точка Ψ . Отображение h^{-1} в малой окрестности точки S_0^3 переводит $[S_0^3, P_0]$ в дугу, соединяющую образ точки $h^{-1}(P_0)$ и S_0^3 . Тогда полученная выше последовательность отрезков перейдет в последовательность вложенных дуг с концом в точке P , где $P = h^{-1}(P^*)$. Траектории точек, лежащих на дуге $S_0^3 P$, образуют двумерную

инвариантную поверхность системы (3.1) ограниченную траекторией точки P , которая по Теореме 3.1 является циклом C^3 .

3.2 Шестимерная динамическая система

3.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим шестимерную динамическую систему с гладкими правыми частями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= L_1(y_3) - \Gamma_1(x_1); & \frac{dy_1}{dt} &= G_1(x_1) - \gamma_1(y_1). \\ \frac{dx_2}{dt} &= L_2(y_1) - \Gamma_2(x_2); & \frac{dy_2}{dt} &= G_2(x_2) - \gamma_2(y_2). \\ \frac{dx_3}{dt} &= L_3(y_2) - \Gamma_3(x_3); & \frac{dy_3}{dt} &= G_3(x_3) - \gamma_3(y_3).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Здесь скорости синтеза компонент генной сети описаны монотонно убывающими функциями L_j и монотонно возрастающими функциями G_j . Прототипом данной модели стала модель молекулярного репрессилатора Еловица – Лейблера, см. [46]. В работе [1] исследовалась динамическая система с гладкими скоростями синтеза и линейной деградацией. В [15, 32] рассматривалась модель генной сети со ступенчатыми функциями, описывающими регуляторные связи, и линейными функциями, отвечающими за процесс разложения. В динамической системе (3.6) нелинейные монотонно возрастающие функции Γ_j и γ_j соответствуют скоростям деградации компонент генной сети, поэтому такая модель является обобщением моделей, рассмотренных ранее. В качестве функций Γ_j и γ_j часто рассматривают функции Гласса–Маки $\frac{\alpha_j x_j}{b_j + x_j}$, как в [53].

3.2.2 Построение инвариантной области и ее дискретизация

Как и в предыдущем разделе, будем искать инвариантную область в виде шестимерного параллелепипеда

$$Q^6 = \prod_{j=1}^3 [x_j^-, x_j^+] \times [y_j^-, y_j^+]$$

в предположении, что для всех j определены значения $\Gamma_j^{-1}(L_j(0))$ и $\gamma_j^{-1}(\sup_{x_j} G_j(x_j))$, что требует выполнения неравенств

$$\sup_{x_j} \Gamma_j(x_j) \geq \max_{y_{j-1}} L_j = L_j(0); \quad \sup_{y_j} \gamma_j \geq \sup_{x_j} G_j. \quad (3.7)$$

Тогда $x_j^- = 0$ и $x_j^+ = \Gamma_j^{-1}(L_j(0))$, $y_j^- = 0$ и $y_j^+ = \gamma_j^{-1}(\sup G_j)$ соответственно и для всех $x_j > x_j^+$, $y_j > y_j^+$ будут выполнены неравенства

$$\dot{x}_j = L_j(y_{j-1}) - \Gamma_j(x_j) < 0, \quad \dot{y}_j = G_j(x_j) - \gamma_j(y_j) < 0.$$

Следовательно, инвариантной для траекторий системы (3.6) будет область

$$\mathcal{Q}^6 = \prod_{j=1}^3 [0, \Gamma_j^{-1}(L_j(0))] \times [0, \gamma_j^{-1}(\sup G_j)].$$

Лемма 3.3. *Шестимерный параллелепипед \mathcal{Q}^6 является положительно инвариантным для траекторий системы (3.6).*

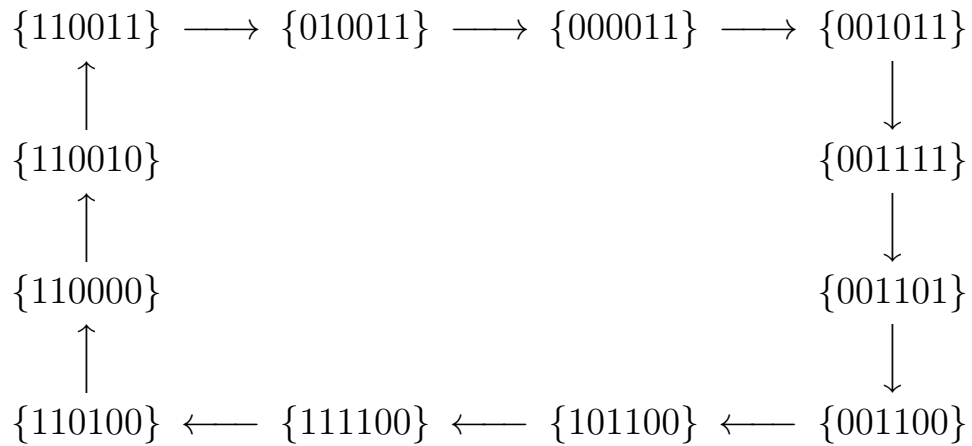
Найдем координаты стационарной точки, приравняв последовательно правые части уравнений системы (3.6) к нулю. В итоге имеем выражение для координаты y_3 :

$$y_3 = \gamma_3^{-1}(G_3(\Gamma_3^{-1}(L_3(\gamma_2^{-1}(G_2(\Gamma_2^{-1}(L_2(\gamma_1^{-1}(G_1(\Gamma_1^{-1}(L_1(y_3)))))))))))). \quad (3.8)$$

Здесь обратные функции γ_j^{-1} и Γ_j^{-1} определены для всех аргументов в силу ограничений (3.7), введенных ранее, и монотонно возрастают. Композиция трех убывающих и девяти возрастающих функций, стоящих в правой части уравнения (3.8) для координаты y_3 , монотонно убывает, а левая часть данного уравнения содержит монотонно возрастающую линейную функцию. Тогда уравнение (3.8) имеет единственное решение $y_3^{(0)}$, которое является шестой координатой стационарной точки \mathcal{S}_0^6 . Далее, координату $x_1^{(0)}$ можно получить из уравнения $x_1^{(0)} = \Gamma_1^{-1}(L_1(y_3^{(0)}))$, затем последовательно можно найти остальные координаты. В силу (3.7), точка \mathcal{S}_0^6 лежит внутри инвариантной области \mathcal{Q}^6 . Таким образом, доказана

Лемма 3.4. *Динамическая система (3.6) имеет единственную стационарную точку $\mathcal{S}_0^6 = (x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, x_3^{(0)}, y_3^{(0)})$ внутри инвариантной области \mathcal{Q}^6 .*

Проведя через стационарную точку гиперплоскости, параллельные координатным, получим разбиение инвариантного параллелепипеда \mathcal{Q}^6 на 64 блока. Как и в случае систем со ступенчатыми правыми частями, занумеруем каждый блок бинарным мультииндексом $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\}$, где ε_i равен нулю, если соответствующая координата меньше координаты стационарной точки, и $\varepsilon_i = 1$ иначе. Область \mathcal{Q}^6 содержит три подобласти. Правила перехода траекторий по блокам и алгоритм построения диаграммы переходов аналогичны описанным для системы (2.1). В работе [25] показано, что алгоритм отыскания блока минимальной валентности применим для динамических систем как с разрывными, так и с гладкими правыми частями. Значит, диаграмма переходов траектории системы (3.6) по блокам валентности один совпадает с диаграммой, построенной ранее для системы (2.1). Будем исследовать поведение траекторий системы (3.6), проходящих по одновалентным блокам согласно диаграмме (2.3)



Метод стратификации инвариантной области в данном случае позволяет сузить область поиска возможных циклов до 12 блоков разбиения, указанных в диаграмме.

3.2.3 Существование цикла

Проведем линеаризацию системы (3.6) в окрестности стационарной точки \mathcal{S}_0^6 и найдем условия, при которых точка \mathcal{S}_0^6 является гиперболической в смысле Определения 3.1. В этом случае будут выполнены условия теоремы Гробмана – Хартмана и фазовый портрет линеаризованной системы будет совпадать с фазовым портретом исходной системы в окрестности стационарной точки \mathcal{S}_0^6 . Введем

обозначение

$$p_j = \Gamma'_j(x_j^{(0)}), \quad q_j = \gamma'_j(y_j^{(0)}), \quad l_j = -L'_j(y_{j-1}^{(0)}), \quad k_j = G'_j(x_j^{(0)}).$$

Все производные вычислены в стационарной точке \mathcal{S}_0^6 .

Матрица линеаризации системы (3.6) в окрестности стационарной точки \mathcal{S}_0^6 имеет вид:

$$J_6(\mathcal{S}_0^6) = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \\ k_1 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 & -p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_3 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & -q_3 \end{pmatrix}$$

Вычислим характеристический полином данной матрицы:

$$P(\lambda) = (\lambda + p_1)(\lambda + p_2)(\lambda + p_3)(\lambda + q_1)(\lambda + q_2)(\lambda + q_3) + k_1 k_2 k_3 l_1 l_2 l_3,$$

Все его коэффициенты положительны. Метод исследования корней полинома $P(\lambda)$ приведен в работе [1] в случае линейных функций G_j , Γ_j и γ_j .

Характеристический полином $P(\lambda)$ можно представить в виде

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^3 (\lambda + p_j)(\lambda + q_j) + a^6,$$

где $a^6 = k_1 k_2 k_3 l_1 l_2 l_3$. Далее рассмотрим полином $\frac{P(\lambda)}{a^6}$. Если все p_j , q_j достаточно малы по сравнению с k_j , l_j , то корни $\frac{P(\lambda)}{a^6}$ близки к корням полинома $(\lambda + \mu)^6 + 1$. В самом деле,

$$\frac{P(\lambda)}{a^6} = \prod_{j=1}^3 \left(\frac{\lambda + p_j}{a} \right) \left(\frac{\lambda + q_j}{a} \right) + 1 \sim \prod_{j=1}^3 \left(\lambda + \frac{p_j}{a} \right) \left(\lambda + \frac{q_j}{a} \right) + 1 \sim (\lambda + \mu)^6 + 1.$$

Корни уравнения $(\lambda + \mu)^6 + 1 = 0$, где μ — положительное вещественное число, можно вычислить по формуле $\lambda = \sqrt[6]{-1} - \mu$. Два значения $\sqrt[6]{-1}$ попадают на мнимую ось и равны $\pm i$, другие два значения лежат в правой полуплоскости и оставшиеся — в левой. Тогда два корня $\lambda_{1,2} = \sqrt[6]{-1} - \mu$ лежат в правой полуплос-

кости, в левой полуплоскости расположены четыре корня $\lambda_{3,4,5,6}$. Следовательно, характеристический полином $P(\lambda)$ не имеет корней на мнимой оси и имеет хотя бы два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью. Значит, стационарная точка \mathcal{S}_0^6 неустойчива.

Таким образом, доказана

Теорема 3.2. *Если выполняются условия*

$$k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 \gg p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, \quad (3.9)$$

и (3.7), то у системы (3.6) существует цикл C^6 , проходящий по блокам диаграммы (2.3).

Условие (3.7), как и условие (3.2) из п. 3.1, можно интерпретировать следующим образом. Если скорости синтеза достаточно велики по сравнению со скоростями разложения веществ, участвующих в реакции, то генная сеть имеет колебательные режимы.

3.2.4 Инвариантная поверхность

В основе принципа построения инвариантной поверхности для системы (3.6) лежит теорема Гробмана – Хартмана, см. [39]. Будем рассматривать случаи, когда выполняется условие (3.9) для (3.6) и матрица линеаризации указанной системы не имеет чисто мнимых собственных значений.

Пусть $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ – пара комплексно сопряженных собственных значений с $a > 0$, $b > 0$ а Z – комплексный собственный вектор, соответствующий λ_1 . Пусть вектор Z имеет координаты $(1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$.

$$(J_6(\mathcal{S}_0^6) - \lambda_1 E)Z =$$

$$= \begin{pmatrix} -p_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \\ k_1 & -q_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 & -p_2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -q_2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_3 & -p_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & -q_3 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}$$

Найдем знаки остальных координат векторов $\operatorname{Re} Z$ и $\operatorname{Im} Z$ из уравнения $(J_6(\mathcal{S}_0^6) - \lambda_1 E)Z = 0$, последовательно выразив все координаты через $z_1 = 1$.

$$z_6 = -\frac{\lambda_1 + p_1}{l_1} = -\frac{\alpha + p_1 + i\beta}{l_1},$$

отсюда $\operatorname{Re} z_6 < 0$, $\operatorname{Im} z_6 < 0$.

$$z_2 = \frac{k_1}{\lambda_1 + q_1} = k_1 \frac{\alpha + q_1 - i\beta}{(\alpha + q_1)^2 + \beta^2},$$

тогда $\operatorname{Re} z_2 > 0$, $\operatorname{Im} z_2 < 0$.

Остальные координаты вычисляются аналогичным образом:

$$z_5 = \frac{(\lambda_1 + q_3)(\lambda_1 + p_1)}{-k_3 l_1}; \quad z_4 = \frac{(\lambda_1 + p_3)(\lambda_1 + q_3)(\lambda_1 + p_1)}{l_3 k_3 l_1}; \quad z_3 = \frac{-l_2 k_1}{(\lambda_1 + p_2)(\lambda_1 + q_1)}$$

Если $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ достаточно малы по сравнению с $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$, то координаты векторов $\operatorname{Re} Z$ и $\operatorname{Im} Z$ имеют следующие знаки:

$$\operatorname{Re} Z = (+ + -? - -), \quad \operatorname{Im} Z = (0 - + + - -).$$

Положительным координатам соответствуют индексы, равные единице, в нумерации блоков, а отрицательным — нулевые индексы. Знак вещественной части координаты z_4 вектора Z определить однозначно нельзя, как и знак мнимой части координаты z_1 , поскольку $\operatorname{Im} z_1 = 0$. Направлению вектора $\operatorname{Re} Z$ соответствует пара блоков $\{110000\}$ и $\{110100\}$, а направлению вектора $\operatorname{Im} Z$ — блоки $\{001100\}$ и $\{101100\}$. Данные блоки содержатся в области W_1 . Значит, плоскость Π_1^2 , натянутая на два этих вектора, лежит в объединении блоков диаграммы (2.3) W_1 . Напомним, что \mathcal{Q}^6 распадается на три подобласти, т.е. $\mathcal{Q}^6 = W_1 \cup W_3 \cup W_5$. Аналогичным образом можно показать, что пары векторов, соответствующие $\lambda_{3,4}$ и $\lambda_{5,6}$, попадают в две другие подобласти W_3 и W_5 .

Далее, проведем в плоскости Π_1^2 отрезок $[\mathcal{S}_0^6, U_0]$, содержащийся в окрестности точки \mathcal{S}_0^6 . Под действием отображения $\psi = D\varphi_0$ (линейной части отображения Пуанкаре φ) этот отрезок перейдет в $[\mathcal{S}_0^6, \psi(U_0)]$, содержащий $[\mathcal{S}_0^6, U_0]$. После некоторого числа итераций ψ получим последовательность вложенных отрезков, ограниченных $[\mathcal{S}_0^6, U^*]$, где U^* — неподвижная точка отображения ψ . При непрерывной замене координат h , определенной в теореме Гробмана — Хартмана,

данная последовательность отрезков перейдет в последовательность вложенных дуг, ограниченную дугой, которая соединяет \mathcal{S}_0^6 и $U = h^{-1}(U^*)$. Траектории всех точек, лежащих на этой дуге, образуют двумерную инвариантную поверхность системы (3.6). Эта поверхность ограничена циклом \mathcal{C}^6 .

Заключение

Вопросы существования и (не)единственности циклов у нелинейных динамических систем, а также вопросы взаимного расположения циклов для двумерных систем с полиномиальными правыми частями составляют 16-ю проблему Гильберта, описанную, например, в [54]. В настоящей работе изучены вопросы существования, единственности и устойчивости циклов и их локализации для динамических систем кинетического типа с разрывными правыми частями, а также исследовано поведение траекторий в окрестности стационарных точек и описано построение инвариантных поверхностей для гладких динамических систем с нелинейной деградацией. В данной работе были получены следующие результаты:

1. Найдены достаточные условия существования цикла для трехмерной динамической системы со ступенчатыми функциями в правых частях.
2. Для четырехмерной и шестимерной динамических систем со ступенчатыми функциями в правых частях уравнений получены достаточные условия существования, единственности и устойчивости циклов в инвариантных областях. Показано, что в неинвариантной подобласти шестимерная система не имеет циклов.
3. Описана комбинаторная структура фазового портрета для несимметричного аналога системы Еловица – Лейблера и разработан алгоритм построения блока минимальной и максимальной валентности.
4. Найдены достаточные условия существования цикла в окрестности стационарной точки для шестимерной и трехмерной системы с гладкими правыми частями.
5. Для систем, рассмотренных в Главе 3, построены инвариантные поверхности.

Можно выделить следующие направления дальнейших исследований:

1. Изучение вопросов существования и (не)единственности циклов у систем с многоступенчатыми разрывными правыми частями, как, например, в [59].

2. Исследование поведения траекторий вне окрестности точек покоя и выявление "скрытых аттракторов" в случае гладких динамических систем с нелинейными правыми частями. Скрытые аттракторы можно выявить, например, в рамках проведения численных экспериментов, как в работе [45], или с помощью качественной теории дифференциальных уравнений, см. [35].
3. Проведение численных экспериментов, поиск бифуркационных значений параметров, построение интегральных многообразий.

Список литературы

- [1] Аюпова Н.Б., Голубятников В.П., Казанцев М.В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессиллятора. // Сиб. журн. вычислительной матем., 2017.— Т.20, N 2. — С. 121 – 130.
- [2] Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Минушкина Л. С. Об инвариантных поверхностях в фазовых портретах моделей кольцевых генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики, 2022. — Т. 25, №4. — С. 5–13.
- [3] Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. Структура фазового портрета одной кусочно-линейной динамической системы. // Сиб. журн. индустр. матем., 2019. — Т.22, N 4. — С. 19 – 25.
- [4] Волков Е. И., Журов Б. А. Динамическое поведение изолированного репрессиллятора с обратной связью // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, 2013. — Т. 56, № 10. — С. 774–786.
- [5] Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия // Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи). М. АН СССР, 1949. — С. 41 – 79.
- [6] Гайдов Ю. А., Голубятников В. П. О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети // Сиб. журн. чист. и прикл. матем., 2007. — Т. 7, № 2. — С. 19 – 27.
- [7] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука 1966.
- [8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в кольцевых генных сетях // Теоретическая и математическая физика, 2016. — Т. 187, № 3. — С. 560 – 579.
- [9] Голубятников В. П., Акинъшин А. А., Аюпова Н. Б., Минушкина Л. С. Стратификации и слоения в фазовых портретах моделей генных сетей. // Вавиловский журнал генетики и селекции, 2022. — Т. 26, № 8. — С. 758 – 764.
- [10] Голубятников В. П., Градов В. С. О неединственности циклов в некоторых кусочно-линейных моделях кольцевых генных сетей. // Математические труды, 2020. — Т. 23, №1. — С. 107–122.
- [11] Голубятников В. П., Иванов В. В. Единственность и устойчивость цикла в трёхмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей. // Сиб. журн. чистой и прикладной математ., 2018. — Т.18, N 4. — С. 19 – 28.
- [12] Голубятников В. П., Иванов В. В., Минушкина Л. С. О существовании цикла

- в одной несимметричной модели кольцевой генной сети. // Сиб. журн. чистой и прикладной математики, 2018. — Т.18, N 3. — С. 26 – 32.
- [13] Голубятников В. П., Кириллова Н. Е., Минушкина Л. С. Численное и математическое моделирование генной сети с нелинейной деградацией компонент. // Сиб. журн. вычисл. матем., 2024. Т. 27, №1. — С. 1–10.
- [14] Голубятников В. П., Кириллова Н. Е. О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей. // Сиб. журн. чист. и прикл. матем., 2018. — Т.18, №1. — С.54-63.
- [15] Голубятников В. П., Минушкина Л. С. О единственности цикла в одной модели кольцевой генной сети. // Сиб. матем. журн., 2022. — Т. 63, № 1. — С. 95–103.
- Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On uniqueness of a cycle in one circular gene network model. // Siberian Math. J., 2022. V. 63, №1. — P. 79–86. (Переводная версия)
- [16] Голубятников В. П., Минушкина Л. С. О монотонности отображения Пуанкаре в некоторых моделях кольцевых генных сетей. // Сиб. журн. индустр. матем, 2019. — Т.22, № 3. — С. 39 – 47.
- [17] Голубятников В. П., Минушкина Л. С. О циклах в моделях генных сетей // МАРЧУКОВСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ – 2019. Труды Международной конференции. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, 2019. С. 106–111.
- [18] Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве // Матем. сборник (новая серия), 1962. — Т. 56(98), № 1. — С. 77 – 94.
- [19] Гудвин Б. Временная организация клетки / Пер. с англ. А. М. Жаботинского — под ред. С. . Шноля. — М.: Мир, 1966.
- [20] Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974.
- [21] Евдокимов А. А. Цепные коды и snake-in-the-box problem // Ученые записки Казанского университета, физико-математические науки, 2014 — Т.156, кн.3. — С.55–65.
- [22] Казанцев М.В. О некоторых свойствах графов доменов динамических систем // Сиб. журн. индустр. матем., 2015. — Т.18, №4. — С.42–48.
- [23] Каток А. Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. А. Кононенко. — М.:Изд-во "Факториал", 1999. — 768 с.

- [24] Кириллова Н.Е. Об инвариантных поверхностях в моделях генных сетей. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. — Т.23, N 4. — С. 69 – 76.
- [25] Кириллова Н. Е., Минушкина Л. С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Известия АлтГУ, 2019. — Т. 108, №4. — С. 82-85.
- [26] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях // Известия РАН, серия математическая, 2016. — Т. 80, №3. — С. 67–94.
- [27] Лихошвай В.А., Голубятников В.П., Демиденко Г.В., Евдокимов А.А., Фадеев С.И. Теория генных сетей / В кн.: Системная компьютерная биология. — Под ред. Н.А.Колчанова и С.С.Гончарова. — Новосибирск: СО РАН, 2008. — С.395–480.
- [28] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения/ Пер. с англ. Л. М. Лермана. — под ред. Н. Н. Баутина и Е. А. Леонтович. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
- [29] Минушкина Л. С. О существовании периодической траектории в трехмерной модели генной сети // “Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники”— 2018 [Электронный ресурс] / Барнаул, АлтГУ. С. 497–500.
- [30] Минушкина Л. С. О циклах в моделях кольцевых генных сетей с нелинейной деградацией компонент // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем» [Электронный ресурс] / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН; Мат. центр мир. ур. «Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН»; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова [и др.]. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2024. — С. 219–220.
- [31] Минушкина Л. С. Периодические траектории нелинейных моделей кольцевых генных сетей. // Владикавк. матем. журн., 2023. — Т. 25, №4. — С. 80–90. Minushkina L. S. Periodic Trajectories of Nonlinear Circular Gene Network Model. // Siberian Math. J., 2024. — V. 65, № 3. — P. 718 – 724. (Переводная версия)
- [32] Минушкина Л. С. Фазовые портреты блочно-линейной динамической системы в одной модели кольцевой генной сети // Математические заметки СВФУ, 2021. — Т. 28, №2. — С. 34 – 46.
- [33] Минц Р.М. Исследование некоторых основных типов сложных состояний

- равновесия в трехмерном пространстве // Матем. сборник (новая серия), 1964. — Т. 63 (105), № 2. — С. 169 – 214.
- [34] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: МГУ, 1984.
- [35] Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964.
- [36] Постников М. М. Устойчивые многочлены. — М.: Наука, 1981.
- [37] Потапов И. С., Волков Е. И. Анализ динамических режимов взаимодействующих синтетических генетических репрессилаторов // Компьютерные исследования и моделирование, 2010. — Т. 2, № 4. — С. 403–418.
- [38] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
- [39] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [40] Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. Гомоклинические циклы в одной модели генной сети. // Математические заметки СВФУ, 2014. — Т.21, N.14.
- [41] Akinshhin A. A., Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E., Podkolodnaya O. A., and Podkolodnyy N. L. On a numerical model of a circadian oscillator // Numerical analysis and applications, 2022. — V. 15, № 3. — P. 187 – 196.
- [42] Ayupova N., Golubyatnikov V., Gradov V., Minushkina L. Phase portraits of gene networks model. // Bioinformatics of Genome Regulation and Structure/Systems Biology (BGRS/SB-2020) : The Twelfth International Multiconference (06–10 July 2020, Novosibirsk, Russia); Abstracts. 2020. — P. 140.
- [43] Banks H.T., Mahaffy J.M. Stability of cyclic gene models for systems involving repression. // Journal of Theoretical Biology, 1978. — V. 74. — P. 323 – 334.
- [44] Bukharina T.A., Golubyatnikov V.P., Furman D.P., Kazantsev M.V., Kirillova N.E. Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2018. — V. 15. — P. 1271 – 1283.
- [45] Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems // Phys. Lett. A, 2015. — V. 370, № 40 – 41. — P. 2591 – 2596.
- [46] Elowitz M.B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature, 2000. — V.403. — P. 335 – 338.
- [47] Elowitz M.B., Sprinzak D. Reconstruction of genetic circuits // Nature, 2005. — V. 438. — P. 443 – 448.

- [48] Glass L. Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics. // *J. Chem. Phys.*, 1975. — V.63, N 4. — P.1325–1335.
- [49] Glass L., Pasternack J. S. Stable Oscillations in Mathematical Models of Biological Control Systems // *J. of Math. Biology.* 1978 — V.6. — P. 207–223.
- [50] Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. Combinatorics and geometry of circular gene networks models. // *Письма в Вавиловский журнал генетики и селекции*, 2020. — Т. 6, N 4. — С. 188 – 192.
- [51] Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On geometric structure of phase portraits of some piecewise linear dynamical systems. // *Tbilisi Mathematical Journal*, 2021. — Special Issue (7-2021). — P.49–56.
- [52] Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On uniqueness and stability of a cycle in one gene network // *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021. — V. 18, № 1. — P. 464 – 473.
- [53] Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system // *Journal of Diff. Equations*, 1977. — V. 25. — P. 39 – 64.
- [54] Ilyashenko Yu. Centennial history of Hilbert's 16th problem // *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 2002. — V. 39, № 3. — P. 301 – 354.
- [55] Llibre J., Novaes D.D., Teixeira M.A. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems. // *Nonlinear Dynamics*, 2015. — V. 82(3). — P. 1159 – 1175.
- [56] Mackey M. C., Glass L. Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems // *Science, New Series*, 1977. — V. 197, № 4300. — P. 287 – 289.
- [57] Mallet-Paret J., Smith H. The Poincaré – Bendixson Theorem for Monotone Cyclic Feedback Systems. // *J. of Dynamics and Diff, Equations*, 1990. — V. 2, № 4. — P. 367 – 421.
- [58] Mereu, A.C., Oliveira, R., Rodrigues, C.A.B. Limit cycles for a class of discontinuous piecewise generalized Kukles differential systems. // *Nonlinear Dynamics*, 2018. — V. 93. — P. 2201–2212.
- [59] Tchuraev R.N., Ratner V.A. A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression. In: *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation*. Ed. K.Bellman. 1983. Berlin: Verlag. P. 64–80.
- [60] Wang S., Yang J. Realization of arbitrary configuration of limit cycles of piecewise linear system. // *International J. of Bifurcation and Chaos*, 2018. — V. 30.