Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления»

*На правах рукописи*

Намсараева Гэрэлма Владимировна

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Кожанов Александр Иванович

Улан-Удэ – 2024

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.**

Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений с частными производными. Основное внимание уделено обратным задачам для уравнений соболевского типа, а именно: псевдопараболическим и псевдогиперболическим уравнениям, уравнению Буссинеска-Лява, возникающим в задачах физики жидкости и плазмы, теории упругости, в гидродинамике, геофизике, в теории волновых процессов и многих других областях.

В монографии Г.В. Демиденко, С.В. Успенского [21] было выделено три класса неклассических дифференциальных уравнений с частными производными, не разрешенных относительно старшей производной: уравнения простого соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения, уравнения же Буссинеска включены в класс псевдогиперболических уравнений.

Прямые задачи для таких уравнений исследовались в многочисленных работах, из которых отметим работы Р.Е. Шоуолтера [126] — [128], С.Г. Россби [124], С.Л. Соболева [87], С.А. Гальперна [19] и др. Имеется целый ряд монографий и обзорных статей, где излагается современное состояние теории таких уравнений и приведена подробная библиография (см., например, А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер [85]; Г. В. Демиденко, С. В. Успенский [21, 22]; A.I. Kozhanov [121]; G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov [130]; R.E. Showalter, T.W. Ting [129]; A. Favini, A. Yagi [115]; В. И. Жегалов [24] и др.). В этих работах исследованы вопросы разрешимости, асимптотического поведения и разрушения решений уравнений соболевского типа, указаны многочисленные приложения теории этих уравнений.

Важной особенностью обратных задач является их некорректность в смысле неустойчивости решения по отношению к погрешностям измерений. Поэтому теория обратных задач развивается наряду с теорией некорректных задач. Публикации по обратным и некорректным задачам появились в первой половине двадцатого века. Они были связаны с физикой (обратные задачи квантовой теории рассеяния, определения свойств материалов), геофизикой (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономией, медициной (задачи рентгеновской и акустической томографии) и другими областями естествознания. Основы теории и практики исследования некорректных задач были заложены и развиты в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и их последователей [52, 82, 91, 92, 131].

Теория обратных задач интенсивно развивается и постоянно расширяет области своего применения. Огромное количество работ российских и зарубежных авторов посвящены обратным задачам. Основное направление исследований касается классических дифференциальных уравнений с частными производными. В этом направлении важно отметить исследования А. С. Алексеева [3], О. М. Алифанова [4], Ю. Е. Аниконова [5–8, 103], Н. Я. Безнощенко [12], Ю. Я. Белова [13, 14, 104], Б. А. Бубнова [15], А. Л. Бухгейма [16], В. В. Васина [17, 18], А. М. Денисова [23], Н. И. Иванчова [25, 113], В. Исакова [107, 108], А. Д. Искендерова [28], С. И. Кабанихина [29, 119], В. Л. Камынина [30], М. Клибанова [32], А. Б. Костина [33], А. И. Кожанова [39–42, 121], М. М. Лаврентьева [52, 53], А. И. Прилепко [122], С. Г. Пяткова [80], В. Г. Романова [81, 82], А. Н. Тихонова [92, 93], J. R. Cannon [105], W. Wang, M. Yamamoto [132], A. Lorenzi [110], D. Lesnic [109] и других.

Вопросы разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа, рассматривались в работах А. И. Прилепко, Н. И. Иванчова, А. И. Кожанова, Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова, В. Л. Камынина [30], M. Yamamoto, М. В. Клибанова [32], В. М. Исакова, В. В. Васина, A. Lorenzi, С. Г. Пяткова, С. И. Кабанихина, А. Б. Костина [33] и многих других.

Обратным задачам для уравнений соболевского типа посвящено не так много работ. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений начали изучаться в 1980 году в работе W. Rundell [125]. Псевдопараболические уравнения возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов фильтрации, волновых процессов и многих других [11]. W. Rundell методом полугрупп исследовал обратную задачу восстановления правой части в многомерном псевдопараболическом уравнении. Другие задачи исследовались в работах А.И. Кожанова [35–37], А.Ш. Любановой [58,111,112], В.Е. Федорова [116], С.Г. Пяткова, С.Н. Шергина [100], А.А. Асанова, Э.Р. Атаманова [9, 10], А.С. Аблабекова [1], A. Lorenzi, E. Paparoni [110]. Отметим, что в работе [35, 37] методом регуляризации и продолжения по параметру была исследована разрешимость нелинейных обратных задач для псевдопараболических уравнений с интегральными условиями переопределения. В работе Б.С. Аблабекова исследован ряд коэффициентных обратных задач для уравнений псевдопараболического типа, где использовался метод полуобращения и уравнения сводились к уравнению Вольтера II рода.

Псевдогиперболические уравнения используются в теории нестационарного течения вязкого газа, при конвективной диффузии солей в пористой среде, распространении начальных уплотнений в вязком газе [26], [57]. Уравнение распространения продольных волн (или уравнение Буссинеска) возникает в теории длинных волн, в физике плазмы, в задачах гидродинамики [26], [57], [95]. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений изучались в работах A. Lorenzi, E. Paparoni [110], Б. С. Аблабекова, А. Р. Асанова [2, 9], А. К. Курманбаевой [51], А.М. Гулиевой [20]. Для уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява) разрешимость некоторых линейных и нелинейных обратных задач ранее изучалась в работах Я. Т. Мегралиева, А.А. Касымалиевой [31, 59, 60].

В данной работе одним из подходов к доказательству разрешимости обратных задач является редукция к прямой задаче с нелокальными граничными условиями (нелокальная задача). При этом важную роль играют условия переопределения. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. Известно, что при математическом моделировании нелокальные условия могут возникать в ситуации, когда граница области протекания реального процесса недоступна для непосредственных измерений, но можно получить некоторую дополнительную информацию об изучаемом явлении во внутренних точках области. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для уравнений с частными производными, важна она и как раздел теории обратных задач. Нелокальные задачи с интегральными условиями для некоторых неклассических дифференциальных уравнений изучались в работах Н.И. Ионкина и А.И. Кожанова [27, 34, 41, 43–45].

Полученные в диссертации результаты о разрешимости нелокальных задач для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений имеют самостоятельное значение.

Нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений изучены в работах Н.С. Попова, А.П. Солдатова, М.Х. Шханукова, А.И. Кожанова [79, 89, 90]. Н. С. Попов исследовал задачи с нелокальными граничными условиями А.А. Самарского и интегрального вида.

В теории обратных коэффициентных задач можно выделить два направления. Первое их них предполагает, что неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от пространственных переменных; это направление можно назвать теорией обратных задач пространственного типа. Второе направление связано с ситуацией, в которой неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от временной переменной; данное направление можно назвать теорией обратных задач временного типа.

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного типа, исследованиям разрешимости обратных задач временного типа посвящены все вышеперечисленные работы. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для дифференциальных уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа [42]. Так, Е.Г. Саватеев, А.И. Кожанов, И.В. Фроленков и Е.Н. Кригер изучали задачи, в которых неизвестный коэффициент содержал компоненты, зависящие как от пространственной, так и от временной переменной [38, 83, 99]. Такие обратные задачи мы называем задачами комбинированного типа.

В настоящей работе правая часть в некоторых рассматриваемых уравнениях имеет стандартный вид, т.е. неизвестный коэффициент зависит либо от пространственной, либо от временной переменной: такие задачи называют, соответсвенно, обратными задачами пространственного или временного типов. В диссертации также изучаются обратные задачи комбинированного типа, в которых неизвестная правая часть содержит компоненты, зависящие от пространственной и от временной переменных.

**Целью** диссертационной работы является исследование разрешимости (существования и единственности решения) линейных обратных задач для уравнений соболевского типа.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Переход от обратных задач для псевдопараболических и пседогиперболических уравнений к нелокальным задачам. Доказательство теорем разрешимости новых нелокальных задач для уравнений соболевского типа.

2. Доказательство теорем существования и единственности решений обратных задач для псевдопараболических и пседогиперболических уравнений, уравнений Буссинеска - Лява и вспомогательных задач для нагруженных уравнений.

**Научная новизна**

Обратные задачи для неклассических уравнений недостаточно изучены. В диссертационной работе впервые рассматривались некоторые постановки обратных задач для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений, а также уравнений соболевского типа высоко порядка. Применяются новые условия переопределения или неизвестные коэффициенты зависят от всех независимых переменных, входящих в уравнение. Для сведения обратных задач к прямым примененяются различные методы. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и основаны на строгих математических доказательствах.

**Положения, выносимые на защиту**

• Исследованы новые линейные обратные задачи для псевдопараболических уравнений с одним и двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие новые нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдопараболических уравнений;

• Исследованы новые линейные обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие новые нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдогиперболических уравнений;

• Получены условия однозначной разрешимости новых линейных обратных задач для параболических уравнений с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида. При этом обратная задача сведена к начально-краевой задаче для псевдопараболического уравнения, которая также была исследована;

• Исследованы вопросы разрешимости линейных обратных задач для уравнения Буссинеска-Лява временного и пространственного типов в одномерном случае. При этом применялись точечные и интегральные условия переопределения;

• Исследованы вопросы разрешимости новых обратных задач для уравнений соболевского типа высокого порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной в многомерном случае. Использовались условия переопределения точечного и интегрального вида. В специальном случае эти задачи были сведены к уравнению распространения продольных волн (Буссинеска-Лява) и также получены условия их разрешимости;

• Исследованы вопросы разрешимости новых обратных задач для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной в многомерном случае. Использовались финальные условия переопределения.

Важной особенностью является то, что доказаны теоремы существования решений, имеющих все производные (обобщенные), входящие в уравнения.

**Методология и методы исследования.**

В диссертационной работе исследовались обратные задачи для параболических уравнений и уравнений соболевского типа: псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений, некоторых аналогов уравнения Буссинеска-Лява.

Для сведения обратных задач к прямым в диссертации использованы различные подходы:

- редукция обратной задачи к нелокальной задаче для соответствующего уравнения, доказательство разрешимости которой имеет самостоятельное значение;
- для исследования обратной задачи применен второй подход, основанный на сведении к нагруженному уравнению, в котором нет неизвестного коэффициента;

- подход, предполагающий повышения порядка уравнения и сведение обратной задачи к задачам для уравнений составного типа.

В качестве функциональных пространств используются пространства А. Лебега и С.Л. Соболева.

При доказательстве разрешимости вспомогательных и обратных задач использовались методы регуляризации, метод продолжения по параметру, основанный на методе априорных оценок, и другие методы функционального анализа.

**Достоверность. Теоретическая и практическая значимость работы.**

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики и представлениями на научных конференциях и семинарах.

Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

На основании полученных результатов можно применить численные методы решения таких задач. Для некоторых задач можно получить оценки устойчивости.

**Краткое содержание диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 132 наименования, 14 из них [61–74] являются работами автора по теме диссертации (из них 7 статей [62, 67, 68, 70, 72–74], 4 из которых [70, 72–74] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК ведущих периодических изданий и/или в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus или Web of Science). В соавторстве написаны 3 работы [72–74]. Объем диссертации составляет 170 страниц.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

**Первая глава** состоит из трех параграфов. В ней изучаются линейные обратные задачи для параболических и псевдопараболических уравнений.

Здесь и далее в одномерном случае рассматриваются задачи в прямоугольнике Q:

$$Q = (x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T), T < \infty.$$

В первом параграфе главы рассмотрена обратная задача для псевдопараболического уравнения с граничными условиями переопределения с неизвестным коэффициентов, зависящим от временной переменной. Для этой задачи построены две различные нелокальные задачи для составного уравнения, имеющие самостоятельное значение.

**Обратная задача 1.1:** найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T.$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t)$ – заданные функции).

**Нелокальная задача 1.1:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} +$$
$$+ b_4(x,t)u_x + b_5(x,t)u = F_1(x,t),$$

$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$-v_t(1,t) = \gamma_1(t)v(1,t) + \gamma_2(t)v_t(0,t) + \gamma_3(t)v(0,t) + \varphi_1(t), \ \ 0 < t < T,$$

$$-v_{xt}(0,t) = \eta_1(t)v_x(0,t) + \eta_2(t)v_t(0,t) + \eta_3(t)v(0,t) + \psi_1(t), \ \ 0 < t < T,$$

$$v(x,0) = 0, \ \ x \in \bar{\Omega},$$

$$u(1,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ 0 < t < T.$$

($b_i(x,t), i = \overline{1,5}, F_1(x,t), \gamma_j(t), \eta_j(t), j = 1,2,3, \varphi_1(t), \psi_1(t)$ – заданные функции).

**Нелокальная задача 1.2:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + d_1(x,t)v_{xx} + d_2(x,t)v_x +$$
$$+ d_3(x,t)v + d_4(x,t)u_x + d_5(x,t)u = F_2(x,t),$$
$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$-v_t(0,t) = \alpha_1(t)v_{xt}(0,t) + \alpha_2(t)v_x(0,t) + \alpha_3(t)v(0,t) + \varphi_2(t),$$

$$-v_t(1,t) = \beta_1(t)v_{xt}(0,t) + \beta_2(t)v_x(0,t) + \beta_3(t)v(0,t) + \psi_2(t),$$

$$v(x,0) = 0, \ \ x \in \bar{\Omega},$$

$$u(1,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ 0 < t < T.$$

($d_i(x,t), i = \overline{1,5}, F_2(x,t), \alpha_j(t), \beta_j(t), j = 1,2,3, \varphi_2(t), \psi_2(t)$ – заданные функции).

Доказаны теоремы разрешимости нелокальных задач и исходной обратной задачи.

Во втором параграфе главы поставлена обратная задача для псевдопараболического уравнения с двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной. При этом заданы условия переопределения финального и интегрального видов.

**Обратная задача 1.2:** найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T.$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h_1(x,t), h_2(x,t)$ – заданные функции).

Для этой задачи также построены две различные нелокальные задачи, имеющие самостоятельное значение.

**Нелокальная задача 1.3:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + r_1(x,t)v_{xx} + r_2(x,t)v_x + r_3(x,t)v +$$
$$+ r_4(x,t)u_x + r_5(x,t)u = F_3(x,t),$$

$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$v_{xt}(0,t) = \mu_1(t)v_t(0,t) +$$
$$\mu_2(t)v(0,t) + \mu_3(t)v_t(1,t) + \mu_4(t)v(1,t) + \mu_5(t)v_x(0,t) + \varphi_3(t),$$

$$v_{xt}(1,t) = \nu_1(t)v_t(0,t) + \nu_2(t)v(0,t) +$$
$$\nu_3(t)v_t(1,t) + \nu_4(t)v(1,t) + \nu_5(t)v_x(1,t)\psi_3(t),$$

$$v(x,0) = 0, \;\; x \in \bar{\Omega},$$

$$u_x(1,t) = 0, \;\; u_x(0,t) = 0, \;\; 0 < t < T.$$

($r_i(x,t), i = \overline{1,5}, F_3(x,t), \mu_j(t), \nu_j(t), j = 1,2,3,4,5, \varphi_2(t), \psi_2(t)$ – заданные функции).

**Нелокальная задача 1.4:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + s_1(x,t)v_{xx} + s_2(x,t)v_x + s_3(x,t)v + s_4(x,t)u_x + s_5(x,t)u =$$
$$= F_4(x,t),$$
$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$-v_t(0,t) = \rho_1(t)v_{xt}(0,t) + \rho_2(t)v_x(0,t) + \rho_3(t)v(0,t)+$$
$$+\rho_4(t)v_{xt}(1,t) + \rho_5(t)v_x(1,t) + \rho_6(t)v(1,t) + \varphi_4(t),$$

$$-v_t(1,t) = \iota_1(t)v_{xt}(0,t) + \iota_2(t)v_x(0,t) + \iota_3(t)v(0,t)+$$
$$+\iota_4(t)v_{xt}(1,t) + \iota_5(t)v_x(1,t) + \iota_6(t)v(1,t) + \psi_4(t),$$

$$v(x,0) = 0, \ \ x \in \bar{\Omega},$$

$$u_x(1,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ 0 < t < T.$$

($s_i(x,t), i = \overline{1,5}, F_4(x,t), \rho_j(t), \iota_j(t), j = 1,2,3,4,5,6, \varphi_2(t), \psi_2(t)$ – заданные функции).

Доказаны теоремы разрешимости нелокальных задач и исходной обратной задачи.

Третий параграф первой главы посвящен обратным задачам для параболических уравнений с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида.

**Обратная задача 1.3**: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=0, \quad 0<x<1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad 0<t<T,$$

$$u(x,T)=0, \quad 0<x<1,$$

$$\int\limits_0^1 N(x)u(x,t)dx=0, \quad 0<t<T.$$

**Обратная задача 1.4**: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (2), а также условий

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0, \quad 0<t<T,$$

$$\int\limits_0^T R(t)u(x,t)dt=0, \quad 0<x<1.$$

$(f(x,t),\varphi(t),\psi(x),N(x),R(t)$ – заданные функции).

Поставленные задачи сводятся к псевдопараболическим задачам. Получены условия существования поставленных и вспомогательных задач.

**Вторая глава** посвящена исследованию линейных обратных задач для псевдогиперболических уравнений.

**Обратная задача 2.1:** Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt}-u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t)+q(t)h(x,t), \tag{3}$$

при выполнении для $u(x,t)$ условий

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad 0<t<T,$$

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0, \qquad x\in\Omega, \tag{4}$$

$$u_x(0,t)=0, \qquad 0<t<T.$$

**Обратная задача 2.2:** Необходимо найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (3), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (4), а также условий

$$u(0,t)=0, \qquad u_x(1,t)=0, \qquad 0<t<T,$$

$$u_x(0,t)=0, \qquad 0<t<T.$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t)$ – заданные функции).

Для обратной задачи 2.1 построена нелокальная задача.

**Нелокальная задача 2.1** Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнениями

$$v_{tt}-v_{xxt}+c_1(x,t)v+c_2(x,t)v_x+c_3(x,t)v_{xx}+c_4(x,t)u_x+c_5(x,t)u=F_1(x,t),$$

$$u_{xx}=v,$$

и такие, что для них выполняются условия

$$v_t(0,t)=\gamma_1(t)v(0,t)+\gamma_2(t)v_x(0,t)+\gamma_3(t)v(1,t)+\gamma_4(t)v_x(1,t)+\varphi_1(t), 0<t<T,$$

$$v_t(1,t)=\eta_1(t)v(0,t)+\eta_2(t)v_x(0,t)+\eta_3(t)v(1,t)+\eta_4(t)v_x(1,t)+\psi_1(t), 0<t<T,$$

$$v(x,0)=0, \ \ v_t(x,0)=0, \ \ u(x,0)=0, \ \ u_t(x,0)=0, \ \ x\in\Omega,$$

$$u(0,t)=0, \ \ u(1,t)=0, \ \ u_x(0,t)=0, \ \ 0<t<T.$$

$(c_i(x,t), i = \overline{1,5}, F_1(x,t), \gamma_j(t), \eta_j(t), j = \overline{1,4}\varphi_1(t), \psi_1(t)$ – заданные функции). Доказаны теоремы разрешимости нелокальной задачи 2.1 и обратной задачи 2.1.

Для доказательства разрешимости обратной задачи 2.2 сформулирована теорема 2.4. Введем обозначения:

$$a_1(x,t)=c(x,t); \qquad a_2(x,t)=a_x(x,t)-\frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_3(x,t)=a(x,t);$$

$$a_4(x,t)=\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_5(x,t)=c_x(x,t)-\frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_6(x,t)=-\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$f_2(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Пусть $a_6(x,t) = a_{6,1}(x,t) + a_{6,2}(x,t)$.

**Теорема 2.4.** Пусть выполняются условия

$$a_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = \overline{1,6};$$

$$f_2(x,t) \in L_2(Q);$$

$$h(x,t) \neq 0, \;\; a'_{6,1x}(x,t) \leq 0, \;\; a_{6,1}(1,t) \geq 0, \;\; t \in [0,T], \;\; x \in [0,1];$$

существует положительное число $\delta$, такое, что

$$1 - \frac{\delta^2}{2} > 0, \;\; 1 - \frac{\bar{a}_{6,2}^2}{2\delta^2} > 0.$$

Тогда обратная задача 2.2 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Второй параграф главы посвящен обратным задачам для уравнения Буссинеска-Лява с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной. Используются условия переопределения точечного и интегрального типов.

**Обратная задача 2.3:** найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T.$$

**Обратная задача 2.4:** найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (5), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (3), а также условий

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T,$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T.$$

**Обратная задача 2.5:** найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (5), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (6) и (7), а также условия

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = 0, \qquad 0 < t < T.$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t), K(x,t)$ – заданные функции).

Обратную задачу 2.3 приводим к нелокальной задаче 2.2.

**Нелокальная задача 2.2:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_{tt} - v_{xxtt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} + b_4(x,t)u + b_5(x,t)u_x = F_1(x,t),$$

$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$-v_{tt}(1,t) = \alpha_1(t)v(1,t) + \alpha_2(t)v(0,t) + \alpha_3(t)v_{tt}(0,t) + \varphi_1(t),\ \ 0 < t < T,$$

$$-v_{xtt}(0,t) = \beta_1(t)v(0,t) + \beta_2(t)v_x(0,t) + \beta_3(t)v_{tt}(0,t) + \psi_1(t),\ \ 0 < t < T,$$

$$v(x,0) = 0,\ \ v_t(x,0) = 0,\ \ x \in \bar{\Omega},$$

$$u(1,t) = 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ \ 0 < t < T.$$

$(b_i(x,t), i = 1,\bar{}5, F_1(x,t), \alpha_j(t), \beta_j(t), j = 1,\bar{}3\varphi_1(t), \psi_1(t)$ – заданные функции). Получены условия существования регулярных решений этих задач.

Параграф 2.2.2 посвящен разрешимости обратной задачи 2.4. Введем обозначения:

$$a_1(x,t) = a_x(x,t) - \frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_2(x,t) = a(x,t); \qquad a_3(x,t) = \frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$a_4(x,t) = -\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_5(x,t) = c_x(x,t) - \frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_6(x,t) = c(x,t);$$

$$f_1(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Пусть $\bar{a}_4 = \max\limits_{Q} |a_4(x,t)|$.

Доказана теорема 2.8 методом продолжения по параметру.

**Теорема 2.8.** Пусть выполняются условия

$$a_i(x,t) \in C(\bar{Q}),\ \ i = \overline{1,6};\ \ f_1(x,t) \in L_2(Q);$$

$$h(x,t) \neq 0,\ \ (x,t) \in \bar{Q};$$

$$a_{3x}(x,t) \leq 0.$$

$$\bar{a}_4 < 1.$$

Тогда обратная задача 2.4 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

В параграфе 2.2.3 изучена разрешимость обратной задачи 2.5.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{\delta_1^2}{2} - \frac{\delta_3^2}{2},$$

$$m_2 = 2 - \frac{K_1}{2\delta_1^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{K_2}{2\delta_3^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_4}\right) - \frac{K_3}{2\delta_5^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right) - \frac{K_4}{2\delta_7^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_8}\right),$$

$$m_3 = 1 - \frac{K_1\delta_2}{2\delta_1^2} - \frac{K_2\delta_4}{2\delta_3^2} - \frac{\delta_5^2}{2} - \frac{K_3\delta_6}{2\delta_5^2} - \frac{\delta_7^2}{2} - \frac{K_4\delta_8}{2\delta_7^2}.$$

Здесь числа $\delta_i$, $i = \overline{1,8}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже, числа $K_j$, $j = \overline{1,4}$ зависят от значений функций $h(x,t)$ и $K(x,t)$.

**Теорема 2.9.** Пусть выполняются условия

$$a(x,t) \in C(\bar{Q});\ \ c(x,t) \in C(\bar{Q});\ \ h(x,t) \in C(\bar{Q});$$

$$f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$\int\limits_0^1 K(x,t)h(x,t)dx \neq 0;$$

существует положительные числа $\delta_i$, $i=\overline{1,8}$ такие, что

$$m_1>0,\ \ m_2>0,\ \ m_3>0.$$

Тогда обратная задача 2.5 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t)\in V$, $q(t)\in L_2([0,T])$.

В третьем параграфе второй главы исследована разрешимость обратных задач для уравнения Буссинеска с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной.

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ - прямоугольник $\{(x,t): x\in \Omega, t\in(0,T), 0<T<\infty\}$. Далее пусть $\alpha$, $\beta$ - положительные постоянные, $f(x,t), h(x,t), N(x,t)$ - заданные функции, определенные при $x\in\bar{\Omega}, t\in [0,T]$.

**Обратная задача 2.6:** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt}-\alpha u_{xx}-\beta u_{xxtt}=f(x,t)+q(x)h(x,t), \tag{8}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0, \qquad x\in\Omega, \tag{9}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad 0<t<T, \tag{10}$$

$$u(x,T)=0, \qquad x\in\Omega.$$

**Обратная задача 2.7:** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (8), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (9) и (10), а также условия

$$\int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dt=0, \qquad x\in\Omega.$$

Обозначим $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma^2$. Положим

$$m_1(x,t)=\frac{h(x,t)}{\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau},$$

$\bar{m_1} = \max\limits_{\bar{Q}} |m_1(x,t)|$, $A$ - число, такое что $A > T$.

**Теорема 2.10.** Пусть выполняются условия

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \ \ f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau \neq 0, x \in [0,1];$$

$$\alpha T^4 \overline{m_1}^2 < \beta^3.$$

Тогда обратная задача 2.6 имеет решение $u(x,t)$, $q(x)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.

Для исследования разрешимости обратной задачи 2.7 применяется тот же метод перехода к интегродифференциальному уравнению, что и для обратной задачи 2.6. Доказана теорема разрешимости обратной задачи 2.7.

**Теорема 2.11.** Пусть выполняются условия

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \ \ f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau \neq 0, x \in [0,1];$$

Тогда обратная задача 2.7 при достаточно малом T имеет решение $u(x,t)$, $q(x)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.

В конце параграфа использован иной подход для доказательства разрешимости обратной задачи 2.7, основанный на сведение исходной обратной задачи к прямой задаче для "нагруженного" уравнения. Доказана теорема существования и единственности регулярного решения.

В **третьей главе** диссертации изучается разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением $u(x,t)$ также неизвестного множителя $q(t)$ в уравнении

$$D_t^{2p}(u - \Delta u) + Bu = f_0(x,t) + q(t)h_0(x,t)$$

($t \in (0,T)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p$ — натуральное число, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным, $B$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка, также действующий по пространственным переменным, $f_0(x,t)$ и $h_0(x,t)$ — заданные функции). В качестве условия переопределения в изучаемых задачах используется условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. В первом параграфе третьей главы изучаются обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной.

Пусть $\Omega$ есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница $Q$, $f_0(x,t)$, $h_0(x,t)$, $N(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Через $D_t^k$, $k = 1,2,\dots$, будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, через $B$ — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij}(x)v_{x_j}\right) + b_0(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до $n$). Наконец, для натурального числа $p$ через $L$ обозначим дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = D_t^{2p}(v - \Delta v) + Bv$$

($\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным).

**Обратная задача 3.1**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$Lu = f_0(x,t) + q(t)h_0(x,t), \tag{11}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{12}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, 2p-1, \tag{13}$$

$$\int\limits_\Omega N(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{14}$$

**Обратная задача 3.2**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (11), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (12) и (14), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1,$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Введем обозначение:

$$N_1 = \int\limits_\Omega [\Delta N(x)]^2\,dx \max_{0 \le t \le T} \left( \int\limits_\Omega h_1^2(x,t)\,dx \right).$$

Для функций $v(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega v^2(x)\,dx \le d_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i}^2(x)\,dx,$$

число $d_0$ в котором определяется лишь областью $\Omega$.

**Теорема 3.1**. Пусть выполняются условия

$$b^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1, \dots, n, \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega));$$

$$N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$|\psi(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{15}$$

$$N_1 < \left(1 + \frac{1}{d_0}\right)^2.$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.1 имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Получены условия разрешимости обратной задачи 3.2.

В параграфе 3.1.3 исследована разрешимость обратных задач 3.1 и 3.2, а также некоторых новых задач для уравнения (3.1) в случае $Bu = \beta_0\Delta u + \beta_1 u$ ($\beta_i = const$). Уравнение (11) в этом специальном случае можно назвать непосредственным аналогом уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява).

**Обратная задача 3.3**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (11), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (12) и (14), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0,\dots,p, \tag{16}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 1,\dots,p-1. \tag{17}$$

**Обратная задача 3.4**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (11), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (12), (14) и (16), а также условия

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = p+1,\dots,2p-1.$$

Обратные задачи 3.3 и 3.4 исходят в своих постановках из квазигиперболичности [46] оператора $L$. Специальный вид оператора $B$ позволит получить как теоремы существования, подобные теоремам 3.1 и 3.2, так и новые теоремы, причем новые теоремы существования можно будет получить и для обратных задач 3.1 и 3.2.

Положим

$$\gamma_0(T) = \left(\frac{\pi T^2}{8}\right)^{p-1}, \quad \gamma_1(T) = \frac{2|\beta_0|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1},$$

$$\gamma_2(T) = \sqrt{N_1} + \frac{2|\beta_1|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1} + \frac{2\sqrt{N_2}T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1}.$$

**Теорема 3.3**. Пусть выполняются условие (15), а также условия

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega));$$

$$(-1)^p \beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p \beta_1 \leq 0;$$

$$T\gamma_1(T) < 1, \quad T\gamma_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\gamma_1(T)\right).$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.3 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

**Теорема 3.4**. Пусть выполняются условие (15), а также условия

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega));$$

$$(-1)^p \beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p \beta_1 \leq 0;$$

$$T\overline{\gamma}_1(T) < 1, \quad T\overline{\gamma}_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\overline{\gamma}_1(T)\right).$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.4 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

В конце параграфа сформулированы и доказаны новые теоремы разрешимости обратных задач 3.1 – 3.4

Во втором параграфе рассмотрены линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной.

Пусть $\Omega$ есть ограниченная область пространства $R^n$ с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$ есть боковая граница $Q$. Далее, пусть $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x), h(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0,T]$, $\triangle$ есть оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, .., x_n$, $B$ есть дифференциальный оператор, действие которого по заданной функции $v(x)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v,$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

**Обратная задача 3.5:** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$\triangle u_t + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{19}$$

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{20}$$

**Обратная задача 3.6:** найти функции $u(x,t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$\triangle u_{tt} + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (18) — (20), а также условия

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Всюду ниже будем считать выполненным условие

$$h(x,t) \geq h_0 > 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{21}$$

Определим функции $h_1(x,t), h_2(x,t)$ и $F(x,t,\xi,\eta)$ при $(x,t) \in \bar{Q}$, $\xi = (\xi_1, .., \xi_n) \in R^n$, $\eta \in R$:

$$h_1(x,t) = -\frac{h_t(x,t)}{h(x,t)},$$

$$h_2(x,t) = h_1(x,t)b_0(x) + \frac{1}{2}(b^{ij}(x)h_{1x_i}(x,t))_{x_j},$$

$$F(x,t,\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n}\xi_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} h_{1x_i}(x,t)\xi_i\right)\eta + h_2(x,t)\eta^2.$$

Далее определим операторы $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 = h_1(x,t)\Delta + B,$$

$$C_2 = -(h_1(x,t)B - h_{1t}(x,t)\Delta).$$

**Теорема 3.9**. Пусть выполняются условие (21), а также условия

$$b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i,j = 1,..,n,$$
$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n;$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega};$$

$$h(x,t) \in C^3(\bar{Q}), \quad h_1(x,t) \leq 0, \quad h_{1t}(x,t) \leq 0,$$
$$h_2(x,t) \geq 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q;$$

$$F(x,t,\xi,\eta) \geq \gamma_0 \sum_{i=0}^{n}\xi_i^2, \quad \gamma_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \quad \xi \in R^n, \quad \eta \in R;$$

$$\text{оператор} \quad C_1 \quad \text{эллиптичен при} \quad (x,t) \in \bar{Q},$$
$$\text{оператор} \quad C_2 \quad \text{эллиптико-параболичен в} \quad \bar{Q}.$$

Далее изучена разрешимость обратной задачи 3.6. Будем считать, что функция $h$ зависит лишь от переменной $t$; общий случай $h = h(x,t)$ будет отличаться от рассмотренного большей громоздкостью условий и выкладок.

Пусть для коэффициентов $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ оператора $B$ выполняются условия гладкости теоермы 3.9, и пусть $\beta_0$ есть фиксированное число, $v(x)$ есть функция из пространства $W_2^2(\Omega)\bigcap \dot{W}_2^1(\Omega)$. Используя простейшие алгебраические неравенства, а также применяя второе основное неравенство для эллиптических операторов, нетрудно показать, что для функции $v(x)$ имеет место оценка

$$\|Bv - \beta_0\triangle v\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta_1\|\triangle v\|_{L_2(\Omega)} + \beta_2\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{22}$$

в которой числа $\beta_1$ и $\beta_2$ определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, .., n$ и $b_0(x)$, а также числом $\beta_0$ и областью $\Omega$.

Через $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к $\Gamma$ в текущей точке.

**Теорема 3.10**. Пусть выполняются условие (21), а также условия

$$b^{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i, j = 1, .., n,$$
$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n;$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega};$$

$$h \equiv h(t) \in C^3([0, T]), \quad (T - t)h_1(t) \leq -\tfrac{1}{2},$$
$$((T - t)h_1(t))_{tt} \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T];$$

а также одно из условий

$$b^{ij}(x)\nu_i\nu_j = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma$$

или для оператора $B$ существует число $\beta_0$ из промежутка $(-\infty; 0]$ такое, что для числа $\beta_1$, определенного в (22), выполняется неравенство

$$\frac{3}{2} + (T - t)h_1(t) - \frac{T^2\beta_1}{\pi} \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$ , $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ обратная задача 3.6 имеет решение $\{u(x, t), q(x)\}$ такое, что

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

В диссертационной работе условия малости всех теорем проверены.

В **заключении** изложены основные выводы, обсуждаются перспективы дальнейшей разработки темы.

**Личный вклад.** Научные результаты, составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Работы [72–74] написана в соавторстве. Основной вклад в доказательство априорных оценок принадлежит автору, А. И. Кожанову принадлежат идеи постановок задач и решающий вклад при доказательстве теорем существования. В работах [62, 67, 68, 70] решающий вклад в доказательство основных результатов принадлежит автору.

**Апробация результатов.**

По теме диссертации опубликовано 14 работ, из них 4 работы [70,72–74] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень периодических научных изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации, 3 статьи содержатся в журналах, не входящих в список ВАК [62, 67, 68], остальные работы опубликованы в сборниках материалов научных конференций [61, 63–66, 69, 71].

Доклады по теме диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

- Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений"(г. Новосибирск, 2013 г.);
- Международной научной конференции, посвященная 85-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева "Методы создания, исследования и идентификации математических моделей"(г. Новосибирск, 2013 г.);
- пятой международной молодежной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(г. Новосибирск, 2013 г.);
- VII Международной конференции по математическому моделированию (г. Якутск, 2014 г.);
- V Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО14)"(Байкал, 2014 г.);
- Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения В.Н. Врагова "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование"(г. Улан-Удэ, 2015 г.);

- Международной научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных посвященной 100-летию А.В. Бицадзе (г. Москва, 2016 г.);
- Международной школе-конференции. Соболевские чтения. (г. Новосибирск, 2016 г.);
- VII Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, 2020 г.);
- Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященной выдающемуся математику И.Г. Петровскому (г. Москва, 2021 г.);
- II – Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование” (г. Улан-Удэ, 2022 г.);
- Всероссийском научном семинаре "Неклассические задачи математической физики"(г. Якутск, 2022 г.);
- 6-ой Международной конференции "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения"(DYSC 2024), (г. Иркутск, 2024 г.).

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научном семинаре ”Обратные задачи” в Институте математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю. Я. Белова (г. Красноярск, 17 февраля 2014 г.), на семинарах по неклассическим дифференциальным уравнениям Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук А. И. Кожанова (г. Новосибирск, 2013 – 2024 гг.), а также на семинаре молодых ученых в рамках V Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование 19-28 июня 2014 г. ”Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа”.

**Благодарности.**

Автор выражает глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору А. И. Кожанову за руководство и неоценимую помощь в работе над диссертацией.

# 1. НЕЛОКАЛЬНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Глава посвящена исследованию разрешимости обратных задач для одномерных линейных уравнений параболического и псевдопараболического типов с граничными и интегральными условиями переопределения. Используемые методы основаны на переходе от обратной задачи к прямой задаче с так называемым нагруженным [78] уравнением с нелокальными граничными условиями, доказательстве разрешимости полученной задачи с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок.

## 1.1. Линейные обратные задачи для псевдопараболического уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $(0 < T < +\infty)$, $a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t), h_1(x,t), h_2(x,t)$ - известные функции, определенные при $x\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,T]$.

**Обратная задача 1.1:** найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0<t<T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x\in\Omega, \tag{1.3}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0<t<T. \tag{1.4}$$

В данной задаче условия (1.2), (1.3) есть условия обычной начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения (1.1) с известной правой частью, условия же (1.4) или одно из условий (1.2) можно трактовать как условия граничного переопределения; необходимость этих условий диктуется именно наличием неизвестного коэффициента $q(t)$.

### 1.1.1. Редукция обратной задачи к нелокальной

Выполним некоторые формальные построения, касающиеся задачи 1.1. Положим в уравнении (1.1) $x = 0$. Пусть выполняется условие $h(0, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда из равенства

$$u_t(0, t) - u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) + c(0, t)u(0, t) = f(0, t) + q(t)h(0, t)$$

можно найти $q(t)$:

$$q(t) = \frac{-u_{xxt}(0, t) + a(0, t)u_{xx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}.$$

Введем обозначения:

$$c_1(x, t) = \frac{-h(x, t)}{h(0, t)}, \quad c_2(x, t) = \frac{a(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \quad f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}.$$

Получим уравнение:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = \\ = c_1(x, t)u_{xxt}(0, t) + c_2(x, t)u_{xx}(0, t) + f_1(x, t), \end{gathered} \tag{1.5}$$

Положим в уравнении (1.5) $x = 1$. Получим равенство

$$\begin{gathered} u_t(1, t) - u_{xxt}(1, t) + a(1, t)u_{xx}(1, t) + c(1, t)u(1, t) = \\ = c_1(1, t)u_{xxt}(0, t) + c_2(1, t)u_{xx}(0, t) + f_1(1, t). \end{gathered}$$

Следовательно, для функции $v(x, t) = u_{xx}(x, t)$ выполняется условие

$$-v_t(1, t) + a(1, t)v(1, t) = c_1(1, t)v_t(0, t) + c_2(1, t)v(0, t) + f_1(1, t). \tag{1.6}$$

Продифференцируем уравнение (1.5) по $x$ и положим $x = 0$:

$$\begin{gathered} u_{xt}(0, t) - u_{xxxt}(0, t) + a_x(0, t)u_{xx}(0, t) + a(0, t)u_{xxx}(0, t) + c_x(0, t)u(0, t) + \\ + c(0, t)u_x(0, t) = c_{1x}(0, t)u_{xxt}(0, t) + c_{2x}(0, t)u_{xx}(0, t) + f_{1x}(0, t). \end{gathered}$$

Отсюда

$$-v_{xt}(0,t) = -a_x(0,t)v(0,t) - a(0,t)v_x(0,t) + \\ +c_{1x}(0,t)v_t(0,t) + c_{2x}(0,t)v(0,t) + f_{1x}(0,t). \tag{1.7}$$

Дважды продифференцируем уравнение (1.5) по $x$. Получим уравнение

$$v_t - v_{xxt} + a_{xx}v + 2a_x v_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_x u_x + cv = \\ = c_{1xx}(x,t)v_t(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t). \tag{1.8}$$

В результате мы пришли к нелокальной задаче для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. С помощью решения этой задачи и будет построено решение исходной обратной задачи 1.1.

Введем еще обозначения:

$$b_1(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t);\;\; b_2(x,t) = 2a_x(x,t);\;\; b_3(x,t) = a(x,t);$$

$$b_4(x,t) = 2c_x(x,t);\;\; b_5(x,t) = c_{xx}(x,t);$$

$$F_1(x,t) = c_{1xx}(x,t)v_t(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t);$$

$$\gamma_1(t) = -a(1,t);\;\; \gamma_2(t) = c_1(1,t);\;\; \gamma_3(t) = c_2(1,t);\;\; \varphi_1(t) = f_1(1,t);$$

$$\eta_1(t) = -a(0,t);\;\; \eta_2(t) = c_{1x}(0,t);\;\; \eta_3(t) = c_{2x}(0,t) - a_x(0,t);\;\; \psi_1(t) = f_{1x}(0,t).$$

Поскольку построенная нелокальная задача для уравнений вида (1.1) ранее не изучалась, изучим ее независимо от исходной обратной задачи.

Пусть $b_i(x,t), i = 1,2,3,4,5, F_1(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}, \eta_j(t), \gamma_j(t), j = 1,2,3, \varphi_1(t), \psi_1(t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

**Нелокальная задача 1.1:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} + \\ +b_4(x,t)u_x + b_5(x,t)u = F_1(x,t), \tag{1.9}$$

$$v = u_{xx}, \tag{1.10}$$

а также условиям

$$-v_t(1,t) = \gamma_1(t)v(1,t) + \gamma_2(t)v_t(0,t) + \gamma_3(t)v(0,t) + \varphi_1(t), \ \ 0 < t < T, \quad (1.11)$$

$$-v_{xt}(0,t) = \eta_1(t)v_x(0,t) + \eta_2(t)v_t(0,t) + \eta_3(t)v(0,t) + \psi_1(t), \ \ 0 < t < T, \quad (1.12)$$

$$v(x,0) = 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \quad (1.13)$$

$$u(1,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ 0 < t < T. \quad (1.14)$$

### 1.1.2. Разрешимость нелокальной задачи 1.1

Определим для дальнейшего исследования пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2)dxdt < +\infty \right\}.$$

Положим

$$\bar{\gamma}_2 = \max_{0 \le t \le T} |\gamma_2(t)|, \ \ k_1 = 1 - \delta_1^2 \bar{\gamma}_2 \delta_2,$$

$$k_2 = 2 - \frac{\bar{\gamma}_2 \delta_2}{\delta_1^2} - \bar{\gamma}_2 \delta_1^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right), \ \ k_3 = 1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\delta_1^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right).$$

Здесь числа $\delta_1$ и $\delta_2$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполняются условия*

$$b_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \ \ i = 1,2,3,4,5, \quad (1.15)$$

$$F_1(x,t) \in L_2(Q), \ \ \varphi_1(t) \in L_2([0,T]), \ \ \psi_1(t) \in L_2([0,T]), \quad (1.16)$$

$$\eta_2(t) \ge 0, \ \ t \in [0,T], \quad (1.17)$$

*существуют положительные числа $\delta_1$ и $\delta_2$ такие, что*

$$k_1 > 0, \ \ k_2 > 0, \ \ k_3 > 0. \quad (1.18)$$

*Тогда нелокальная задача (1.1.9)-(1.1.14) имеет решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$.*

*Доказательство.* Установим вначале наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи.

Умножим уравнение (1.9), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной $t$ и от 0 до 1 по пространственной $x$. Выполнив дополнительно интегрирование по частям, получим равенство:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dxd\tau + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau -$$
$$-2\int\limits_0^t v_{x\tau}(1,\tau)v_\tau(1,\tau)d\tau + 2\int\limits_0^t v_{x\tau}(0,\tau)v_\tau(0,\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_1 v_{xx}v_\tau dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_2 v_x v_\tau dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_3 v v_\tau dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_4 u_x v_\tau dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_5 v_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_1 v_{xx}v_{xx\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_2 v_x v_{xx\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_3 v v_{xx\tau} dxd\tau -$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_4 u_x v_{xx\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_5 u v_{xx\tau} dxd\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 F_1(v_\tau - v_{xx\tau}) dxd\tau.$$

Воспользовавшись краевыми условиями (1.11) и (1.12), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством

$$\omega^2(x) \le \delta\int\limits_0^1 \omega'^2(x)dx + \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int\limits_0^1 \omega^2(x)dx, \tag{1.19}$$

справедливым при всех $x \in [0,1]$ (здесь $\delta$ - произвольное положительное число), а также представлением

$$v(x,\tau) = \int\limits_0^\tau v_\xi(x,\xi)d\xi,$$

получим, что выполняется неравенство

$$(k_1-\delta_0)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dxd\tau + (k_2-\delta_0)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dxd\tau + (k_3-\delta_0)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau \le$$
$$\le C_1\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_{xx\xi}^2(x,\xi)dxd\xi d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_{x\xi}^2(x,\xi)dxd\xi d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_\xi^2(x,\xi)dxd\xi d\tau\right) +$$
$$+C_2\left(\int\limits_0^T(\varphi_1^2(t)+\psi_1^2(t))dt + \int\limits_Q F_1^2(t)dxdt\right),$$

в котором $\delta_0$ есть произвольное положительное число, числа $C_1$ и $C_2$ определяются функциями $b_j(x,t)$, $j = 1,2,3,4,5$, $\eta_i(x,t)$, $\gamma_i(x,t)$, $i = 1,2,3$. Поскольку числа $k_1$, $k_2$, $k_3$ положительны, то фиксируя $\delta_0$ настолько малым, чтобы выполнялось

$$k_1 - \delta_0 > 0, \;\; k_2 - \delta_0 > 0, \;\; k_3 - \delta_0 > 0,$$

получим неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2)dxd\tau \le C_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^T \int\limits_0^1 (v_{xx\xi}^2(x,\xi) + v_{x\xi}^2(x,\xi) + v_\xi^2(x,\xi))dxd\xi d\tau +$$
$$+ C_4 \left( \int\limits_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t))dt + \int\limits_Q F_1^2(t)dxdt \right).$$

Применим далее лемму Гронуолла. Получим априорную оценку

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 (v_{xx\tau}^2 + v_{x\tau}^2 + v_\tau^2)dxd\tau \le \\ \le C_0 \left( \int\limits_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t))dt + \int\limits_Q F_1^2(t)dxdt \right), \end{gathered} \tag{1.20}$$

в которой число $C_0$ определяется функциями $b_j(x,t), j = 1,2,3,4,5$, $\eta_i(x,t)$, $\gamma_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, а также числом T.

Из оценки (1.20) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \le M \left( \int\limits_0^T (\varphi_1^2(t) + \psi_1^2(t))dt + \int\limits_Q F_1^2(t)dxdt \right). \tag{1.21}$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$\begin{gathered} v_t - v_{xxt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} = \\ F_1(x,t) - \lambda[b_4(x,t)u_x + b_5(x,t)u], \end{gathered} \tag{1.22}$$

а также условиям (1.13), (1.14) и

$$-v_t(1,t) = \lambda[\gamma_1(t)v(1,t) + \gamma_2(t)v_t(0,t) + \gamma_3(t)v(0,t)] + \varphi_1(t), 0 < t < T, \tag{1.23}$$

$$-v_{xt}(0,t) = \lambda[\eta_1(t)v_x(0,t) + \eta_2(t)v_t(0,t)+ \\ +\eta_3(t)v(0,t)] + \psi_1(t), \ \ 0 < t < T. \tag{1.24}$$

Обозначим через $\Lambda$ множество тех чисел $\lambda$, для которых краевая задача (1.22), (1.23), (1.24), (1.10), (1.13) и (1.14) разрешима в пространстве $V$ для произвольной функции $F(x,t) \in L_2(Q)$, функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ из пространства $L_2([0,T])$.

Если будет доказано, что множество $\Lambda$ не пусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка [0,1]), то оно будет совпадать со всем отрезком [0,1] [94]. Непустота $\Lambda$ очевидна, так как число 0 принадлежит ему [102]. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше.

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [94] краевая задача (1.22), (1.23), (1.24), (1.10), (1.13) и (1.14) разрешима для $\lambda \in [0,1]$.

$\square$

### 1.1.3. Разрешимость обратной задачи 1.1

Вернемся к нелокальной задаче, полученной редукцией исходной обратной задачи. Положим

$$\bar{c_1} = \max_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le t\le T}} |c_1(x,t)|, \ \ k_1' = k_1 - \delta_3^2\bar{c_1}\delta_4, \ \ k_2' = k_2 - \frac{\bar{c_1}\delta_4}{\delta_3^2}, \ \ k_3' = k_3 - \frac{\bar{c_1}}{\delta_3^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_4}\right).$$

Здесь числа $\delta_3$ и $\delta_4$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

Сформулируем теорему существования решения для задачи: найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1.8) и (1.10), а также условиям (1.6), (1.7), (1.13) и (1.14).

**Теорема 1.2.** *Пусть выполняются условия*

$$h(0,t) \neq 0, \ \ t \in [0,T], \ \ a(x,t) \in C^2(\bar{Q}), c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{1.25}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \ \ f_x(x,t) \in L_2(Q), \\ f_{xx}(x,t) \in L_2([0,T]), \ \ h(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{1.26}$$

$$c_{1x}(x,t) \le 0, \ \ t \in [0,T]), \tag{1.27}$$

*существуют положительные числа* $\delta_3$ *и* $\delta_4$ *такие, что*

$$k_1' > 0, \ \ k_2' > 0, \ \ k_3' > 0. \tag{1.28}$$

*Тогда нелокальная задача (1.8), (1.10), (1.6), (1.7), (1.13) и (1.14) имеет решение* $v(x,t)$ *и* $u(x,t)$ *такое, что* $v(x,t) \in V$ *и* $u(x,t) \in V$*.*

*Доказательство.* Повторяя доказательство теоремы 1.1 - то есть, умножая уравнение (1.8), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$, и результат интегрируя от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (1.6) и (1.7), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством (1.19), представлением

$$v(x,\tau) = \int\limits_0^\tau v_\xi(x,\xi)d\xi,$$

а также леммой Гронуолла - придем к оценке вида (1.21). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (1.8), (1.10), (1.6), (1.7), (1.13) и (1.14). □

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 1.1.

**Теорема 1.3.** *Пусть выполняются все условия теоремы 1.2. Тогда обратная задача 1.1 имеет решение* $u(x,t)$ *и* $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V, q(t) \in L_2([0,T])$*.*

*Доказательство.* Пусть функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ есть функции, являющиеся решением нелокальной задачи (1.8), (1.10), (1.6), (1.7), (1.13) и (1.14). Положим

$$w(x,t) = u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) + a(x,t)u_{xx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) -$$
$$- f_1(x,t) - c_1(x,t)u_{xxt}(0,t) + c_2(x,t)u_{xx}(0,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{xx}(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0, \;\; 0 < t < T.$$

Из этих равенств следует, что $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - f(0,t)}{h(0,t)}.$$

Очевидно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (1.1). Осталось показать, что выполняется условие $u(0,t) = 0$. Положим в (1.1) $x = 0$. Получим равенство $u_t(0,t) + c(0,t)u(0,t) = 0$ . Из этого равенства и условия $u(0,0) = 0$ следует требуемое равенство $u(0,t) = 0$. Принадлежность $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. □

*Замечание.* На самом деле доказано, что решение $u(x,t)$ будет таким, что функция $u_{xx}(x,t)$ также есть элемент пространства $V$.

### 1.1.4. Редукция обратной задачи к нелокальной задаче 1.2

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи 1.1.

Вновь начнем с формальных построений. Продифференцируем уравнение (1.1) по переменной $x$ и положим $x = 0$. Считая, что выполняется условие $h_x(0,t) \neq 0$, вычислим $q(t)$:

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) - f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Положим $v(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Тогда $q(t)$ можно записать в виде

$$q(t) = \frac{-v_{xt}(0,t) + a_x(0,t)v(0,t) + a(0,t)v_x(0,t) - f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Введем обозначения:

$$a_1(x,t) = \frac{-h(x,t)}{h_x(0,t)}, \quad a_2(x,t) = \frac{a(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)},$$

$$a_3(x,t) = \frac{a_x(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)}, \quad f_2(x,t) = f(x,t) - \frac{f_x(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)}.$$

Получим уравнение:

$$u_t - v_t + a(x,t)v + c(x,t)u = a_1(x,t)v_{xt}(0,t)+ \\ +a_2(x,t)v_x(0,t) + a_3(x,t)v(0,t) + f_2(x,t). \tag{1.29}$$

Положим в уравнении (1.29) $x = 0$. Получим равенство

$$u_t(0,t) - v_t(0,t) + a(0,t)v(0,t) + c(0,t)u(0,t) = \\ = a_1(0,t)v_{xt}(0,t) + a_2(0,t)v_x(0,t) + a_3(0,t)v(0,t) + f_2(0,t).$$

Следовательно выполняется условие

$$-v_t(0,t) = -a(0,t)v(0,t) + a_1(0,t)v_{xt}(0,t)+ \\ +a_2(0,t)v_x(0,t) + a_3(0,t)v(0,t) + f_2(0,t). \tag{1.30}$$

Положим в уравнении (1.29) $x = 1$. Получим равенство

$$u_t(1,t) - v_t(1,t) + a(1,t)v(1,t) + c(1,t)u(1,t) = \\ = a_1(1,t)v_{xt}(0,t) + a_2(1,t)v_x(0,t) + a_3(1,t)v(0,t) + f_2(1,t).$$

Отсюда

$$-v_t(1,t) = -a(1,t)v(0,t) + a_1(1,t)v_{xt}(0,t)+ \\ +a_2(1,t)v_x(0,t) + a_3(1,t)v(0,t) + f_2(1,t). \tag{1.31}$$

Дважды продифференцируем уравнение (1.29) по $x$. Получим уравнение

$$v_t - v_{xxt} + a_{xx}v + 2a_xv_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_xu_x + cv = f_{2xx}(x,t)+ \\ +a_{1xx}(x,t)v_{xt}(0,t) + a_{2xx}(x,t)v_x(0,t) + a_{3xx}(x,t)v(0,t). \tag{1.32}$$

В результате мы пришли к нелокальной задаче для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. С помощью решения этой задачи и будет построено решение исходной обратной задачи.

Введем еще обозначения:

$$d_1(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t);\;\; d_2(x,t) = 2a_x(x,t);\;\; d_3(x,t) = a(x,t);$$

$$d_4(x,t) = 2c_x(x,t);\;\; d_5(x,t) = c_{xx}(x,t);$$

$$F_2(x,t) = a_1(x,t)v_{xt}(0,t) + a_2(x,t)v_x(0,t) + a_3(x,t)v(0,t) + f_2(x,t);$$

$$\alpha_1(t) = a_1(0,t);\;\; \alpha_2(t) = a_2(0,t);\;\; \alpha_3(t) = a_3(0,t) - a(0,t);$$

$$\varphi_2(t) = f_2(0,t);\;\; \beta_1(t) = a_1(1,t);\;\; \beta_2(t) = a_2(1,t);$$

$$\beta_3(t) = a_3(1,t) - a(1,t);\;\; \psi_2(t) = f_2(1,t).$$

Изучим нелокальную задачу независимо от исходной обратной задачи в общем виде.

Пусть $d_i(x,t), i = 1,2,3,4,5, F_2(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}, \alpha_j(t), \beta_j(t), j = 1,2,3, \varphi_2(t), \psi_2(t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

**Нелокальная задача 1.2:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} v_t - v_{xxt} + d_1(x,t)v_{xx} + d_2(x,t)v_x + \\ +d_3(x,t)v + d_4(x,t)u_x + d_5(x,t)u = F_2(x,t), \end{gathered} \tag{1.33}$$

$$v = u_{xx}, \tag{1.34}$$

а также условиям

$$-v_t(0,t) = \alpha_1(t)v_{xt}(0,t) + \alpha_2(t)v_x(0,t) + \alpha_3(t)v(0,t) + \varphi_2(t), \tag{1.35}$$

$$-v_t(1,t) = \beta_1(t)v_{xt}(0,t) + \beta_2(t)v_x(0,t) + \beta_3(t)v(0,t) + \psi_2(t), \tag{1.36}$$

$$v(x,0) = 0,\;\; x \in \bar{\Omega}, \tag{1.37}$$

$$u(1,t) = 0,\;\; u_x(0,t) = 0,\;\; 0 < t < T. \tag{1.38}$$

### 1.1.5. Разрешимость нелокальной задачи 1.2

Положим $\bar{\beta}_1 = \max\limits_{0 \le t \le T} |\beta_1(t)|$,

$$m_1 = 1 - \delta_5^2\delta_6 - \frac{\bar{\beta}_1\delta_6}{\delta_5^2},\;\; m_2 = 2 - \delta_5^2\left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right) - \frac{\bar{\beta}_1}{\delta_5^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right),\;\; m_3 = 1.$$

Здесь числа $\delta_5$ и $\delta_6$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.4.** *Пусть выполняются условия*

$$d_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{1.39}$$

$$F_2(x,t) \in L_2(Q), \;\; \varphi_2(t) \in L_2([0,T]), \;\; \psi_2(t) \in L_2([0,T]), \tag{1.40}$$

$$\alpha_1(t) \geq 0, \;\; t \in [0,T], \tag{1.41}$$

*существуют положительные числа* $\delta_5$ *и* $\delta_6$ *такие, что*

$$m_1 > 0, \;\; m_2 > 0. \tag{1.42}$$

*Тогда нелокальная задача (1.33)-(1.38) имеет решение* $u(x,t)$, $v(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$.

*Доказательство.* Установим наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи.

Умножим уравнение (1.33), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной $t$ и от 0 до 1 по пространственной $x$. Выполнив дополнительно интегрирование по частям, получим равенство:

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dx d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dx d\tau - \\
-2\int\limits_0^t v_{x\tau}(1,\tau)v_\tau(1,\tau)d\tau + 2\int\limits_0^t v_{x\tau}(0,\tau)v_\tau(0,\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_1 v v_\tau dx d\tau + \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_2 v_x v_\tau dx d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_3 v_{xx} v_\tau dx d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_4 u_x v_\tau dx d\tau + \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_5 v_\tau dx d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_1 v v_{xx\tau} dx d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_2 v_x v_{xx\tau} dx d\tau - \\
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_3 v_{xx} v_{xx\tau} dx d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_4 u_x v_{xx\tau} dx d\tau - \\
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 d_5 u v_{xx\tau} dx d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 F_2(v_\tau - v_{xx\tau}) dx d\tau.
\end{gathered}$$

Воспользовавшись краевыми условиями (1.35) и (1.36), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством (1.19) справедливым при всех

$x \in [0,T]$ (здесь $\delta$ - произвольное положительное число), а также представлением

$$v(x,\tau) = \int\limits_0^\tau v_\xi(x,\xi)d\xi,$$

получим, что выполняется неравенство

$$(m_1-\delta_0')\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dxd\tau + (m_2-\delta_0')\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dxd\tau + (m_3-\delta_0')\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2 dxd\tau \le$$
$$\le C_1'\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_{xx\xi}^2(x,\xi)dxd\xi d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_{x\xi}^2(x,\xi)dxd\xi d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v_\xi^2(x,\xi)dxd\xi d\tau\right) +$$
$$+C_2'\left(\int\limits_0^T(\varphi_2^2(t)+\psi_2^2(t))dt + \int\limits_Q F_2^2(t)dxdt\right),$$

в котором $\delta_0'$ есть произвольное положительное число, числа $C_1'$ и $C_2'$ определяются функциями $d_j(x,t),\ j=1,2,3,4,5,\ \beta_i(x,t),\ \alpha_i(x,t),\ i=1,2,3.$ Поскольку числа $m_1,\ m_2,\ m_3$ положительны, то фиксируя $\delta_0'$ настолько малым, чтобы выполнялось $m_1-\delta_0'>0$, $m_2-\delta_0'>0$, $m_3-\delta_0'>0$, получим неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{xx\tau}^2+v_{x\tau}^2+v_\tau^2)dxd\tau \le C_3'\int\limits_0^t\int\limits_0^T\int\limits_0^1(v_{xx\xi}^2(x,\xi)+v_{x\xi}^2(x,\xi)+v_\xi^2(x,\xi))dxd\xi d\tau +$$
$$+C_4'\left(\int\limits_0^T(\varphi_2^2(t)+\psi_2^2(t))dt + \int\limits_Q F_2^2(t)dxdt\right).$$

Применим далее лемму Гронуолла. Получим априорную оценку

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{xx\tau}^2+v_{x\tau}^2+v_\tau^2)dxd\tau \le C_0'\left(\int\limits_0^T(\varphi_2^2(t)+\psi_2^2(t))dt + \int\limits_Q F_2^2(t)dxdt\right), \tag{1.43}$$

в которой число $C_0'$ определяется функциями $d_j(x,t),\ j=1,2,3,4,5,$ $\beta_i(x,t),\ \alpha_i(x,t), i=1,2,3,$ а также числом T.

Из оценки (1.43) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2+\|u\|_V^2 \le M'\left(\int\limits_0^T(\varphi_1^2(t)+\psi_1^2(t))dt + \int\limits_Q F_1^2(t)dxdt\right). \tag{1.44}$$

Повторяя доказательство с использованием теоремы о методе продолжения по параметру [94] получим, что краевая задача (1.33)–(1.38) разрешима в пространстве $V$. $\square$

### 1.1.6. Разрешимость обратной задачи 1.1

Возращаясь теперь к нелокальной задаче (1.32), (1.34), (1.30), (1.31), (1.37), (1.38), полученной редукцией исходной обратной задачи, сформулируем теорему разрешимости этой задачи.

Положим

$$\bar{a}_1 = \max_Q |a_{1xx}(x,t)|, \;\; m_1' = m_1 - \frac{\delta_7^2 \bar{a}_1 \delta_9}{2} - \frac{\delta_8^2 \bar{a}_1 \delta_{10}}{2} - \frac{\bar{a}_1}{2\delta_8^2},$$

$$m_2' = m_2 - \frac{\delta_7^2 \bar{a}_1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta_9}\right) - \frac{\delta_8 \bar{a}_1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta_{10}}\right), \;\; m_3' = m_3 - \frac{\bar{a}_1}{2\delta_7^2}.$$

Здесь числа $\delta_7$, $\delta_8$, $\delta_9$ и $\delta_{10}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

Сформулируем теорему существования решения для задачи: найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1.32), (1.34), а также условиям (1.30), (1.31), (1.37), (1.38).

**Теорема 1.5.** *Пусть выполняются условия*

$$h_x(0,t) \neq 0, \;\; t \in [0,T], \;\; a(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \;\; c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{1.45}$$

$$f_2(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{2x}(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{2xx}(x,t) \in L_2([0,T]), \;\; h(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{1.46}$$

$$a_{1xx}(x,t) \leq 0, \;\; t \in [0,T]), \tag{1.47}$$

*существуют положительные числа $\delta_7$, $\delta_8$, $\delta_9$ и $\delta_{10}$ такие, что*

$$m_1' > 0, \;\; m_2' > 0, \;\; m_3' > 0. \tag{1.48}$$

*Тогда нелокальная задача* (1.32), (1.34), (1.30), (1.31), (1.37), (1.38) *имеет решение $v(x,t)$ и $u(x,t)$ такое, что $v(x,t) \in V$ и $u(x,t) \in V$.*

*Доказательство.* Повторяя доказательство теоремы 1.4 - то есть, умножая уравнение (1.32), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$, и результат интегрируя от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (1.30) и (1.31), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством (1.19), представлением

$$v(x,\tau) = \int\limits_0^\tau v_\xi(x,\xi)d\xi$$

а также леммой Гронуолла - придем к оценке вида (1.44). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (1.32), (1.34), (1.30), (1.31), (1.36), (1.38). □

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 1.1.

**Теорема 1.6.** *Пусть выполняются все условия теоремы 1.5. Тогда обратная задача 1.1 имеет решение $u(x,t)$ и $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V, q(t) \in L_2([0,T])$.*

*Доказательство.* Пусть функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ есть функции, являющиеся решением нелокальной задачи (1.32), (1.34), (1.30), (1.31), (1.37), (1.38). Положим

$$w(x,t) = u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) + a(x,t)u_{xx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) - f_{2xx}(x,t) -$$
$$-a_{1xx}(x,t)u_{xt}(0,t) - a_{2xx}(x,t)u_x(0,t) - a_{3xx}(x,t)u(0,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{xx}(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0, \;\; 0 < t < T.$$

Из этих равенств следует, что $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) - f_{2x}(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Очевидно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (1.1).

Осталось показать, что выполняется условие $u(0,t) = 0$. Положим в (1.1) $x = 0$. Получим равенство $u_t(0,t) + c(0,t)u(0,t) = 0$ . Из этого равенства и условия $u(0,0) = 0$ следует требуемое равенство $u(0,t) = 0$. Принадлежность $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. □

## 1.2. Линейные обратные задачи для псевдопараболического уравнения с неизвестной правой частью составного вида

Рассматривается обратная задача для псевдопараболического уравнения с двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от времени.

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $(0 < T < +\infty)$, $a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t), h_1(x,t), h_2(x,t)$ - известные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

**Обратная задача 1.2:** найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t), \quad (1.49)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \quad (1.50)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \quad (1.51)$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \quad (1.52)$$

### 1.2.1. Редукция обратной задачи 1.2 к нелокальной задаче 1.3

Построим нелокальную задачу для обратной задачи 1.2. Вновь начнем с формальных построений. Положим в уравнении (1.49) $x = 0$, а затем $x = 1$. Пусть выполняется условие $h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t) \neq 0$. Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} u_t(0,t) - u_{xxt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = \\ \qquad = f(0,t) + q_1(t)h_1(0,t) + q_2(t)h_2(0,t), \\ u_t(1,t) - u_{xxt}(1,t) + a(1,t)u_{xx}(1,t) + c(1,t)u(1,t) = \\ \qquad = f(1,t) + q_1(t)h_1(1,t) + q_2(t)h_2(1,t). \end{cases}$$

можно найти $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$q_1(t) = \frac{[-u_{xxt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - f(0,t)]h_2(1,t)}{h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t)} -$$

$$- \frac{[-u_{xxt}(1,t) + a(1,t)u_{xx}(1,t) - f(1,t)]h_2(0,t)}{h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t)},$$

$$q_2(t) = \frac{-[-u_{xxt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - f(0,t)]h_1(1,t)}{h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t)} +$$

$$+ \frac{[-u_{xxt}(1,t) + a(1,t)u_{xx}(1,t) - f(1,t)]h_1(0,t)}{h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t)}$$

Введем обозначения:

$$J(t) = h_1(0,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(0,t),$$

$$\chi_1(x,t) = \frac{-h_1(x,t)h_2(1,t) + h_1(1,t)h_2(x,t)}{J(t)},$$

$$\chi_2(x,t) = \frac{a(0,t)[h_1(x,t)h_2(1,t) - h_1(1,t)h_2(x,t)]}{J},$$

$$\chi_3(x,t) = \frac{h_1(x,t)h_2(0,t) - h_1(0,t)h_2(x,t)}{J(t)},$$

$$\chi_4(x,t) = \frac{a(1,t)[h_1(x,t)h_2(0,t) - h_1(0,t)h_2(x,t)]}{J(t)},$$

$$f_3(x,t) = \frac{-f(0,t)[h_2(1,t) - h_1(1,t)] + f(1,t)[h_2(0,t) - h_1(0,t)]}{J(t)} + f(x,t).$$

Получим уравнение:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f_3(x,t) + \chi_1(x,t)u_{xxt}(0,t) + \\ + \chi_2(x,t)u_{xx}(0,t) + \chi_3(x,t)u_{xxt}(1,t) + \chi_4(x,t)u_{xx}(1,t). \end{gathered} \tag{1.53}$$

Продифференцируем уравнение (1.53) по переменной $x$ и положим $x = 0$. Получим равенство:

$$u_{xt}(0,t) - u_{xxxt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + c_x(0,t)u(0,t)+$$
$$+c(0,t)u_x(0,t) = f_{3x}(0,t) + \chi_{1x}(0,t)u_{xxt}(0,t) + \chi_{2x}(0,t)u_{xx}(0,t)+$$
$$+\chi_{3x}(0,t)u_{xxt}(1,t) + \chi_{4x}(0,t)u_{xx}(1,t).$$

Пусть $v = u_{xx}$. Отсюда

$$v_{xt}(0,t) = a_x(0,t)v(0,t) + a(0,t)v_x(0,t) - f_{3x}(0,t)-$$
$$-\chi_{1x}(0,t)v_t(0,t) - \chi_{2x}(0,t)v(0,t) - \chi_{3x}(0,t)v_t(1,t) - \chi_{4x}(0,t)v(1,t). \tag{1.54}$$

При $x = 1$ получим равенство:

$$v_{xt}(1,t) = a_x(1,t)v(1,t) + a(1,t)v_x(1,t) - f_{3x}(1,t)-$$
$$-\chi_{1x}(1,t)v_t(0,t) - \chi_x 2(1,t)v(0,t) - \chi_{3x}(1,t)v_t(1,t) - \chi_{4x}(1,t)v(1,t). \tag{1.55}$$

Дважды дифференцируем уравнение (1.53) по $x$. Получим уравнение:

$$\begin{gathered} v_t - v_{xxt} + a_{xx}(x,t)v + 2a_x(x,t)v_x + a(x,t)v_{xx} + c_{xx}(x,t)u+ \\ +2c_x(x,t)u_x + c(x,t)v = \chi_{0xx}(x,t) + \chi_{1xx}(x,t)u_{xxt}(0,t)+ \\ +\chi_{2xx}(x,t)u_{xx}(0,t) + \chi_{3xx}(x,t)u_{xxt}(1,t) + \chi_{4xx}(x,t)u_{xx}(1,t). \end{gathered} \tag{1.56}$$

Получили нелокальную задачу для функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$. Доказав разрешимость этой задачи, мы сможем доказать разрешимость исходной обратной задачи 1.2.

Поскольку построенная нелокальная задача для уравнения вида (1.49) ранее не изучалась, изучим ее независимо от исходной обратной задачи. Для этого вновь введем обозначения:

$$r_1(x,t) = a(x,t);\;\; r_2(x,t) = 2a_x(x,t);\;\; r_3(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t);$$

$$r_4(x,t) = 2c_x(x,t);\;\; r_5(x,t) = c_{xx}(x,t);$$
$$F_3(x,t) = f_{3xx}(x,t) + \chi_{1xx}(x,t)u_{xxt}(0,t)+$$
$$+\chi_{2xx}(x,t)u_{xx}(0,t) + \chi_{3xx}(x,t)u_{xxt}(1,t) + \chi_{4xx}(x,t)u_{xx}(1,t);$$

$$\mu_1(t) = -\chi_{1x}(0,t) \ \ \mu_2(t) = -\chi_{2x}(0,t) + a_x(0,t); \ \ \mu_3(t) = -\chi_{3x}(0,t);$$

$$\mu_4(t) = -\chi_{4x}(0,t); \ \ \mu_5(t) = a(0,t); \ \ \varphi_3(t) = -f_{3x}(0,t);$$

$$\nu_1(t) = -\chi_{1x}(1,t) \ \ \nu_2(t) = -\chi_{2x}(1,t); \ \ \mu_3(t) = -\chi_{3x}(1,t);$$

$$\mu_4(t) = -\chi_{4x}(1,t) + a_x(1,t); \ \ \mu_5(t) = a(1,t); \ \ \psi_3(t) = -f_{3x}(1,t);$$

Пусть $r_i(x,t), i = 1,2,3,4,5, F_3(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}, \mu_j(t), \nu_j(t), j = 1,2,3,4, \varphi_3(t), \psi_3(t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

**Нелокальная задача 1.3:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} v_t - v_{xxt} + r_1(x,t)v_{xx} + r_2(x,t)v_x + r_3(x,t)v + \\ + r_4(x,t)u_x + r_5(x,t)u = F_3(x,t), \end{gathered} \tag{1.57}$$

$$v = u_{xx}, \tag{1.58}$$

а также условиям

$$\begin{gathered} v_{xt}(0,t) = \mu_1(t)v_t(0,t) + \\ \mu_2(t)v(0,t) + \mu_3(t)v_t(1,t) + \mu_4(t)v(1,t) + \mu_5(t)v_x(0,t) + \varphi_3(t), \end{gathered} \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered} v_{xt}(1,t) = \nu_1(t)v_t(0,t) + \nu_2(t)v(0,t) + \\ \nu_3(t)v_t(1,t) + \nu_4(t)v(1,t) + \nu_5(t)v_x(1,t)\psi_3(t), \end{gathered} \tag{1.60}$$

$$v(x,0) = 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \tag{1.61}$$

$$u_x(1,t) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ 0 < t < T. \tag{1.62}$$

### 1.2.2. Разрешимость нелокальной задачи 1.3

Положим $\bar{\mu}_4 = \max\limits_{0\le t\le T} |\mu_4(t)|$, $\bar{\nu}_3 = \max\limits_{0\le t\le T} |\nu_3(t)|$,

$$n_1 = 1, n_2 = 2 - \delta_{11}^2\delta_{12} - \frac{\bar{\nu}_3\delta_{12}}{\delta_{11}^2} - \delta_{13}^2\delta_{14} - \frac{\bar{\mu}_4\delta_{14}}{\delta_{13}^2},$$

$$n_3 = 1 - \delta_{11}^2\left(1 + \frac{1}{\delta_{12}}\right) - \frac{\bar{\nu}_3}{\delta_{11}^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_{12}}\right) - \delta_{13}^2\left(1 + \frac{1}{\delta_{14}}\right) - \frac{\bar{\mu}_4}{\delta_{13}^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_{14}}\right).$$

Здесь числа $\delta_{11}$, $\delta_{12}$, $\delta_{13}$ и $\delta_{14}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.7.** *Пусть выполняются условия*

$$r_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = 1,2,3,4,5, \tag{1.63}$$

$$F_3(x,t) \in L_2(Q), \varphi_3(t) \in L_2([0,T]), \psi_3(t) \in L_2([0,T]), \tag{1.64}$$

$$\mu_3(t) \ge 0, \nu_4(t) \le 0, t \in [0,T]), \tag{1.65}$$

*существуют положительные числа $\delta_{11}$, $\delta_{12}$, $\delta_{13}$ и $\delta_{14}$ такие, что*

$$n_2 > 0, \;\; n_3 > 0. \tag{1.66}$$

*Тогда нелокальная задача (1.57)-(1.62) имеет решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$*

### 1.2.3. Разрешимость обратной задачи 1.2

Вернемся к редуцированной нелокальной задаче (1.56), (1.58), (1.54), (1.55), (1.61), (1.62). Обозначим $\bar{\chi}_1 = \max\limits_{Q} |\chi_{1xx}(x,t)|$, $\bar{\chi}_3 = \max\limits_{Q} |\chi_{3xx}(x,t)|$,

$$n_1' = n_1 - \frac{\bar{\chi}_1\delta_{17}^2}{2} - \frac{\bar{\chi}_3\delta_{21}^2}{2}, n_2' = n_2 - \frac{\bar{\chi}_1\delta_{16}}{2\delta_{15}^2} - \frac{\bar{\chi}_1\delta_{18}}{2\delta_{17}^2} - \frac{\bar{\chi}_3\delta_{20}\delta_{19}^2}{2} - \frac{\bar{\chi}_3\delta_{22}\delta_{21}^2}{2},$$

$$n_3' = n_3 - \tfrac{2\bar{\chi}_1}{\delta_{15}^2}\left(1 + \tfrac{1}{\delta_{16}}\right) - \tfrac{2\bar{\chi}_1}{\delta_{17}^2}\left(1 + \tfrac{1}{\delta_{18}}\right) - \tfrac{\bar{\chi}_1\delta_{15}^2}{2} - 2\bar{\chi}_3\delta_{19}^2\left(1 + \tfrac{1}{\delta_{20}}\right) - \\ -2\bar{\chi}_3\delta_{21}^2\left(1 + \tfrac{1}{\delta_{22}}\right) - \tfrac{\bar{\chi}_3}{2\delta_{19}^2}.$$

Здесь числа $\delta_{15}$-$\delta_{22}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.8.** *Пусть выполняются условия*

$$J(t) \neq 0, t \in [0,T], a(x,t) \in C^2(\bar{Q}), c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), f_3(x,t) \in L_2(Q), \quad (1.67)$$

$$f_{3x}(x,t) \in L_2(Q), f_{3xx}(x,t) \in L_2([0,T]), h_1(x,t) \in C^2(\bar{Q}), h_2(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad (1.68)$$

$$\chi_{2xx}(x,t) \leq 0, \chi_4(x,t) \leq 0, \ \ t \in [0,T]), \quad (1.69)$$

*существуют положительные числа $\delta_{15}$-$\delta_{22}$ такие, что*

$$n_1 > 0, \ \ n_2' > 0, \ \ n_3' > 0. \quad (1.70)$$

*Тогда нелокальная задача (1.56), (1.58), (1.54), (1.55), (1.61) и (1.62) имеет решение $v(x,t)$ и $u(x,t)$ такое, что $v(x,t) \in V$ и $u(x,t) \in V$.*

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 1.2.

**Теорема 1.9.** *Пусть выполняются все условия теоремы 1.8. Тогда обратная задача 1.2 имеет решение $u(x,t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ такое, что $u(x,t) \in V, q_1(t) \in L_2([0,T]), q_2(t) \in L_2([0,T])$.*

Доказательство теорем 1.7, 1.8, 1.9 проводится аналогичным образом, как и теорем 1.1, 1.2, 1.3 соответственно.

### 1.2.4. Разрешимость нелокальной задачи 1.4

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи 2.1.

Вновь построим нелокальную задачу. Продифференцируем уравнение (1.49) по переменной $x$. Положим $x = 0$, а затем $x = 1$. Пусть выполняется условие $h_{1x}(0,t)h_{2x}(1,t) - h_{1x}(1,t)h_{2x}(0,t) \neq 0$. Обозначим $J_1(t) = h_{1x}(0,t)h_{2x}(1,t) - h_{1x}(1,t)h_{2x}(0,t)$, $G_1(t) = -u_{xxxt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) - f_x(0,t)$, $G_2(t) = -u_{xxxt}(1,t) + a_x(1,t)u_{xx}(1,t) + a(1,t)u_{xxx}(1,t) - f_x(1,t)$,

Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} q_1(t)h_{1x}(0,t) + q_2(t)h_{2x}(0,t) = G_1(t), \\ q_1(t)h_{1x}(1,t) + q_2(t)h_{2x}(1,t) = G_2(t). \end{cases}$$

найдем $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$q_1(t) = \frac{G_1(t)h_{2x}(1,t) - G_2(t)h_{2x}(0,t)}{J_1(t)},$$

$$q_2(t) = \frac{G_2(t)h_{1x}(0,t) - G_1(t)h_{1x}(1,t)}{J_1(t)}.$$

Введем обозначения:

$$l_1(x,t) = \frac{h_{2x}(0,t)h_1(x,t) + h_{1x}(0,t)h_2(x,t)}{J_1(t)},$$

$$l_2(x,t) = \frac{-a(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(x,t) - h_{1x}(0,t)h_2(x,t)]}{J_1(t)},$$

$$l_3(x,t) = \frac{-a_x(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(x,t) - h_{1x}(0,t)h_2(x,t)]}{J_1(t)},$$

$$l_4(x,t) = \frac{-h_{2x}(1,t)h_1(x,t) + h_{1x}(1,t)h_2(x,t)}{J_1(t)},$$

$$l_5(x,t) = \frac{a(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(x,t) - h_{1x}(1,t)h_2(x,t)]}{J_1(t)},$$

$$l_6(x,t) = \frac{a_x(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(x,t) - h_{1x}(1,t)h_2(x,t)]}{J_1(t)},$$

$$f_4(x,t) = \frac{h_1(x,t)[f_x(1,t)h_{2x}(0,t) - f_x(0,t)h_{2x}(1,t)]}{J_1(t)} +$$

$$+ \frac{h_2(x,t)[f_x(0,t)h_{1x}(1,t) - f_x(1,t)h_{1x}(0,t)]}{J_1(t)} + f(x,t).$$

Получим уравнение:

$$\begin{gathered} u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = l_1(x,t)u_{xxxt}(1,t) + \\ + l_2(x,t)u_{xxx}(1,t) + l_3(x,t)u_{xx}(1,t) + l_4(x,t)u_{xxxt}(0,t) + \\ + l_5(x,t)u_{xxx}(0,t) + l_6(x,t)u_{xx}(0,t) + f_4(x,t). \end{gathered} \tag{1.71}$$

Положим $x = 0$. Пусть $v = u_{xx}$. Получим равенство:

$$\begin{gathered} -v_t(0,t) + a(0,t)v(0,t) = l_1(0,t)v_{xt}(1,t) + \\ + l_2(0,t)v_x(1,t) + l_3(0,t)v(1,t) + l_4(0,t)v_{xt}(0,t) + \\ + l_5(0,t)v_x(0,t) + l_6(0,t)v(0,t) + f_4(0,t). \end{gathered} \tag{1.72}$$

При $x = 1$ получим второе краевое условие:

$$
\begin{gathered}
-v_t(1,t) + a(1,t)v(1,t) = l_1(1,t)v_{xt}(1,t) + \\
+ l_2(1,t)v_x(1,t) + l_3(1,t)v(1,t) + l_4(1,t)v_{xt}(0,t) + \\
+ l_5(1,t)v_x(0,t) + l_6(1,t)v(0,t) + f_4(1,t).
\end{gathered}
\tag{1.73}
$$

Дважды дифференцируем уравнение 1.23 по $x$. Получим:

$$
\begin{gathered}
v_t - v_{xxt} + a_{xx}(x,t)v + 2a_x(x,t)v_x + a(x,t)v_{xx} + c_{xx}(x,t)u + \\
+ 2c_x(x,t)u_x + c(x,t)v = l_{1xx}(x,t)v_{xt}(1,t) + \\
+ l_{2xx}(x,t)v_x(1,t) + l_{3xx}(x,t)v(1,t) + l_{4xx}(x,t)v_{xt}(0,t) + \\
+ l_{5xx}(x,t)v_x(0,t) + l_{6xx}(x,t)v(0,t) + f_{4xx}(x,t).
\end{gathered}
\tag{1.74}
$$

Получили нелокальную задачу для функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$. Доказав разрешимость этой задачи, мы сможем доказать разрешимость исходной обратной задачи 1.2. Поскольку построенная нелокальная задача для уравнения вида (1.49) ранее не изучалась, изучим ее независимо от исходной обратной задачи. Для этого вновь введем обозначения:

$$s_1(x,t) = a(x,t);\;\; s_2(x,t) = 2a_x(x,t);\;\; s_3(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t);$$

$$s_4(x,t) = 2c_x(x,t);\;\; s_5(x,t) = c_{xx}(x,t);$$

$$F_4(x,t) = l_{1xx}(x,t)v_{xt}(1,t) + l_{2xx}(x,t)v_x(1,t) + l_{3xx}(x,t)v(1,t) +$$

$$+ l_{4xx}(x,t)v_{xt}(0,t) + l_{5xx}(x,t)v_x(0,t) + l_{6xx}(x,t)v(0,t) + f_{4xx}(x,t);$$

$$\rho_1(t) = \frac{-h_{2x}(1,t)h_1(0,t) + h_{1x}(1,t)h_2(0,t)}{J_1(t)};$$

$$\rho_2(t) = \frac{a(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(0,t) - h_{1x}(1,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)};$$

$$\rho_3(t) = \frac{a_x(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(0,t) - h_{1x}(1,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)};$$

$$\rho_4(t) = \frac{h_{2x}(0,t)h_1(0,t) - h_{1x}(0,t)h_2(0,t)}{J_1(t)};$$

$$\rho_5(t) = \frac{-a(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(0,t) - h_{1x}(0,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)};$$

$$\rho_6(t)=\frac{-a_x(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(0,t)-h_{1x}(0,t)h_2(0,t)]}{J_1(t)};$$

$$\varphi_4(t)=\frac{h_1(0,t)[f_x(1,t)h_{2x}(0,t)-f_x(0,t)h_{2x}(1,t)]}{J_1(t)}+$$

$$+\frac{h_2(0,t)[f_x(0,t)h_{1x}(1,t)-f_x(1,t)h_{1x}(0,t)]}{J_1(t)}+f(0,t);$$

$$\iota_1(t)=\frac{-h_{2x}(1,t)h_1(1,t)+h_{1x}(1,t)h_2(1,t)}{J_1(t)};$$

$$\iota_2(t)=\frac{a(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(1,t)-h_{1x}(1,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)};$$

$$\iota_3(t)=\frac{a_x(0,t)[h_{2x}(1,t)h_1(1,t)-h_{1x}(1,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)};$$

$$\iota_4(t)=\frac{h_{2x}(0,t)h_1(1,t)-h_{1x}(0,t)h_2(1,t)}{J_1(t)};$$

$$\iota_5(t)=\frac{-a(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(1,t)-h_{1x}(0,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)};$$

$$\iota_6(t)=\frac{-a_x(1,t)[h_{2x}(0,t)h_1(1,t)-h_{1x}(0,t)h_2(1,t)]}{J_1(t)};$$

$$\psi_4(t)=\frac{h_1(1,t)[f_x(1,t)h_{2x}(0,t)-f_x(0,t)h_{2x}(1,t)]}{J_1(t)}+$$

$$+\frac{h_2(1,t)[f_x(0,t)h_{1x}(1,t)-f_x(1,t)h_{1x}(0,t)]}{J_1(t)}+f(1,t).$$

Пусть $s_i(x,t), i=1,2,3,4,5, F_4(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t)\in\bar{Q}, \rho_j(t), \iota_j(t), j=1,2,3,4,5,6, \varphi_4(t), \psi_4(t)$ есть заданные функции, определенные при $t\in[0,T]$.

**Нелокальная задача 1.4:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t-v_{xxt}+s_1(x,t)v_{xx}+s_2(x,t)v_x+s_3(x,t)v+s_4(x,t)u_x+s_5(x,t)u=$$
$$=F_4(x,t), \tag{1.75}$$

$$v=u_{xx}, \tag{1.76}$$

а также условиям

$$-v_t(0,t) = \rho_1(t)v_{xt}(0,t) + \rho_2(t)v_x(0,t) + \rho_3(t)v(0,t) + \\ +\rho_4(t)v_{xt}(1,t) + \rho_5(t)v_x(1,t) + \rho_6(t)v(1,t) + \varphi_4(t), \tag{1.77}$$

$$-v_t(1,t) = \iota_1(t)v_{xt}(0,t) + \iota_2(t)v_x(0,t) + \iota_3(t)v(0,t) + \\ +\iota_4(t)v_{xt}(1,t) + \iota_5(t)v_x(1,t) + \iota_6(t)v(1,t) + \psi_4(t), \tag{1.78}$$

$$v(x,0) = 0, \;\; x \in \bar{\Omega}, \tag{1.79}$$

$$u_x(1,t) = 0, \;\; u_x(0,t) = 0, \;\; 0 < t < T. \tag{1.80}$$

Положим $\bar{\iota}_1 = \max\limits_{0\le t\le T} |\iota_1(t)|$, $\bar{\rho}_4 = \max\limits_{0\le t\le T} |\rho_4(t)|$,

$$p_1 = 1 - \delta_{23}^2\delta_{24} - \frac{\bar{\iota}_1\delta_{24}}{\delta_{23}^2} - \delta_{25}^2\delta_{26} - \frac{\bar{\rho}_4\delta_{26}}{\delta_{25}^2},$$

$$p_2 = 2 - \delta_{23}^2\left(1+\frac{1}{\delta_{24}}\right) - \frac{\bar{\iota}_1}{\delta_{23}^2}\left(1+\frac{1}{\delta_{24}}\right) - \delta_{25}^2\left(1+\frac{1}{\delta_{26}}\right) - \frac{\bar{\rho}_4}{\delta_{25}^2}\left(1+\frac{1}{\delta_{26}}\right), p_3 = 1.$$

Здесь числа $\delta_{23}$, $\delta_{24}$, $\delta_{25}$ и $\delta_{26}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.10.** *Пусть выполняются условия*

$$s_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = 1,2,3,4,5, \tag{1.81}$$

$$F_4(x,t) \in L_2(Q), \;\; \varphi_4(t) \in L_2([0,T]), \;\; \psi_4(t) \in L_2([0,T]), \tag{1.82}$$

$$\rho_1(t) \ge 0, \;\; \iota_4(t) \le 0, \;\; t \in [0,T]), \tag{1.83}$$

*существуют положительные числа $\delta_{23}$, $\delta_{24}$, $\delta_{25}$ и $\delta_{26}$ такие, что*

$$p_1 > 0, \;\; p_2 > 0. \tag{1.84}$$

*Тогда нелокальная задача (1.75)-(1.80) имеет решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$*

### 1.2.5. Разрешимость обратной задачи 1.2

Вернемся к редуцированной нелокальной задаче (1.71), (1.76), (1.72), (1.73), (1.79), (1.80). Обозначим $\bar{l}_1 = \max\limits_{Q} |l_{1xx}(x,t)|$

$$p'_1 = p_1 - \frac{\bar{l}_1 \delta_{27}^2 \delta_{28}}{2} - \frac{\bar{l}_1 \delta_{29}^2 \delta_{30}}{2} - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{29}^2}, \ \ p'_2 = p_2 - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{27}^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_{28}}\right) - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{29}^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_{30}}\right),$$

$$p'_3 = p_3 - \frac{\bar{l}_1}{2\delta_{27}^2}.$$

Здесь числа $\delta_{27}$-$\delta_{30}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 1.11.** *Пусть выполняются условия*

$$J_1 \neq 0, \ \ t \in [0,T], \ \ a(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \ \ c(x,t) \in C^2(\bar{Q}) \ \ f_3(x,t) \in L_2(Q), \tag{1.85}$$

$$f_{3x}(x,t) \in L_2(Q), \ \ f_{3xx}(x,t) \in L_2([0,T]), \ \ h_1(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \ \ h_2(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{1.86}$$

$$l_{2xx}(x,t) \geq 0, \ \ t \in [0,T]), \tag{1.87}$$

*существуют положительные числа $\delta_{27}$-$\delta_{30}$ такие, что*

$$p'_1 > 0, \ \ p'_2 > 0, \ \ p'_3 > 0. \tag{1.88}$$

*Тогда нелокальная задача (1.71), (1.76), (1.72), (1.73), (1.79), (1.80) имеет решение $v(x,t)$ и $u(x,t)$ такое, что $v(x,t) \in V$ и $u(x,t) \in V$.*

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 1.2.

**Теорема 1.12.** *Пусть выполняются все условия теоремы 1.11. Тогда обратная задача 1.2 имеет решение $u(x,t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ такое, что $u(x,t) \in V, q_1(t) \in L_2([0,T]), q_2(t) \in L_2([0,T])$.*

Доказательство теорем 1.10, 1.11, 1.12 проводится аналогичным образом, как и теорем 1.7, 1.8, 1.9 соответственно.

## 1.3. Обратные задачи для параболических уравнений с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида и их сведение к псевдопараболическим задачам

Исследуется разрешимость обратных задач определения вместе с решением уравнения теплопроводности также его правовой части, или неизвестного внешнего воздействия. Особенностью изучаемых задач является то, что в них неизвестное внешнее воздействие определяется двумя функциями, одна из которых зависит только от пространственной переменной, другая же — только от временной. Задачи будем называть обратными задачами комбинированного типа.

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного типа, исследованиям разрешимости обратных задач временного типа посвящено много работ. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для параболических уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа. Так, в работах [47, 117, 118] изучалась разрешимость обратных задач, в которых неизвестный коэффициент является величиной постоянной. Далее, в работах [83, 99] изучались задачи, в которых неизвестный коэффициент содержал компоненты, зависящие как от пространственной, так и от временной переменной.

### 1.3.1. Постановка обратных задач

В прямоугольнике $Q$ переменных $(x,t)$, $x \in \Omega = (0,1)$, $t \in (0,T)$, $0 < T <= +\infty$, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = F(x,t).$$

Пусть в этом уравнении функция $F(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t) = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x)$$

с заданными функциями $f(x,t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$, и функциями $q(x)$ и $p(t)$, подлежащими определению вместе с решением $u(x,t)$.

Пусть наряду с функциями $f(x,t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ заданы также функции $N(x)$ и $R(t)$, определенные при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ соответственно.

**Обратная задача 1.3**: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \tag{1.89}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1.90}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{1.91}$$

$$u(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1.92}$$

$$\int\limits_0^1 N(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{1.93}$$

**Обратная задача 1.4**: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (1.89) , при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (1.90), а также условий

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{1.94}$$

$$\int\limits_0^T R(t)u(x,t)dt = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{1.95}$$

В обратной задаче 1.3 условия (1.90) и (1.91) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, условия же (1.92) и (1.93) есть условия переопределения, причем условие (1.92) характерно для обратных задач пространственного типа, условие же (1.93) — для обратных задач временного типа.

В обратной задаче 1.4 условия $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ вместе с условием (1.90) определяют вторую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, условие $u(0,t) = 0$ есть условие переопределения, характерное для обратных задач временного типа, условие же (1.95) есть условие переопределения, характерное для обратных задач пространственного типа.

### 1.3.2. Разрешимость обратной задачи 1.3

Пусть выполняется условие

$$\varphi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{1.96}$$

Положим

$$f_1(x,t) = \varphi(t) \left( \frac{f(x,t)}{\varphi(t)} \right)_t, \quad p_1(t) = \frac{p(t)}{\varphi(t)}, \quad a(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

Разделив уравнение (1.89) на $\varphi(t)$ и продифференцировав по переменной $t$, получим с учетов введенных обозначений новое уравнение

$$u_{tt} - u_{xxt} - a(t)(u_t - u_{xx}) = f_1(x,t) + p_1'(t)\varphi(t)\psi(x), \tag{1.97}$$

Это уравнение вместе с условиями (1.90)—(1.93) определяет обратную задачу временного типа с неизвестной функцией $p_1'(t)$ в правой части. Найдя решение $[u(x,t), p_1'(t)]$ этой задачи, нетрудно далее найти решение $[u(x,t), q(x), p(t)]$ исходной обратной задачи 1.3, но при этом необходимо возникает дополнительное условие для функции $p(t)$. Другими словами, в условия обратной задачи 1.3 необходимо добавить еще одно условие — например, условие

$$p(t_0) = p_0, \quad t_0 \in [0,T]. \tag{1.98}$$

Продолжим построения. Умножим уравнение (1.97) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной $x$. Получим

$$\int\limits_0^1 N(x)\left[a(t)u_{xx}(x,t)-u_{xxt}(x,t)\right]dx=\int\limits_0^1 N(x)f_1(x,t)dx+p_1'(t)\varphi(t)\int\limits_0^1 N(x)\psi(x)dx.$$

Для краткости записи обозначим

$$L_0u=a(t)u-u_t,\;\; N_0=\int\limits_0^1 N(x)\psi(x)dx,$$

$$f_0(t)=\int\limits_0^1 N(x)f_1(x,t)dx,\;\; p_0(t)=p_1'(t)\varphi(t).$$

Пусть выполняется условие

$$N_0\neq 0. \tag{1.99}$$

Вычислим $p_0(t)$:

$$p_0(t)=\tfrac{1}{N_0}\left[\int\limits_0^1 N(y)L_0u_{yy}(y,t)dy-f_0(t)\right].$$

Подставив $p_0(t)$ в (1.97), получим уравнение:

$$Lu\equiv u_{tt}-u_{xxt}-a(t)(u_t-u_{xx})=f_2(x,t)+\frac{\psi(x)}{N_0}\int\limits_0^1 N(y)L_0u_{yy}(y,t)dy, \tag{1.100}$$

где $f_2(x,t)=f_1(x,t)-\frac{\psi(x)f_0(t)}{N_0}$.

Уравнение (1.100) является "нагруженным" [78] (интегро-дифференциальным) уравнением соболевского типа; именно с помощью решения $u(x,t)$ этого уравнения находится решение $[u(x,t),p_1'(t)]$ построенной выше обратной задачи, и далее — решение $[u(x,t),q(x),p(t)]$ исходной обратной задачи.

Введем обозначения:

$$N_1=\frac{1}{N_0}\|\psi''\|_{L_2(\Omega)}\|N''\|_{L_2(\Omega)};$$

$$A_0=\max_{[0,T]}\left[a^2(t)+a'(t)\right],\;\; A_1=\frac{A_0T^2}{2}+1.$$

**Теорема 1.13.** *Пусть выполняются условия (1.96) и (1.99), а также условия*

$$\varphi(t) \in C^2([0,T]), \;\; a(t) \geq 0, \;\; a'(t) \leq 0 \;\; \textit{при} \;\; t \in [0,T]; \tag{1.101}$$

$$\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \;\; \psi(0) = \psi(1) = 0; \tag{1.102}$$

$$N(x) \in C^2(\Omega), \;\; N(0) = N(1) = 0; \tag{1.103}$$

$$\begin{gathered} f_2(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{2x}(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{2xx}(x,t) \in L_2(Q), \\ f_2(0,t) = f_2(1,t) = 0 \;\; \textit{при} \;\; t \in [0,T]; \end{gathered} \tag{1.104}$$

$$N_1 T A_1^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}. \tag{1.105}$$

*Тогда краевая задача (1.100), (1.90)-(1.92) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$.*

*Доказательство.* Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть $\varepsilon$ есть положительное число. Обозначим через $L_\varepsilon$ оператор $Lu - \varepsilon u_{xxxx}$. Далее, пусть $\lambda$ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач; *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q$ решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f_2(x,t) + \lambda \left[ a(t)(u_t - u_{xx}) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int\limits_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y,t) dy \right] \tag{1.106}$$

*и такую, что для нее выполняются условия (1.90)–(1.92), а также условия*

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \;\; t \in (0,T) \tag{1.107}$$

Поскольку и для применения метода регуляризации, и для применения метода продолжения по параметру требуются априорные оценки решения $u(x,t)$, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_Q L_\varepsilon u u_{xxxx} dxdt = -\int\limits_Q f_2(x,t) u_{xxxx} dxdt - \\
\frac{\lambda}{N_0}\int\limits_Q \psi(x)\left(\int\limits_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y,t)dy\right) u_{xxxx} dxdt.
\end{gathered} \tag{1.108}
$$

Используя условия (1.101)–(1.103), а также формулу интегрирования по частям, нетрудно от (1.108) перейти к неравенствам

$$
\begin{gathered}
\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le \left(\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q f_2^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
+N_1\left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q (L_0 u)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},
\end{gathered} \tag{1.109}
$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le \left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
+N_1\left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q (L_0 u)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{gathered} \tag{1.110}
$$

Для функции $L_0 u$ имеет место оценка

$$
\int\limits_Q (L_0 u)^2 dxdt \le \frac{A_1 T}{\sqrt{2}}\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt. \tag{1.111}
$$

Из неравенств (1.109) и (1.111), (1.110) и (1.111) вытекают неравенства

$$
\begin{gathered}
\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le \left(\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q f_2^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
+\frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt,
\end{gathered} \tag{1.112}
$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le \left(\int\limits_Q u_{xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \\
+\frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt.
\end{gathered} \tag{1.113}
$$

Условие (1.105) означает, что следствием (1.112) и (1.113) будут априорные оценки

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le M_1 \int\limits_Q f_2^2 dxdt, \tag{1.114}$$

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxxx}^2 dxdt \le M_2 \int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt, \tag{1.115}$$

причем постоянная $M_1$ в (1.114) зависит от $\varepsilon$, постоянная же $M_2$ в (1.115), наоборот, не зависит от $\varepsilon$.

Их неравенств (1.114) и (1.115), а также непосредственно из уравнения (1.100) вытекают еще две оценки

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt \le M_3 \int\limits_Q f_2^2 dxdt, \tag{1.116}$$

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt \le M_4 \int\limits_Q f_{2xx}^2 dxdt \tag{1.117}$$

с постоянной $M_3$, зависящей от числа $\varepsilon$, и с постоянной $M_4$, не зависящей от $\varepsilon$.

Заметим, что краевая задача (1.106), (1.90)—(1.92), (1.107) при $\lambda = 0$, при фиксированном $\varepsilon$ и при принадлежности функции $f_2(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q)$ — это нетрудно доказать с помощью классического метода Галеркина с выбором специального базиса [94] и априорных оценок (1.114) и (1.116), справедливых и при $\lambda = 0$. Используя этот факт, теорему о методе продолжения по параметру ( [56], гл.$III$, § 14]) и те же оценки (1.114) и (1.116), получим, что задача (1.106), (1.90)—(1.92), (1.107) при всех $\lambda$ из отрезка $[0,1]$, при фиксированном $\varepsilon$ и при принадлежности функции $f_2(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x,t) \in L_2(Q)$.

Рассмотрим теперь задачу (1.106), (1.90)—(1.92), (1.107) при $\lambda = 1$. Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Согласно доказанному выше, эта задача при $\varepsilon = \varepsilon_m$ имеет регулярное решение $u_m(x,t)$. Оценки (1.115) и (1.117) означают для этих решений семейства $\{u_{mxxt}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{u_{mtt}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\sqrt{\varepsilon_m} u_{mxxxx}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ равномерно ..... ограничены в пространстве $L_2(Q)$.

Используя далее свойство рефлексивности гильбертова пространства, нетрудно показать, что существует последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, а также функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

- $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$ *слабо в пространстве* $W_2^2(Q)$,
- $u_{m_k xxt}(x,t) \to u_{xxt}(x,t)$ *слабо в пространстве* $L_2(Q)$,
- $u_{m_k xxxx}(x,t) \to 0$ *слабо в пространстве* $L_2(Q)$,
- $u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$ *почти всюду в* $Q$,
- $u_{m_k t}(x,t) \to u_t(x,t)$ *почти всюду в* $Q$.

Последние две сходимости выполняются вследствие теорем вложения, см. ( [54, 88]).

Из указанных сходимостей очевидным образом вытекает, что предельная функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи (1.100), (1.90)—(1.92). $\square$

**Теорема 1.14.** *Пусть выполняются условия (1.96), (1.99), (1.101)—(**??**). Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $f(0,t) = f(1,t) = 0$ при $t \in [0,T]$, обратная задача 1.3 при выполнении условия (1.98) с произвольно заданным числом $p_0$ имеет решение $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(x) \in L_2(Q)$, $p(t) \in W_2^1([0,T])$.*

*Доказательство.* Указанные в формулировке теоремы условия на функцию $f(x,t)$ означают, что выполняется условие (1.104). Согласно теореме 1.13, краевая задача (1.100), (1.90)—(1.92) имеет регулярное решение $u(x,t)$. Построенная по этой функции функция $p_0(t)$ будет принадлежать пространству $L_2([0,T])$.

Умножим уравнение (1.100) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок получим равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a(t)\frac{\partial}{\partial t}\right) I(t) = 0, \tag{1.118}$$

в котором через $I(t)$ обозначена функция

$$I(t) = \int_0^1 N(x)u(x,t)dx.$$

Поскольку вследствие условия (1.91) выполняется $I(0) = I(T) = 0$ и поскольку функция $a(t)$ неотрицательна, то из (1.118) следует, что $I(t)$ есть тождественно нулевая на отрезке $[0,T]$ функция. А это оначает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (1.100), (1.90)—(1.92) выполняется условие (1.93).

Определим функцию $p_1(t)$ как решение задачи

$$p_1'(t) = \frac{p_0(t)}{\varphi(t)}, \;\; p_1(t_0) = \frac{p_0}{\varphi(t_0)};$$

далее определим функцию $p(t)$: $p(t) = p_1(t)\varphi(t)$. При $x \in \Omega$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\left[(u_t - u_{xx}) - p(t)\psi(x) - f(x,t)\right]\right) = 0, \tag{1.119}$$

Положим

$$q(x) = \frac{1}{\varphi(t_0)}\left[(u_t(x,t_0) - u_{xx}(x,t_0)) - p_0\psi(x) - f(x,t_0)\right]$$

Интегрируя (1.119) по $t$ от $t_0$ до текущей точки получим, что функция $u(x,t)$ (решение краевой задачи (1.100), (1.90)—(1.92)), $q(x)$ и $p(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (1.89). Поскольку для функции $u(x,t)$ выполняются условия (1.90)—(1.93), то функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ и дадут решение обратной задачи 1.3.

Принадлежность функций $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам показана по ходу доказательства.

$\square$

### 1.3.3. Разрешимость обратной задачи 1.4

Вновь начнем с предварительных преобразований.

Пусть выполняется условие

$$\psi(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, R_0 = \int\limits_0^T R(t)\varphi(t)dt \neq 0. \tag{1.120}$$

Положим

$$\tilde{f}_1(x,t) = \psi(x)\left(\frac{f(x,t)}{\psi(x)}\right)_x, \tilde{f}_0(x) = \int\limits_0^T R(t)\tilde{f}_1(x,t)dt,$$

$$\tilde{f}_2(x,t) = \tilde{f}_1(x,t) - \frac{\varphi(t)\tilde{f}_0(x)}{R_0},$$

$$q_1(x) = \frac{q(x)}{\psi(x)}, \quad q_0(x) = q_1'(x)\psi(x), \quad b(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Первым вспомогательным уравнением для обратной задачи 1.4 будет уравнение

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_1(x,t) + q_0(x)\varphi(t), \tag{1.121}$$

дающее обратную задачу нахождения функций $u(x,t)$ и $q_0(x)$. Умножая это уравнение на функцию $R(t)$ и интегрируя по отрезку $[0,T]$, получим "нагруженное"дифференциальное уравнение для функции $u(x,t)$:

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_2(x,t) + \frac{\varphi(t)}{R_0}\int\limits_0^T R(t)\left[u_{xt} - b(x)u_t\right]dt, \tag{1.122}$$

Решение краевой задачи с условиями (1.90) и (1.94) для этого уравнения и позволит найти решение $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ обратной задачи 1.4.

Положим

$$\varphi_0 = \max_{[0,T]}|\varphi(t)|, \quad b_0 = \max_{[0,1]}|b(x)|,$$

$$R_1 = \|(T-t)^{\frac{1}{2}}R(t)\|_{L_2([0,T])}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{2}\varphi_0 T R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.$$

**Теорема 1.15.** *Пусть выполняются условие (1.120), а также условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \psi(x) \in C^1([0,1]); \tag{1.123}$$

$$b'(x) \geq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [0,1], \quad b(1) \leq 0; \tag{1.124}$$

$$R(t) \in C([0,T]), \quad (T-t)^{-\frac{1}{2}} R(t) \in L_2([0,T]); \tag{1.125}$$

$$\frac{Tb_0^2}{2} + R_2 < 1. \tag{1.126}$$

*Тогда для любой функции $\tilde{f}_2(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача (1.122), (1.90), (1.94) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.*

*Доказательство.* Воспользуемся методом продолжения по параметру с аналогичным теореме 1.13 использованием чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$. Покажем, что для решений краевой задачи с условиями (1.90) и (1.94) для соответствующего уравнения с параметром $\lambda$ имеют место нужные априорные оценки. Поскольку процедура получения оценок одинакова для всех чисел из отрезка $[0,1]$, рассмотрим лишь случай $\lambda = 1$ — то есть случай задачи (1.122), (1.90), (1.94).

Пусть $T_0$ есть число из промежутка $(T, +\infty)$. Умножим уравнение (1.122) на функцию $(T_0 - t)u_{xt}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $Q$. После несложных выкладок получим равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_Q \left[\tfrac{1}{2}u_{xx}^2 + (T_0-t)u_{xt}^2\right] dxdt + \tfrac{1}{2}\int\limits_Q b'(x)(T_0-t)u_t^2 dxdt + \\ + \tfrac{T_0-T}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)dx - \tfrac{b(1)}{2}\int\limits_0^T (T_0-t)u_t^2(1,t)dt = \\ = \int\limits_Q (T_0-t)\tilde{f}_2 u_{xt} dxdt - \int\limits_Q b(x)(T_0-t)u_{xx}u_{xt}dxdt + \\ + \tfrac{1}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)\varphi(t)u_{xt}(x,t)\left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau} - b(x)u_\tau\right]d\tau\right)dxdt.\end{gathered} \tag{1.127}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (1.127):

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{1}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)\varphi(t)u_{xt}(x,t)\left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau}-b(x)u_\tau\right]d\tau\right)dxdt\right| leq \\
\frac{\varphi_0}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)^2u_{xt}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q\left(\int\limits_0^T R(\tau)\left[u_{x\tau}-b(x)u_\tau\right]d\tau\right)^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \\
\frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q\left(\int\limits_0^T \frac{R(\tau)}{\sqrt{T_0-\tau}}\sqrt{T_0-\tau}\left[u_{x\tau}-b(x)u_\tau\right]d\tau\right)^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \\
\frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q\left(\int\limits_0^T \frac{R^2(\tau)}{T_0-\tau}d\tau\right)\left(\int\limits_0^T (T_0-\tau)\left[u_{x\tau}-b(x)u_\tau\right]^2d\tau\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \\
\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}R_1}{R_0}\left(\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q\left(\int\limits_0^T (T_0-\tau)u_{x\tau}^2d\tau+b_0^2\int\limits_0^T (T_0-\tau)u_\tau^2d\tau\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \\
\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}}{R_0}\int\limits_Q (T_0-t)u_{xt}^2dxdt.
\end{gathered}
\tag{1.128}
$$

Прежде всего заметим, что вследствие условия (1.126) существует число $T_0^*$ такое, что

$$
T_0^*>T,\quad \frac{T_0^*b_0^2}{2}+\frac{\sqrt{2}\varphi_0(T_0^*)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}<1 \tag{1.129}
$$

Обозначим для краткости

$$
R_2^*=\frac{\sqrt{2}\varphi_0(T_0^*)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}R_1(1+b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.
$$

Неравенства (1.128) и (1.129), а также неравенство Юнга означают, что выполняется оценка

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int\limits_Q u_{xt}^2dxdt+(1-R_2^*)\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt\leq\frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_Q u_{xx}^2dxdt+ \\
+\frac{T_0^*b_0^2}{2\delta_0^2}\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt+\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_Q (T_0^*-t)u_{xt}^2dxdt+ \\
+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_Q (T_0^*-t)\tilde f_2^2dxdt,
\end{gathered}
\tag{1.130}
$$

в котором $\delta_0$ и $\delta_1$ есть произвольные положительные числа.

Зафиксируем число $\delta_0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$
\frac{T_0^*b_0^2}{2(1-R_2^*)}<\delta_0^2<1
$$

(вследствие неравенств (1.129) это возможно). Подбирая далее число $\delta_1$ малым, окончательно получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1.122), (1.90), (1.94) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_Q (u_{xx}^2 + u_{xt}^2)dxdt \leq K_1 \int\limits_Q \tilde{f}_2^2 dxdt, \tag{1.131}$$

постоянная $K_1$ в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом $T$.

Оценка в пространстве $L_2(Q)$ для функции $u_{xxx}(x,t)$ очевидным образом вытекает из оценки (1.131); суммируя, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1.122), (1.90), (1.94) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u_x\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_0 \|\tilde{f}_2\|_{L_2(Q)}, \tag{1.132}$$

постоянная $K_0$ в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом $T$.

Поскольку разрешимость краевой задачи с условиями (1.90) и (1.94) для уравнения

$$u_{xt} - u_{xxx} = \tilde{f}_2$$

очевидна, то из априорной оценки (1.132) и из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (1.122), (1.90), (1.94) разрешима в требуемом классе. $\square$

Как и для обратной задачи 1.3, в обратной задаче 1.4 для однозначного определения функции $q(x)$ потребуется дополнительное условие - например, условие

$$q(x_0) = q_0, \quad x_0 \in [0,1] \tag{1.133}$$

($q_0$ здесь есть произвольное действительное число).

**Теорема 1.16.** *Пусть выполняются условия (1.120), (1.123) – (1.126). Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_x(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача 1.4 с условием (1.133) для функции $q(x)$ имеет решение $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $q(x) \in W_2^1(\Omega)$, $p(t) \in L_2([0,T])$.*

*Доказательство.* Теорема 1.15 позволяет определить функцию $q_0(x)$ (с помощью функции $u(x,t)$ и далее — функцию $q_1(x)$ с помощью равенства

$$q_1'(x) = \frac{q_0(x)}{\psi(x)}, \quad q_1(x_0) = \frac{q_0}{\psi(x_0)}.$$

Найдя функцию $q_1(x)$, нетрудно далее определить функции $q(x)$ и $p(t)$:

$$q(x) = q_1(x)\psi(x), \quad p(t) = -\frac{1}{\psi(0)}\left[f(0,t) + u_{xx}(0,t) + q(0)\varphi(t)\right].$$

Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения показывается аналогично тому, как такой же факт доказывался в теореме 1.14. Принадлежность функций $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам очевидна. $\square$

### 1.3.4. Комментарии и дополнения

4.1. Теоремы 1.13 и 1.15 представляются вспомогательными для доказательства разрешимости задач 1.3 и 1.4. Вместе с тем они имеют и самостоятельное значение как теоремы о разрешимости "нагруженных"(интегро-дифференциальных) уравнений.

4.2. Вполне аналогично доказательству Теоремы 1.14 можно установить разрешимость обратной задачи 1.3 в многомерном случае — то есть в случае, когда $x = (x_1, x_2, .., x_n)$, $\Omega$ есть ограниченная область с гладкой границей, уравнение же (1.89) имеет вид

$$u_t - \triangle u = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x).$$

4.3. Используя методы диссертационной работы имеется возможность изучить разрешимость следующего аналога обратной задачи 1.3: *найти функции $u(x,t)$, $q(x)$, $p_1(t)$,..,$p_n(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением*

$$u_t - \triangle u = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p_1(t)\psi_1(x) + .. + p_n(t)\psi_n(x),$$

*при выполнении для функции $u(x,t)$ условий*

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$u(x,t)|_S = 0, \quad S = \partial\Omega \times (0,T);$$
$$\int\limits_\Omega N_i(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad i = 1,..,m.$$

Здесь сразу предполагается, что изучаемая задача многомерна по пространственным переменным. Функции $N_i(x)$, $i = 1,..,m$, безусловно предполагаются линейно независимыми на множестве $\Omega$.

4.4. Аналогичным образом можно изучить обратную задачу 1.4 в более общей, нежели в работе, постановке: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(x)$,.., $q_m(x)$, $p(t)$, *связанные в прямоугольнике* $Q$ *уравнением*

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q_1(x)\varphi_1(t) + .. + q_m(x)\varphi_m(t) + p(t)\psi(x),$$

*при выполнении для функции* $u(x,t)$ *условий*

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T;$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega;$$
$$\int\limits_0^1 R_i(t)u(x,t)dt = 0, \quad i = 1,..,m.$$

(как и в предыдущей задаче, здесь считается, что ядра интегральных условий образуют линейно независимую систему).

4.5. Наличие в левой части уравнения (1.89)) младших членов — слагаемых $b(x,t)u_x$, $c(x,t)u$ — не влияет на суть результатов о разрешимости, но существенно усложняет выкладки. Также не влияет на суть результатов варьирование граничных условий — так, в обратной задаче 1.3 граничное условие первой начально-краевой задачи можно заменить граничным условием второй или третьей краевых задач, вместо условия Коши (1.90) в обратной задаче 1.4 можно задавать нелокальное условие $u(x,0) = \gamma u(x,T)$.

4.6. Условие (1.124) в обратной задаче 1.4 можно заменить условием

$$b(x) = b_0(x) + b_1(x), \quad b_0'(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \quad b_0(1) \leq 0, \quad |b_1(x)| \leq b_1,$$

предполагая далее, что число $b_1$ мало.

4.7. Условие (1.105) теорем 1.13 и 1.14, (1.126) теорем 1.15 и 1.16 заведомо выполняется, например, если число $T$ мало.

4.8. Условия (1.98) и (1.133) (или же их аналоги) необходимы для однозначного определения решений обратной задачи 1.3 и соответсвенно обратной задачи 1.4. Действительно, если в обратной задче 1.3 отказаться от условия (1.98), то наряду с решением $\{u(x,t), q(x), p(t)\}$ решением будет вектор-функция $\{u(x,t), q(x)-\bar{p}\psi(x), p(t)+\bar{p}\varphi(t)\}$ с произвольным действительным числом $\bar{p}$.

Аналогичное утверждение имеет место и для обратной задачи 1.4.

Что же касается аналогов условий (1.98) или (1.133), то ими можно назвать любые условия, характеризующие единственность решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — например, нелокальные условия $p(0) = \alpha p(T)$ или $q(0) = \beta q(1)$.

# 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной

Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной $t$, ранее изучались в работах А. И. Кожанова, А. М. Гулиевой, А. К. Курманбаевой [20, 35, 51], но постановки задач и техника доказательства, применяемые в настоящей главе диссертационной работы отличаются от постановок и техники указанных работ.

В диссертации представлены два подхода для доказательства разрешимости обратных задач для псевдогиперболического уравнения. Общая идея первого подхода заключается в сведении обратной задачи к прямой, но нелокальной задаче, в которой нет неизвестного коэффициента, но она будет задачей для нагруженного уравнения с граничными условиями переопределения. Подобные методы исследования применялись Беловым Ю.Я., Кожановым А.И., Пятковым С.Г., Сафиулловой Р.Р. и оказались достаточно эффективными для доказательства разрешимости исследуемых задач.

Второй подход заключается в повышении порядка исходного уравнения исключением неизвестного коэффициента в правой части. При этом получается уравнение составного типа.

### 2.1.1. Разрешимость обратных и нелокальных задач для псевдогиперболического типа

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0, 1)$ оси $Ox$, $Q$ - прямоугольник $\{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T), 0 < T < \infty\}$. Далее пусть $f(x, t), a(x, t), c(x, t), h(x, t)$ - функции, определенные в $\bar{Q}$.

**Обратная задача 2.1:** Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt} - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{2.1}$$

при выполнении для $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.4}$$

**Обратная задача 2.2:** Необходимо найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.3), а также условий

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.5}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.6}$$

В данных задачах условия (2.2), (2.3) и (2.5) есть условия обычной начально-краевой задачи для псевдогиперболического уравнения (2.1) с известной правой частью, условия же (2.4) и (2.6) можно трактовать как условия граничного переопределения; необходимость этих условий диктуется именно наличием неизвестного коэффициента $q(t)$.

**Редукция обратной задачи 2.1 к нелокальной задаче 2.1**

Выполним некоторые формальные построения, касающиеся обратной задачи 2.1. Продифференцируем уравнение (2.1) по $x$ и положим $x = 0$. Пусть выполняется условие $h_x(0,t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$. Тогда из равенства

$$u_{xtt}(0,t) - u_{xxxt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) +$$

$$+ c_x(0,t)u(0,t) + c(0,t)u_x(0,t) = f_x(0,t) + q(t)h_x(0,t)$$

можно найти $q(t)$:

$$q(t)=\frac{-u_{xxxt}(0,t)+a(0,t)u_{xxx}(0,t)+a_x(0,t)u_{xx}(0,t)-f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Подставив представление $q(t)$ в (2.1.1), получим уравнение:

$$u_{tt}-u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+c(x,t)u=$$
$$=f(x,t)+\frac{-u_{xxxt}(0,t)+a(0,t)u_{xxx}(0,t)+a_x(0,t)u_{xx}(0,t)-f_x(0,t)}{h_x(0,t)}h(x,t).$$

Введем следующие обозначения:

$$b_1(x,t)=\frac{-h(x,t)}{h_x(0,t)},\quad b_2(x,t)=\frac{a(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)},$$
$$b_3(x,t)=\frac{a_x(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)},\quad f_1(x,t)=f(x,t)-\frac{f_x(0,t)h(x,t)}{h_x(0,t)}.$$

С учетом этих обозначений уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{gathered}u_{tt}-u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+c(x,t)u=\\=b_1(x,t)u_{xxxt}(0,t)+b_2(x,t)u_{xxx}(0,t)+b_3(x,t)u_{xx}(0,t)+f_1(x,t).\end{gathered}\tag{2.7}$$

Положим в уравнении (2.1) $x=0$. Получим равенство, определяющее первое граничное условие:

$$-u_{xxt}(0,t)+a(0,t)u_{xx}(0,t)=b_1(0,t)u_{xxxt}(0,t)+$$
$$+b_2(0,t)u_{xxx}(0,t)+b_3(0,t)u_{xx}(0,t)+f_1(0,t).$$

Положив теперь в уравнении (2.1) $x=1$, получим второе граничное условие:

$$-u_{xxt}(1,t)+a(1,t)u_{xx}(1,t)=b_1(1,t)u_{xxxt}(0,t)+$$
$$+b_2(1,t)u_{xxx}(0,t)+b_3(1,t)u_{xx}(0,t)+f_1(1,t).$$

Следовательно, для функции $v(x,t)=u_{xx}(x,t)$ выполняются условия:

$$\begin{gathered}-v_t(0,t)+a(0,t)v(0,t)=b_1(0,t)v_{xt}(0,t)+\\+b_2(0,t)v_x(0,t)+b_3(0,t)v(0,t)+f_1(0,t),\end{gathered}\tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}-v_t(1,t)+a(1,t)v(1,t)=b_1(1,t)v_{xt}(0,t)+\\+b_2(1,t)v_x(0,t)+b_3(1,t)v(0,t)+f_1(1,t).\end{gathered}\tag{2.9}$$

В дальнейшем будем считать, что $b_1(0,t) = b_1(1,t) = 0$ при $t \in [0,T]$. В случае $b_1(0,t) = 0$ условие (2.8) примет вид:

$$v_t(0,t) = [a(0,t) - b_3(0,t)]v(0,t) - b_2(0,t)v_x(0,t) - f_1(0,t). \tag{2.10}$$

В случае $b_1(1,t) = 0$ условие (2.7) примет вид:

$$v_t(1,t) = a(1,t)v(1,t) - b_2(1,t)v_x(0,t) - b_3(1,t)v(0,t) - f_1(1,t). \tag{2.11}$$

Дважды продифференцировав уравнение (2.1) по $x$, получим уравнение

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xxt} + a_{xx}v + 2a_x v_x + a v_{xx} + c_{xx}u + 2c_x u_x + cv = \\ = b_{1xx}(x,t)v_{xt}(0,t) + b_{2xx}(x,t)v_x(0,t) + b_{3xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t). \end{gathered} \tag{2.12}$$

В результате мы пришли к нелокальной задаче для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Доказав разрешимость полученной задачи, автоматически получим разрешимость обратной задачи 2.1.

**Разрешимость нелокальной задачи 2.1**

Поскольку построенная нелокальная задача для уравнений вида (2.1) ранее не изучалась, рассмотрим ее независимо от исходной обратной задачи.

Пусть $c_i(x,t)$, $i = \overline{1,5}$, $F_1(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}$, $\eta_j(t)$, $j = \overline{1,4}$, $\gamma_i(t), i = \overline{1,4}$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

**Нелокальная задача 2.1** Необходимо найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнениями

$$v_{tt} - v_{xxt} + c_1(x,t)v + c_2(x,t)v_x + c_3(x,t)v_{xx} + c_4(x,t)u_x + c_5(x,t)u = F_1(x,t), \tag{2.13}$$

$$u_{xx} = v, \tag{2.14}$$

и такие, что для них выполняются условия

$$v_t(0,t) = \gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v_x(0,t) + \gamma_3(t)v(1,t) + \gamma_4(t)v_x(1,t) + \varphi_1(t), 0 < t < T, \tag{2.15}$$

$$v_t(1,t) = \eta_1(t)v(0,t)+\eta_2(t)v_x(0,t)+\eta_3(t)v(1,t)+\eta_4(t)v_x(1,t)+\psi_1(t), 0 < t < T, \tag{2.16}$$

$$v(x,0) = 0,\ \ v_t(x,0) = 0,\ \ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in \Omega, \tag{2.17}$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ \ 0 < t < T. \tag{2.18}$$

Определим для дальнейшего исследования пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v^2 + v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2) dxdt < +\infty \right\},$$

норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_V = \left( \int\limits_Q (v^2 + v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2) dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство $V$ банахово.

**Теорема 2.1.** *Пусть выполняются условия*

$$c_i(x,t) \in C(\bar{Q}),\ \ i = \overline{1,5}; \tag{2.19}$$

$$F_1(x,t) \in L_2(Q),\ \ \varphi_1(t) \in W_2^1([0,T]),\ \ \psi_1(t) \in W_2^1([0,T]). \tag{2.20}$$

*Тогда нелокальная задача* (2.13) - (2.18) *имеет решение* $\{u(x,t),\ v(x,t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$.

*Доказательство.* Установим вначале наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи.

Умножим уравнение (2.13), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной переменной. Выполнив дополнительно интегрирование по частям, использовав начальные и краевые условия, получим следующее равенство:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2 dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dxd\tau+ \\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx=\int\limits_0^t \eta_1(\tau)v(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_2(\tau)v_x(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+ \\
+\int\limits_0^t \eta_3(\tau)v(1,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_4(\tau)v_x(1,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \psi_1(\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau- \\
-\int\limits_0^t \gamma_1(\tau)v(0,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_2(\tau)v_x(0,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_3(\tau)v(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau- \\
-\int\limits_0^t \gamma_4(\tau)v_x(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \varphi_1(\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_1(\tau)v_\tau(0,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau- \\
-\int\limits_0^t \gamma_2(\tau)v_{x\tau}^2(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_3(\tau)v_\tau(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_4(\tau)v_{x\tau}(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau- \\
-\int\limits_0^t \gamma_1'(\tau)v(0,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_2'(\tau)v_x(0,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \gamma_3'(\tau)v(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau- \\
-\int\limits_0^t \gamma_4'(\tau)v_x(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau-\int\limits_0^t \varphi_1'(\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_1(\tau)v_\tau(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+ \\
+\int\limits_0^t \eta_2(\tau)v_{x\tau}(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_3(\tau)v_\tau(1,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_4(\tau)v_{x\tau}^2(1,\tau)d\tau+ \\
+\int\limits_0^t \eta_1'(\tau)v(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_2'(\tau)v_x(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \eta_3'(\tau)v(1,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+ \\
+\int\limits_0^t \eta_4'(\tau)v_x(1,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \psi_1'(\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_1(x,\tau)vv_\tau dxd\tau- \\
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_2(x,\tau)v_xv_\tau dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_3(x,\tau)v_{xx}v_\tau dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_4(x,\tau)u_xv_\tau dxd\tau- \\
-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_5(x,\tau)uv_\tau dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_1(x,\tau)vv_{xx\tau} dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_2(x,\tau)v_xv_{xx\tau} dxd\tau+ \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_3(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau} dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_4(x,\tau)u_xv_{xx\tau} dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_5(x,\tau)uv_{xx\tau} dxd\tau+ \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 F_1(x,\tau)v_\tau dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 F_1(x,\tau)v_{xx\tau} dxd\tau.
\end{gathered}
$$

В этом равенстве все слагаемые в правой части оцениваются практически одинаково с помощью неравенства Юнга, неравенства

$$\omega^2(x)\le\delta\int\limits_0^1 \omega'^2(x)dx+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int\limits_0^1 \omega^2(x)dx, \tag{2.21}$$

справедливого при всех $x\in[0,1]$ (здесь $\delta$ - произвольное положительное число), а также неравенств

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dxd\tau\le T^2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 w_\tau^2(x,\tau)dxd\tau, \tag{2.22}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u^2(x,\tau)dxd\tau\le T\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v^2(x,\tau)dxd\tau, \tag{2.23}$$

справедливых при всех $(x,t)\in\bar Q$.

Например, второе слагаемое в правой части оценивается так:

$$|\int\limits_0^t \eta_2(\tau)v_x(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)d\tau| \le \bar\eta_2\int\limits_0^t |v_x(0,\tau)v_{x\tau}(1,\tau)|d\tau \le \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t v_{x\tau}^2(1,\tau)d\tau+$$
$$+\frac{\bar\eta_2^2}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t v_x^2(0,\tau)d\tau \le \frac{\delta_1^2}{2}\delta_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau + \frac{\delta_1^2}{2}\left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau+$$
$$+\frac{\bar\eta_2^2}{2\delta_1^2}\delta_2^*\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx}^2dxd\tau + \frac{\bar\eta_2^2}{2\delta_1^2}\left(1+\frac{1}{\delta_2^*}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_x^2dxd\tau \le$$
$$\le \frac{\delta_1^2}{2}\delta_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau + \frac{\delta_1^2}{2}\left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau+$$
$$+\frac{\bar\eta_2^2}{2\delta_1^2}\delta_2^*\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx}^2dxd\tau + \frac{T^2\bar\eta_2^2}{2\delta_1^2}\left(1+\frac{1}{\delta_2^*}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau.$$

Четырнадцатое слагаемое оценим следующим образом

$$|\int\limits_0^t \gamma_4(\tau)v_{x\tau}(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)d\tau| \le \bar\gamma_4\int\limits_0^t |v_{x\tau}(1,\tau)v_{x\tau}(0,\tau)|d\tau \le \frac{\bar\gamma_4}{2}\int\limits_0^t v_{x\tau}^2(1,\tau)d\tau+$$
$$+\frac{\bar\gamma_4}{2}\int\limits_0^t v_{x\tau}^2(0,\tau)d\tau \le \frac{\bar\gamma_4\delta_3}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau+$$
$$+\frac{\bar\gamma_4}{2}\left(1+\frac{1}{\delta_3}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau + \frac{\bar\gamma_4\delta_3^*}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau + \frac{\bar\gamma_4}{2}\left(1+\frac{1}{\delta_3^*}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau.$$

После всех преобразований и упрощений получим, что выполняется неравенство

$$\int\limits_0^1[v_t^2(x,t)+v_{xt}^2(x,t)+v_{xx}^2(x,t)]dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau \le$$
$$\le \delta_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau + N_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_\tau^2dxd\tau + N_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau + N_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx}^2dxd\tau + C_0,$$

в котором $\delta_0$ есть произвольное положительное число, числа $C_0$, $N_i, i=\overline{1,3}$, определяются функциями $c_j(x,t)$, $j=\overline{1,5}$, $\eta_i(x,t)$, $i=\overline{1,4}$, $\gamma_k(x,t)$, $k=\overline{1,4}$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, а также числом $\delta_0$. Подбирая $\delta_0$ малым и фиксируя, получим

$$\int\limits_0^1[v_t^2(x,t)+v_{xt}^2(x,t)+v_{xx}^2(x,t)]dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau \le$$
$$\le N\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_\tau^2+v_{x\tau}^2+v_{xx}^2)dxd\tau + C_0 \tag{2.24}$$

Далее по лемме Гроноулла следует, что имеет место оценка

$$\int\limits_0^1 [v_t^2(x,t) + v_{xt}^2(x,t) + v_{xx}^2(x,t)]dx \leq C_0 exp(T\bar{N}).$$

Вернемся к неравенству (2.24), и, используя полученную выше оценку, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 [v_t^2(x,t) + v_{xt}^2(x,t) + v_{xx}^2(x,t)]dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau \leq \\ \leq C_0 exp(T\bar{N}) \int\limits_0^t \int\limits_0^1 [v_{x\tau}^2 + v_\tau^2 + v_{xx}^2] dx d\tau + C_0.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Отсюда

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2 dx d\tau \leq C.$$

Из оценки (2.24) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq C. \tag{2.26}$$

Воспользуемся далее методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$\begin{gathered}v_{tt} - v_{xxt} + c_1(x,t)v + c_2(x,t)v_x + c_3(x,t)v_{xx} = \\ F_1(x,t) - \lambda[c_4(x,t)u_x + c_5(x,t)u],\end{gathered} \tag{2.27}$$

а также условиям (2.17), (2.18) и

$$v_t(0,t) = \lambda[\gamma_1(t)v(0,t) + \gamma_2(t)v_x(0,t) + \gamma_3(t)v(1,t) + \gamma_4 v_x(0,t)] + \varphi_1(t), 0 < t < T, \tag{2.28}$$

$$v_t(1,t) = \lambda[\eta_1(t)v(0,t) + \eta_2(t)v_x(0,t) + \eta_3(t)v(1,t) + \eta_4(t)v_x(1,t)] + \psi_1(t), 0 < t < T. \tag{2.29}$$

Обозначим через $\Lambda$ множество тех чисел $\lambda$, для которых краевая задача (2.27), (2.14), (2.28), (2.29), (2.17) и (2.18) разрешима в пространстве $V$ для произвольной функции $F_1(x,t) \in L_2(Q)$, функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ из пространства $W_2^1([0,T])$. Если будет доказано, что множество $\Lambda$ не пусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка [0,1]), то оно будет совпадать со всем отрезком [0,1].

Непустота $\Lambda$ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше.

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру краевая задача (2.27), (2.14), (2.28), (2.29), (2.17) и (2.18) разрешима для $\lambda \in [0,1]$. $\square$

Вернемся к нелокальной задаче, полученной редукцией исходной обратной задачи. Для этого введем обозначения:

$$c_1(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t);\ \ c_2(x,t) = 2a_x(x,t);\ \ c_3(x,t) = a(x,t);$$

$$c_4(x,t) = 2c_x(x,t);\ \ c_5(x,t) = c_{xx}(x,t);$$

$$F_1(x,t) = b_{1xx}(x,t)v_{xt}(0,t) + b_{2xx}(x,t)v_x(0,t) + b_{3xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t);$$

$$\gamma_1(t) = a(0,t) - b_3(0,t);\ \ \gamma_2(t) = -b_2(0,t);\ \ \varphi_1(t) = -f_1(0,t);$$

$$\eta_1(t) = a(1,t);\ \ \eta_2(t) = -b_2(1,t);\ \ \eta_3(t) = -b_3(1,t);\ \ \psi_1(t) = -f_1(1,t).$$

Сформулируем задачу: найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (2.12) и (2.14), а также условиям (2.10), (2.11), (2.17) и (2.18).

**Теорема 2.2.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t) \in C^2(\bar{Q}),\ \ c(x,t) \in C^2(\bar{Q}),\ \ h(x,t) \in C^2(\bar{Q}); \tag{2.30}$$

$$f_1(x,t) \in L_2(Q),\ \ f_{1x}(x,t) \in L_2(Q),\ \ f_{1xx}(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.31}$$

$$h_x(0,t) \neq 0,\ \ h(0,t) = 0,\ \ h(1,t) = 0,\ \ t \in [0,T]). \tag{2.32}$$

*Тогда нелокальная задача* (2.12) *и* (2.14), (2.10), (2.11), (2.17) *и* (2.18) *имеет решение* $v(x,t)$ *и* $u(x,t)$ *такое, что* $v(x,t) \in V$ *и* $u(x,t) \in V$.

*Доказательство.* Повторяя доказательство теоремы 2.1 - то есть, умножая уравнение (2.12), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию

$v_\tau - v_{xx\tau}$, и результат интегрируя от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (2.10) и (2.11), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенствами (2.19), (2.20), (2.21), а также леммой Гроноулла - придем к оценке вида (2.26). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (2.12) и (2.14), (2.10), (2.11), (2.17) и (2.18). □

**Разрешимость обратной задачи 2.1**

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 2.1.

**Теорема 2.3.** *Пусть выполняются все условия теоремы 2.2. Тогда обратная задача 2.1 имеет решение $u(x,t)$ и $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V, q(t) \in L_2([0,T])$.*

*Доказательство.* Пусть функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ есть функции, являющиеся решением нелокальной задачи, редуцированной из обратной задачи (2.12) и (2.14), (2.10), (2.11), (2.17), (2.18). Положим

$$w(x,t) = u_{tt} - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u-$$
$$-b_1(x,t)u_{xxxt}(0,t) - b_2(x,t)u_{xxx}(0,t) - b_3(x,t)u_{xx}(0,t) - f_1(x,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{xx}(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0, \;\; 0 < t < T.$$

Из этих равенств следует, что $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) - f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Очевидно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.1). Осталось показать, что выполняется условие $u(0,t) = 0$. Положим в (2.1) $x = 0$. Получим равенство $u_{tt}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = 0$. Из этого равенства и условия $u(0,0) = 0$ следует требуемое равенство $u(0,t) = 0$. Принадлежность $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. □

### 2.1.2. Сведение обратной задачи 2.2 к уравнению составного типа

Для упрощения выкладок, формулировки и доказательства теоремы введем обозначения:

$$a_1(x,t)=c(x,t); a_2(x,t)=a_x(x,t)-\frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; a_3(x,t)=a(x,t);$$

$$a_4(x,t)=\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; a_5(x,t)=c_x(x,t)-\frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; a_6(x,t)=-\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$f_2(x,t)=\frac{f_x(x,t)h(x,t)-f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Пусть $a_6(x,t)=a_{6,1}(x,t)+a_{6,2}(x,t)$.

**Теорема 2.4.** *Пусть выполняются условия*

$$a_i(x,t)\in C(\bar{Q}),\ \ i=\overline{1,6}; \tag{2.33}$$

$$f_2(x,t)\in L_2(Q); \tag{2.34}$$

$$h(x,t)\neq 0,\ \ a'_{6,1x}(x,t)\leq 0,\ \ a_{6,1}(1,t)\geq 0,\ \ t\in[0,T],\ \ x\in[0,1]; \tag{2.35}$$

*существует положительное число* $\delta$*, такое, что*

$$1-\frac{\delta^2}{2}>0,\ \ 1-\frac{\bar{a}^2_{6,2}}{2\delta^2}>0. \tag{2.36}$$

*Тогда обратная задача 2.2 имеет решение* $u(x,t)$*,* $q(t)$ *такое, что* $u(x,t)\in V$*,* $q(t)\in L_2([0,T])$*.*

*Доказательство.* Выполним некоторые формальные построения. Пусть $h(x,t)\neq 0$ при $(x,t)\in\bar{Q}$. Разделим уравнение (2.1) на $h(x,t)$.

$$\frac{1}{h(x,t)}[u_{tt}-u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+c(x,t)u]=\frac{f(x,t)}{h(x,t}+q(t). \tag{2.37}$$

Продифференцируем уравнение (2.37) по $x$:

$$\frac{u_{xtt}-u_{xxxt}+a_x(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_{xxx}+c_x(x,t)u+c(x,t)u_x}{h(x,t)}-$$

$$-\frac{[u_{tt}-u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+c(x,t)u]h_x(x,t)}{h^2(x,t)}=\frac{f_x(x,t)h(x,t)-f(x,t)h_x(x,t)}{h^2(x,t)}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнениями

$$v(x,t) = u_x(x,t), \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xxt} + a_1(x,t)v + a_2(x,t)v_x + a_3(x,t)v_{xx} + a_4(x,t)v_{xt}+ \\ +a_5(x,t)u + a_6(x,t)u_{tt} = f_2(x,t), \end{gathered} \tag{2.39}$$

при выполнении для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ условий:

$$u(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.40}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.41}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.42}$$

Разрешимость данной краевой задачи покажем с помощью метода продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению (2.14) и уравнению

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xxt} + a_1(x,t)v + a_3(x,t)v_{xx} + \lambda[a_2(x,t)v_x + a_4(x,t)v_{xt}+ \\ +a_5(x,t)u + a_{6,1}(x,t)u_{tt} + +a_{6,2}(x,t)u_{tt}] = f_2(x,t), \end{gathered} \tag{2.43}$$

Для получения априорных оценок умножим уравнение (2.43), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau} + v_{\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной переменной. Применяя интегрирование по частям, начальные и краевые условия получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau=$$
$$=-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)vv_\tau dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{xx}v_\tau dxd\tau-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_xv_\tau dxd\tau-$$
$$-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)v_{x\tau}v_\tau dxd\tau-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_\tau dxd\tau-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_{\tau\tau}v_\tau dxd\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)vv_{xx\tau}dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_xv_{xx\tau}dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau}dxd\tau+$$
$$+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)v_{x\tau}v_{xx\tau}dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_{xx\tau}dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{xx\tau}dxd\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)vv_{\tau\tau}dxd\tau-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_xv_{\tau\tau}dxd\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{xx}v_{\tau\tau}dxd\tau-$$
$$-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)v_{x\tau}v_{\tau\tau}dxd\tau-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_{\tau\tau}dxd\tau-$$
$$-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1(x,\tau)[v_\tau-v_{xx\tau}+v_{\tau\tau}]dxd\tau.$$

Условие (2.35) следует из преобразования предпоследнего слагаемого в вышестоящем равенстве с учетом обозначения $a_6(x,t)=a_{6,1}(x,t)+a_{6,2}(x,t)$:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_{61}(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}dxd\tau=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a'_{61x}(x,\tau)u_{\tau\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t a_{61}(1,\tau)u_{\tau\tau}^2(1,\tau)d\tau.$$

Например, необходимость условия (2.36) возникает при оценке интеграла

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_{62}(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{xx\tau}dxd\tau\right|\le\bar{a}_{62}\int\limits_0^t\int\limits_0^1|u_{\tau\tau}v_{xx\tau}|dxd\tau\le$$
$$\le\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau+\frac{\bar{a}_{62}^2}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau}^2dxd\tau.$$

Используя далее условия (2.35), (2.36) , а также неравенство Юнга, неравенства (2.21), (2.22), (2.23), получаем, что из данного равенства вытекает неравенство

$$\int\limits_0^1(v_t^2(x,t)+v_{xt}^2(x,t))dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau}^2+v_{\tau\tau}^2+v_{xx\tau}^2)dxd\tau\le$$
$$\le B_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_\tau^2+v_{x\tau}^2)dxd\tau+\delta\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau}^2+v_{\tau\tau}^2+v_{xx\tau}^2)dxd\tau,$$

в котором $\delta$ - произвольное положительное число, число $B_1$, определяется функциями $a_j(x,t)$, $j=\overline{1,5}$, $f_2(t)$, а также числами $T$ и $\delta$. Подбирая число $\delta$ малым и фиксируя, применяя далее лемму Гроноулла, получаем, что имеет место априорная оценка

$$\int_0^1 (v_t^2(x,t) + v_{xt}^2(x,t))dx + \int_0^t \int_0^1 (v_{x\tau}^2 + v_{\tau\tau}^2 + v_{xx\tau}^2)dxd\tau \leq M, \tag{2.44}$$

с постоянной М, определяющейся функциями $a_j(x,t)$, $j = \overline{1,5}$, $f_2(t)$, а также числами $T$ и $\delta$.

Из оценки (2.44) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq C.$$

Данная оценка показывает, что задача (2.38), (2.43), (2.40) – (2.42) разрешима при $\lambda \in (0,1)$, так как задача разрешима при $\lambda = 0$. Очевидно, что разрешимой является и обратная задача 2.2. При этом функция $q(t)$ определяется с помощью формулы

$$q(t) = \frac{1}{h(0,t)}(u_{tt}(0,t) - u_{xxt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) + c(0,t)u(0,t)) - \frac{f(0,t)}{h(0,t}.$$

$\square$

## 2.2. Обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной и их сведение к нагруженным уравнениям

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ - прямоугольник $\{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T), 0 < T < \infty\}$. Далее пусть $f(x,t), a(x,t), c(x,t), h(x,t), K(x,t), N(x,t)$ - заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, t \in [0,T]$.

**Обратная задача 2.3:** найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{2.45}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.46}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.47}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.48}$$

**Обратная задача 2.4:** найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.45), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (3), а также условий

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.49}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.50}$$

**Обратная задача 2.5:** найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.45), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.46) и (2.67), а также условия

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.51}$$

Обратные задачи 2.3–2.5 относятся к классу обратных задач временного типа. Подобные задачи для уравнения ранее не изучались, отметим лишь, что в [59, 60] изучалась нелинейная обратная задача для уравнения Буссинеска-Лява в некотором специальном случае.

При исследовании разрешимости обратных задач используем два подхода. Суть первого подхода заключается в сведении обратной задачи к прямой, но нелокальной, задаче, в которой нет неизвестного коэффициента, но она будет задачей для нагруженного уравнения с граничными условиями переопределения точечного и интегрального типов. Подобные методы исследования применялись Беловым Ю.Я., Кожановым А.И., Пятковым С.Г. и оказались достаточно эффективными для доказательства разрешимости исследуемых задач [35, 123].

Второй подход основан на переходе от рассматриваемой обратной задачи к новой, но уже прямой, задаче для уравнения более высокого порядка. При этом исключается неизвестный коэффициент в правой части.

Эти методы неоднократно применялись ранее, но в ситуациях, отличных от изучаемых [11].

### 2.2.1. Разрешимость обратной задачи 2.3 и нелокальной задачи 2.2

Выполним некоторые формальные построения. Для этого положим в уравнении (2.45) $x = 0$. Пусть выполняется условие $h(0,t) \neq 0$. Тогда из равенства

$$u_{tt}(0,t) - u_{xxtt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = f(0,t) + q(t)h(0,t)$$

можно найти $q(t)$:

$$q(t) = \frac{-u_{xxtt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - f(0,t)}{h(0,t)}.$$

Введем обозначения:

$$c_1(x,t) = \frac{-h(x,t)}{h(0,t)}; \quad c_2(x,t) = \frac{a(0,t)h(x,t)}{h(0,t)}; \quad f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{f(0,t)h(x,t)}{h(0,t)}.$$

Используя введенные обозначения, получим уравнение:

$$u_{tt} - u_{xxtt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = c_1(x,t)u_{xxtt}(0,t) + c_2(x,t)u_{xx}(0,t) + f_1(x,t). \tag{2.52}$$

Положим в уравнении (2.52) $x = 1$ :

$$\begin{gathered} u_{tt}(1,t) - u_{xxtt}(1,t) + a(1,t)u_{xx}(1,t) + c(1,t)u(1,t) = \\ = c_1(1,t)u_{xxtt}(0,t) + c_2(1,t)u_{xx}(0,t) + f_1(1,t). \end{gathered} \tag{2.53}$$

Продифференцируем уравнение (2.52) по $x$ и положим $x = 0$. Получим равенство

$$\begin{gathered} u_{xtt}(0,t) - u_{xxxtt}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) + \\ + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + c_x(0,t)u(0,t) + c(0,t)u_x(0,t) = \\ = c_{1x}(0,t)u_{xxtt}(0,t) + c_{2x}(0,t)u_{xx}(0,t) + f_{1x}(0,t). \end{gathered} \tag{2.54}$$

Положим $v = u_{xx}$.Отсюда краевое условие (2.53) примет вид:

$$-v_{tt}(1,t) = -a(1,t)v(1,t) + c_1(1,t)v_{tt}(0,t) + c_2(1,t)v(0,t) + f_1(1,t), \quad (2.55)$$

а условие (2.54) преобразуется следующим образом

$$\begin{gathered} -v_{xtt}(0,t) = -a_x(0,t)v(0,t) - a(0,t)v_x(0,t)+ \\ +c_{1x}(0,t)v_{tt}(0,t) + c_{2x}(0,t)v(0,t) + f_{1x}(0,t). \end{gathered} \quad (2.56)$$

Дважды продифференцируем уравнение (2.52) по $x$. Получим уравнение

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xxtt} + a_{xx}v + 2a_x v_x + av_{xx} + c_{xx}u + 2c_x u_x + cv = \\ = c_{1xx}(x,t)v_{tt}(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t). \end{gathered} \quad (2.57)$$

В результате вышеизложенных построений мы получили редуцированную нелокальную задачу для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Из доказательства разрешимости этой задачи следует разрешимость исходной обратной задачи 2.3. Однако полученная нелокальная задача для уравнения вида (2.45) ранее не изучалась. Поэтому исследуем ее разрешимость независимо в новых терминах. Для этого введем обозначения:

$$b_1(x,t) = a_{xx}(x,t) + c(x,t); b_2(x,t) = 2a_x(x,t); b_3(x,t) = a(x,t); b_4(x,t) = c_{xx}(x,t);$$

$$b_5(x,t) = 2c_x(x,t);\ \ F_1(x,t) = c_{1xx}(x,t)v_{tt}(0,t) + c_{2xx}(x,t)v(0,t) + f_{1xx}(x,t);$$

$$\alpha_1(t) = -a(1,t);\ \ \alpha_2(t) = c_2(1,t);\ \ \alpha_3(t) = c_1(1,t);\ \ \varphi_1(t) = f_1(1,t);$$

$$\beta_1(t) = c_{2x}(0,t) - a_x(0,t);\ \ \beta_2(t) = -a(0,t);\ \ \beta_3(t) = c_{1x}(0,t);\ \ \psi_1(t) = f_{1x}(0,t).$$

**Нелокальная задача 2.2:** Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_{tt} - v_{xxtt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} + b_4(x,t)u + b_5(x,t)u_x = F_1(x,t), \quad (2.58)$$

$$v = u_{xx}, \quad (2.59)$$

а также условиям

$$-v_{tt}(1,t)=\alpha_1(t)v(1,t)+\alpha_2(t)v(0,t)+\alpha_3(t)v_{tt}(0,t)+\varphi_1(t),\ \ 0<t<T, \quad (2.60)$$

$$-v_{xtt}(0,t)=\beta_1(t)v(0,t)+\beta_2(t)v_x(0,t)+\beta_3(t)v_{tt}(0,t)+\psi_1(t),\ \ 0<t<T, \quad (2.61)$$

$$v(x,0)=0,\ \ v_t(x,0)=0,\ \ x\in\bar{\Omega}, \quad (2.62)$$

$$u(1,t)=0,\ \ u_x(0,t)=0,\ \ 0<t<T. \quad (2.63)$$

Определим для дальнейшего исследования пространство:

$$V=\left\{v(x,t):\int\limits_Q(v^2+v_{tt}^2+v_{xx}^2+v_{xxtt}^2)dxdt<\infty\right\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_V=\left(\int\limits_Q(v^2+v_{tt}^2+v_{xx}^2+v_{xxtt}^2)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $b_i(x,t), i=\overline{1,5}, F_1(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t)\in\bar{Q}, \alpha_j(t), \beta_j(t), j=\overline{1,3}, \varphi_1(t), \psi_1(t)$ есть заданные функции, определенные при $t\in[0,T]$.

Положим $\bar{\alpha}_3=\max\limits_{0\le t\le T}|\alpha_3(t)|$, $\bar{\beta}_3=\max\limits_{0\le t\le T}|\beta_3(t)|$. Положим положительные числа $M_1$, $M_2$, $M_3$ определяются функциями $b_j(x,t)$, $j=\overline{1,5}$, $\alpha_i(x,t)$, $i=\overline{1,3}$ $\beta_k(x,t)$, $k=\overline{1,3}$.

**Теорема 2.5.** *Пусть выполняются условия*

$$b_i(x,t)\in C(\bar{Q}),\ \ i=\overline{1,5},\ \ F_1(x,t)\in L_2(Q), \quad (2.64)$$

$$\varphi_1(t)\in L_2([0,T]),\ \ \psi_1(t)\in L_2([0,T]), \quad (2.65)$$

$$\bar{\alpha}_3<\frac{1}{4},\ \ \bar{\beta}_3=0. \quad (2.66)$$

*Тогда нелокальная задача (2.58)–(2.63) имеет решение* $u(x,t)$, $v(x,t)$ *такое, что* $u(x,t)\in V$, $v(x,t)\in V$.

*Доказательство.* Установим вначале наличие подходящих априорных оценок решений настоящей задачи. Для получения "хороших"априорных оценок умножим уравнение (2.55), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_{\tau\tau} - v_{xx\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной $t$ и от 0 до 1 по пространственной $x$. Выполнив дополнительно интегрирование по частям, используя граничные условия, получим равенство:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2 dxd\tau -$$
$$-2\int\limits_0^t [\alpha_1(\tau)v(1,\tau) + \alpha_2(\tau)v(0,\tau) + \alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,\tau) + \varphi_1(\tau)]v_{x\tau\tau}(1,\tau)dxd\tau +$$
$$+2\int\limits_0^t v_{\tau\tau}(0,\tau)[\beta_1(\tau)v(0,\tau) + \beta_2(\tau)v_x(0,\tau) + \beta_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,\tau) + \psi_1(\tau)]dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_1(x,\tau)vv_{\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_2(x,\tau)v_x v_{\tau\tau}dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_3(x,\tau)v_{xx}v_{\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_4(x,\tau)uv_{\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_5(x,\tau)u_x v_{\tau\tau}dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_1(x,\tau)vv_{xx\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_2(x,\tau)v_x v_{xx\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_3(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau\tau}dxd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_4(x,\tau)uv_{xx\tau\tau}dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 b_5(x,\tau)u_x v_{xx\tau\tau}dxd\tau =$$
$$= \int\limits_0^t\int\limits_0^1 F_1(x,\tau)[v_{\tau\tau} - v_{xx\tau\tau}]dxd\tau.$$

При оценке интеграла $2\int\limits_0^t \alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)dxd\tau$ получим выражение

$$2\int\limits_0^t \alpha_3(\tau)v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)dxd\tau \le 2\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t |v_{\tau\tau}(0,t)v_{x\tau\tau}(1,\tau)|dxd\tau \le$$
$$\le \bar{\alpha}_3\int\limits_0^t v_{\tau\tau}^2(0,t)dxd\tau + \bar{\alpha}_3\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}^2(1,\tau)dxd\tau \le$$
$$\le \bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau + 2\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau +$$
$$+\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2 dxd\tau + 2\bar{\alpha}_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau,$$

из которого возникают условия $\bar{\alpha}_3 < \frac{1}{4}$ или $\max\limits_{0\le t\le T}|\alpha_3(t)| < \frac{1}{4}$.

А при оценке интеграла

$$-2\int\limits_0^t \beta_3(t)v_{\tau\tau}^2(0,\tau)dxd\tau \le 2\bar{\beta}_3\int\limits_0^t v_{\tau\tau}^2(0,\tau)dxd\tau \le$$
$$\le 2\bar{\beta}_3\delta_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau + 2\bar{\beta}_3\left(1 + \frac{1}{\delta_3}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau$$

возникнет условие $\beta_3(t) = 0$.

Остальные слагаемые оцениваются с помощью неравенства Юнга, неравенства

$$\omega^2(x) \le \delta \int\limits_0^1 \omega'^2(x)dx + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int\limits_0^1 \omega^2(x)dx, \qquad (*)$$

справедливого при всех $x \in [0, 1]$ (здесь $\delta$ - произвольное положительное число), а также неравенств

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dxd\tau \le T^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w_\tau^2(x,\tau)dxd\tau, \qquad (**)$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 u^2(x,\tau)dxd\tau \le T \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v^2(x,\tau)dxd\tau, \qquad (***)$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dxd\tau \le T \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^1 w_\xi^2(x,\xi)dxd\xi d\tau, \qquad (****)$$

справедливых при всех $(x, t) \in \bar{Q}$.

После всех преобразований и упрощений получим, что выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau + 2\int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2 dxd\tau \le \\ \le \delta_0 (\int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2 dxd\tau) + \\ + C_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^1 v_{\xi\xi}^2 dxd\xi d\tau + C_2 \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^1 v_{x\xi\xi}^2 dxd\xi d\tau + C_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^1 v_{xx\xi\xi}^2 dxd\xi d\tau + C_0,\end{gathered}$$

в котором $\delta_0$ есть произвольное положительное число, числа $C_i, i = \overline{0,3}$, определяются функциями $b_j(x,t),\ \ j = \overline{1,5},\ \ \alpha_i(x,t),\ \ i = \overline{1,3},\ \ \beta_k(x,t),\ \ k = \overline{1,3}$, $\varphi_1(t),\ \ \psi_1(t)$, а также числом $\delta_0$. Подбирая $\delta_0$ малым и фиксируя, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2) dxd\tau + \le \\ \le \bar{C} \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^1 (v_{\xi\xi}^2 + v_{x\xi\xi}^2 + v_{xx\xi\xi}^2) dxd\xi d\tau + C_0\end{gathered} \qquad (2.67)$$

Далее по лемме Гронуолла следует, что имеет место оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2) dx d\tau \leq C_0 exp(T\bar{C}).$$

Из полученной оценки следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq C. \tag{2.68}$$

Воспользуемся далее методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0, 1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$v_{tt} - v_{xxtt} + b_1(x, t)v + b_2(x, t)v_x + b_3(x, t)v_{xx} = F_1(x, t) - \lambda[b_4(x, t)u + b_5(x, t)u_x], \tag{2.69}$$

а также условиям (2.62), (2.63) и

$$-v_{tt}(1, t) = \lambda[\alpha_1(t)v(1, t) + \alpha_2(t)v(0, t) + \alpha_3(t)v_{tt}(0, t)] + \varphi_1(t), 0 < t < T, \tag{2.70}$$

$$-v_{xtt}(0, t) = \lambda[\beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v_x(0, t) + \beta_3(t)v_{tt}(0, t)] + \psi_1(t), 0 < t < T, \tag{2.71}$$

Обозначим через $\Lambda$ множество тех чисел $\lambda$, для которых краевая задача (2.69), (2.70), (2.71), (2.59), (2.62) и (2.63) разрешима в пространстве $V$ для произвольной функции $F_1(x, t) \in L_2(Q)$, функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ из пространства $W_2^1([0, T])$. Если будет доказано, что множество $\Lambda$ не пусто, открыто и замкнуто (в топологии отрезка [0,1]), то оно будет совпадать со всем отрезком [0,1].

Непустота $\Lambda$ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше.

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру [94] краевая задача (2.69), (2.70), (2.71), (2.59), (2.62) и (2.63) разрешима для $\lambda \in [0, 1]$.

$\square$

Вернемся к нелокальной задаче, полученной редукцией исходной обратной задачи.

Положим положительные числа $C'_1$, $C'_2$, $C'_3$ определяются функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $f_1(x,t)$.

Сформулируем задачу: найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (2.57) и (2.59)(15), а также условиям (2.55), (2.56), (2.62) и (2.63).

**Теорема 2.6.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \;\; c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \;\; h(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{2.72}$$

$$f_1(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{1x}(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{1xx}(x,t) \in L_2([0,T]), \tag{2.73}$$

$$h(0,t) \neq 0, \;\; \max_{0 \le t \le T} |\frac{h(1,t)}{h(0,t)}| < \frac{1}{4}, \;\; t \in [0,T]). \tag{2.74}$$

*Тогда нелокальная задача* (2.57)*,* (2.59)*,* (2.55)*,* (2.56)*,* (2.62) *и* (2.63) *имеет решение* $v(x,t)$ *и* $u(x,t)$ *такое, что* $v(x,t) \in V$ *и* $u(x,t) \in V$*.*

*Доказательство.* Повторяя доказательство теоремы 2.5 - то есть, умножая уравнение (2.56), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau}$, и результат интегрируя от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной, воспользовавшись краевыми условиями (2.54) и (2.55), условиями теоремы, неравенством Юнга, неравенством ($*$), представлением ($**$), а также леммой Гроноулла - придем к оценке вида (2.68). Из этой оценки и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (2.57), (2.59), (2.55), (2.56), (2.62) и (2.63). □

Перейдем к изучению разрешимости исходной обратной задачи 2.3.

**Теорема 2.7.** *Пусть выполняются все условия теоремы 2.5. Тогда обратная задача 2.3 имеет решение* $u(x,t)$ *и* $q(t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V, q(t) \in L_2([0,T])$*.*

*Доказательство.* Пусть функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ есть функции, являющиеся решением нелокальной задачи, редуцированной из обратной задачи

(2.57), (2.59), (2.55), (2.56), (2.62) и (2.63). Положим

$$w(x,t) = u_{tt} - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u-$$
$$-b_1(x,t)u_{xxxt}(0,t) - b_2(x,t)u_{xxx}(0,t) - b_3(x,t)u_{xx}(0,t) - f_1(x,t).$$

Имеют место равенства

$$w_{xx}(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0, \ \ 0 < t < T.$$

Из этих равенств следует, что $w(x,t) \equiv 0$ в $Q$. Положим

$$q(t) = \frac{-u_{xxxt}(0,t) + a(0,t)u_{xxx}(0,t) + a_x(0,t)u_{xx}(0,t) - f_x(0,t)}{h_x(0,t)}.$$

Очевидно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.45). Осталось показать, что выполняется условие $u(0,t) = 0$. Положим в (2.45) $x = 0$. Получим равенство $u_{tt}(0,t) + c(0,t)u(0,t) = 0$ . Из этого равенства и условия $u(0,0) = 0$ следует требуемое равенство $u(0,t) = 0$. Принадлежность $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. $\square$

### 2.2.2. Разрешимость обратной задачи 2.4

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи 2.4. Для упрощения выкладок, формулировки и доказательства теоремы введем обозначения:

$$a_1(x,t) = a_x(x,t) - \frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_2(x,t) = a(x,t); \qquad a_3(x,t) = \frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$a_4(x,t) = -\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_5(x,t) = c_x(x,t) - \frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_6(x,t) = c(x,t);$$

$$f_1(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Пусть $\bar{a}_4 = \max\limits_{Q} |a_4(x,t)|$.

**Теорема 2.8.** *Пусть выполняются условия*

$$a_i(x,t) \in C(\bar{Q}),\ \ i = \overline{1,6};\ \ f_1(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.75}$$

$$h(x,t) \neq 0,\ \ (x,t) \in \bar{Q}; \tag{2.76}$$

$$a_{3x}(x,t) \leq 0. \tag{2.77}$$

$$\bar{a}_4 < 1. \tag{2.78}$$

*Тогда обратная задача 2.4 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.*

*Доказательство.* Выполним некоторые формальные построения. Пусть $h(x,t) \neq 0$ при $(x,t) \in \bar{Q}$. Разделим уравнение (2.45) на $h(x,t)$.

$$\frac{1}{h(x,t)}[u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u] = \frac{f(x,t)}{h(x,t} + q(t). \tag{2.79}$$

Продифференцируем уравнение (2.79) по $x$:

$$\frac{u_{xtt} + a_x(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_{xxx} - u_{xxxtt} + c_x(x,t)u + c(x,t)u_x}{h(x,t)} -$$

$$-\frac{[(u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u]h_x(x,t)}{h^2(x,t)} = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h^2(x,t)}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнениями

$$v(x,t) = u_x(x,t), \tag{2.80}$$

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xxtt} + a_1(x,t)v_x + a_2(x,t)v_{xx} + a_3(x,t)v_{xtt} + \\ + a_4(x,t)u_{tt} + a_5(x,t)u + a_6(x,t)u_x = f_1(x,t), \end{gathered} \tag{2.81}$$

при выполнении для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ условий:

$$u(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.82}$$

$$v(x,0) = 0, \qquad v_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.83}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{2.84}$$

Разрешимость данной краевой задачи покажем с помощью метода продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие в прямоугольнике $Q$ уравнению (2.80) и уравнению

$$v_{tt} - v_{xxtt} + a_2(x,t)v_{xx}+$$
$$+\lambda[a_1(x,t)v_x + a_3(x,t)v_{xtt} + a_4(x,t)u_{tt} + a_5(x,t)u + a_6(x,t)u_x] = f_1(x,t), \tag{2.85}$$

Для получения "хороших"априорных оценок умножим уравнение (2.85) , записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $v_\tau - v_{xx\tau} + v_{\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной переменной.

Применяя интегрирование по частям, начальные и краевые условия получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2 dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2 dxd\tau =$$
$$= -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)v_x v_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_\tau dxd\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_x v_\tau dxd\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)v_x v_{xx\tau} dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_{xx\tau} dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{xx\tau} dxd\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{xx\tau} dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_{xx\tau} dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_x v_{xx\tau} dxd\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_1(x,\tau)v_x v_{\tau\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_2(x,\tau)v_{xx}v_{\tau\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau} dxd\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_5(x,\tau)uv_{\tau\tau} dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_6(x,\tau)u_x v_{\tau\tau} dxd\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f_1(x,\tau)[v_\tau - v_{xx\tau} + v_{\tau\tau}]dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau} dxd\tau.$$

Например, рассмотрим оценку одного из интегралов в правой части равенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau} dxd\tau = \int\limits_0^t a_3(1,\tau)v_{\tau\tau}^2(1,\tau)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t a_3(0,\tau)v_{\tau\tau}^2(0,\tau)d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 [a_{3x}(x,\tau)v_{\tau\tau} + a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}]v_{\tau\tau} dxd\tau,$$

Учитывая условия (2.84) получим, что

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_3(x,\tau)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau}dxd\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_{3x}(x,\tau)v_{\tau\tau}^2dxd\tau.$$

Отсюда возникает необходимость выполнение условия (2.77) .

Например, учитывая условие (2.79) , последнее слагаемое в правой части оценивается так:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 a_4(x,\tau)u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}dxd\tau \le \bar{a}_4\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |u_{\tau\tau}v_{\tau\tau}|dxd\tau \le$$
$$\le \frac{\bar{a}_4}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau + \frac{\bar{a}_4}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau.$$

К остальным интегралам в правой части данного равенства применим неравенство Юнга, неравенство (∗), а также представление (∗∗). После всех преобразований и упрощений получим, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau\tau}^2 + v_{\tau\tau}^2)dxd\tau \le$$
$$\le A\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_t^2 + v_{x\tau}^2 + v_{xx\tau}^2)dxd\tau + \delta_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau\tau}^2 + v_{\tau\tau}^2)dxd\tau.$$

в котором $\delta_1$ - произвольное положительное число, число $A$, определяется функциями $a_j(x,t),\ j=\overline{1,6},\ f_1(t)$, а также числами $T$ и $\delta_1$. Подбирая число $\delta_1$ малым и фиксируя, применяя далее лемму Гронуолла, получаем, что имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{x\tau\tau}^2 + v_{\tau\tau}^2)dxd\tau \le M, \tag{2.86}$$

с постоянной M, определдяющейся функциями $a_j(x,t),\ j=\overline{1,6},\ f_1(t)$, а также числами $T$ и $\delta_1$.

Из оценки (2.86) следует очевидная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|u\|_V^2 \le C. \tag{2.87}$$

Оценка (2.87) показывает, что задача (2.80) , (2.85), (2.82) - (2.84) разрешима при $\lambda\in(0,1)$, так как она разрешима при $\lambda=0$ [12]. Очевидно, что разрешимой является и обратная задача 2.4. При этом функция $q(t)$ определяется с помощью формулы

$$q(t) = \frac{1}{h(0,t)}[u_{tt}(0,t) + a(0,t)u_{xx}(0,t) - u_{xxtt}(0,t) + c(0,t)u(0,t)] - \frac{f(0,t)}{h(0,t)}.$$

□

### 2.2.3. Разрешимость обратной задачи 2.5

Перейдем к изучению разрешимости обратной задачи 2.5.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{\delta_1^2}{2} - \frac{\delta_3^2}{2},$$

$$m_2 = 2 - \frac{K_1}{2\delta_1^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right) - \frac{K_2}{2\delta_3^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_4}\right) - \frac{K_3}{2\delta_5^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_6}\right) - \frac{K_4}{2\delta_7^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_8}\right),$$

$$m_3 = 1 - \frac{K_1\delta_2}{2\delta_1^2} - \frac{K_2\delta_4}{2\delta_3^2} - \frac{\delta_5^2}{2} - \frac{K_3\delta_6}{2\delta_5^2} - \frac{\delta_7^2}{2} - \frac{K_4\delta_8}{2\delta_7^2}.$$

Здесь числа $\delta_i$, $i = \overline{1,8}$ есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже, числа $K_j$, $j = \overline{1,4}$ зависят от значений функций $h(x,t)$ и $K(x,t)$.

**Теорема 2.9.** *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t) \in C(\bar{Q}); \;\; c(x,t) \in C(\bar{Q}); \;\; h(x,t) \in C(\bar{Q}); \tag{2.88}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.89}$$

$$\int\limits_0^1 K(x,t)h(x,t)dx \neq 0; \tag{2.90}$$

*существует положительные числа $\delta_i$, $i = \overline{1,8}$ такие, что*

$$m_1 > 0, \;\; m_2 > 0, \;\; m_3 > 0. \tag{2.91}$$

*Тогда обратная задача 2.5 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.*

*Доказательство.* Проведем некоторые формальные построения, касающиеся обратной задачи 2.5.

Умножим уравнении (2.45) на $K(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по пространственной переменной. Получим равенство

$$\int_0^1 K(x,t)u_{tt}(x,t)dx + \int_0^1 K(x,t)a(x,t)u_{xx}(x,t)dx - \int_0^1 K(x,t)u_{xxtt}(x,t)dx +$$
$$+\int_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)dx = \int_0^1 K(x,t)f(x,t)dx + q(t)\int_0^1 K(x,t)h(x,t)dx. \tag{2.92}$$

Обозначим $h_1(t) = \int_0^1 K(x,t)h(x,t)dx$. Пусть выполняется условие $h_1(t) \neq 0$ для $\forall t \in [0,T]$.

Используя следующие равенства

$$\int_0^1 K(x,t)u_{tt}(x,t)dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^1 K(x,t)u(x,t)dx\right] -$$
$$-2\int_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)dx - \int_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)dx =$$
$$= -2\int_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)dx - \int_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)dx,$$

$$\int_0^1 K(x,t)a(x,t)u_{xx}(x,t)dx = -\int_0^1 (K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)dx +$$
$$+K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)dx - K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dx,$$
$$-\int_0^1 K(x,t)u_{xxtt}(x,t)dx = -\int_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)dx +$$
$$+K(1,t)u_{xtt}(1,t)dx - K(0,t)u_{xtt}(0,t)dx,$$

вычислим $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{h_1(t)}[-2\int_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)dx - \int_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)dx -$$
$$-\int_0^1 (K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)dx + K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)dx - K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dx -$$
$$-\int_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)dx + K(1,t)u_{xtt}(1,t)dx - K(0,t)u_{xtt}(0,t)dx +$$
$$+\int_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)dx - \int_0^1 K(x,t)f(x,t)dx].$$

Пусть $\lambda$ - число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$\begin{gathered}
u_{tt}+a(x,t)u_{xx}-u_{xxtt}+c(x,t)u=f(x,t)+\\
+\lambda\tfrac{h(x,t)}{h_1(t)}[-2\int\limits_0^1 K_t(x,t)u_t(x,t)dx-\int\limits_0^1 K_{tt}(x,t)u(x,t)dx-\\
-\int\limits_0^1(K(x,t)a(x,t))_x u_x(x,t)dx+K(1,t)a(1,t)u_x(1,t)dx-\\
-K(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dx-\int\limits_0^1 K_x(x,t)u_{xxt}(x,t)dx+\\
+K(1,t)u_{xtt}(1,t)dx-K(0,t)u_{xtt}(0,t)dx+\\
+\int\limits_0^1 K(x,t)c(x,t)u(x,t)dx-\int\limits_0^1 K(x,t)f(x,t)dx],
\end{gathered}\tag{2.93}$$

а также условиям (2.46), (2.67).

Для получения "хороших"априорных оценок умножим уравнение (2.93), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $u_{\tau\tau}-u_{xx\tau\tau}$ и результат проинтегрируем от 0 до t по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной переменной. Применяя интегрирование по частям, условия (2.91), (2.46) и (2.67) получим неравенство

$$\begin{gathered}
m_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau+m_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2dxd\tau+m_3\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2dxd\tau\le\\
\le\delta_0(\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{x\tau\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{xx\tau\tau}^2dxd\tau)+\\
+C_1\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{\xi\xi}^2dxd\xi d\tau+C_2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{x\xi\xi}^2dxd\xi d\tau+C_3\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 v_{xx\xi\xi}^2dxd\xi d\tau+C_0,
\end{gathered}$$

в котором $\delta_0$ есть произвольное положительное число, числа $C_i, i=\overline{1,3}$ определяются функциями $a(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t),\ h(x,t),\ K(x,t)$. Поскольку числа $m_1,\ m_2,\ m_3$ положительны, то фиксируя $\delta_j,\ j=\overline{0,8}$ настолько малыми, чтобы выполнялось $m_1-\delta_0>0$, $m_2-\delta_0>0$, $m_3-\delta_0>0$, получим неравенство

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^t\int\limits_0^1(v_{\tau\tau}^2+v_{x\tau\tau}^2+v_{xx\tau\tau}^2)dxd\tau\le\\
\le\bar C\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1(v_{\xi\xi}^2+v_{x\xi\xi}^2+v_{xx\xi\xi}^2)dxd\xi d\tau+C_0'.
\end{gathered}\tag{2.94}$$

Далее по лемме Гронуолла следует, что имеет место оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (v_{\tau\tau}^2 + v_{x\tau\tau}^2 + v_{xx\tau\tau}^2) dx d\tau + \leq C_0' exp(T\bar{C}).$$

Из полученной оценки следует очевидная оценка

$$\|u\|_V^2 \leq C. \tag{2.95}$$

Непустота $\Lambda$ очевидна, при выполнении условий (2.88), (2.89) вспомогательная задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V$. Открытость и замкнутость следуют из априорных оценок, полученных выше.

Отсюда по теореме о методе продолжения по параметру вспомогательная задача разрешима для $\lambda \in [0,1]$.

Перейдем к доказательству разрешимости обратной задачи. Покажем, что решение вспомогательной задачи есть решение обратной задачи.

Положим $w(t) = \int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx$. Умножим уравнение (2.45) на $K(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной $x$. Получим, что $w''(t) = 0$. Проинтегрируем выражение от 0 до $t$ по переменной $\tau$ $\int\limits_0^t w''(\tau)d\tau = 0$. Учитывая, что $w'(0) = 0$, получим $w'(t) = 0$. Имеем $\int\limits_0^t w'(\tau)d\tau = 0$. Учитывая, что $w(0) = 0$, получим $w(t) = 0$. То есть $\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = 0$, что и требовалось получить. □

## 2.3. Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн и их сведение к нагруженным уравнениям

### Постановка задач

Пусть $\Omega$ есть интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$ - прямоугольник $\{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T), 0 < T < \infty\}$. Далее пусть $\alpha$, $\beta$ - положительные постоянные,

$f(x,t), h(x,t), N(x,t)$ - заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, t \in [0,T]$.

**Обратная задача 2.6.** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{2.96}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.97}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.98}$$

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{2.99}$$

**Обратная задача 2.7.** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике $Q$ уравнением (2.96), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.97) и (2.98), а также условия

$$\int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dt = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{2.100}$$

Уточним, что для обратной задачи 2.7 условия (2.97) и (2.98) есть условия прямой задачи для уравнения (2.96), условие же (2.100) есть условие переопределения интегрального типа. В обратной задаче 2.6 любое из условий (2.97) или (2.99) можно считать условием переопределения, оставшиеся же два можно считать условиями прямой задачи.

Определим необходимое пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xx}^2 + v_{xxtt}^2)dxdt < \infty \right\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_V = \left( \int\limits_Q (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xx}^2 + v_{xxtt}^2)dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство $V$ с данной нормой является банаховым.

### 2.3.1. Разрешимость обратной задачи 2.6

При исследовании разрешимости задачи использовался подход, основанный на сведении к интегродифференциальному уравнению, в котором нет неизвестного коэффициента. При этом использовались различные условия переопределения. Рассмотрим более подробно случай, в котором в качестве условия переопределения используется условие $u(x,T)=0$, где $x\in\Omega$.

Выполним некоторые формальные построения. Положим в уравнении (2.96) $v=u_{xx}$, $F(x,t)=u_{tt}-f(x,t)-q(x)h(x,t)$.

Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,t)$, которая является в области $Q$ решением уравнения

$$\alpha v+\beta v_{tt}=F(x,t), \tag{2.101}$$

и удовлетворяет условиям

$$v(x,0)=v_t(x,0)=0 \tag{2.102}$$

(переменная $x\in\Omega$ здесь является параметром).

Обозначим $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma^2$. Тогда решением задачи (2.101), (2.102) является функция

$$v(x,t)=\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)F(x,\tau)d\tau.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} u_{xx}=\tfrac{1}{\gamma}\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)u_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau- \\ -\tfrac{q(x)}{\gamma}\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)h(x,\tau)d\tau-\tfrac{1}{\gamma}\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)f(x,\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{2.103}$$

Введем еще обозначения:

$$h_1(x,t)=\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)h(x,\tau)d\tau,$$

$$f_1(x,t) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau) f(x,\tau)d\tau.$$

После несложных преобразований от (2.103) переходим к уравнению

$$u_{xx} - u = -\gamma\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)u(x,\tau)d\tau - q(x)h_1(x,t) - f_1(x,t). \qquad (2.104)$$

Положим в (2.104) $t = T$. Пусть выполняется условие $h_1(x,T) \neq 0$ при $x \in [0,1]$. Тогда можно вычислить $q(x)$:

$$q(x) = -\frac{\gamma}{h_1(x,T)}\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau - \frac{f_1(x,T)}{h_1(x,T)}.$$

Вновь введем обозначения:

$$h_2(x,t) = -\frac{\gamma h(x,t)}{h_1(x,T)},$$

$$f_2(x,t) = f(x,t) - \frac{h(x,t)f_1(x,T)}{h_1(x,T)}.$$

Учитывая наши обозначения и представление $q(x)$, получим

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f_2(x,t) + h_2(x,t)\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau. \qquad (2.105)$$

В результате вышеизложенных построений мы пришли к "нагруженному" [78] уравнению для функции $u(x,t)$. Присоединим к нему условия (2.97) и (2.98). Из разрешимости полученной краевой задачи и будет вытекать разрешимость исходной обратной задачи 2.5.

Положим

$$m_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau},$$

$\bar{m_1} = \max\limits_{\bar{Q}} |m_1(x,t)|$, $A$ - число, такое что $A > T$.

**Теорема 2.10.** *Пусть выполняются условия*

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; f(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.106}$$

$$\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau \neq 0, x \in [0,1]; \tag{2.107}$$

$$\alpha T^4 \overline{m_1}^2 < \beta^3. \tag{2.108}$$

*Тогда обратная задача 2.6 имеет решение* $u(x,t)$, $q(x)$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.

*Доказательство.* Применим метод продолжения по параметру [94] для доказательства разрешимости полученной выше задачи. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f_2(x,t) + \lambda h_2(x,t) \int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{2.109}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.97) и (2.98).

Для нахождения подходящих априорных оценок решения настоящей задачи, необходимых для применения теоремы о методе продолжения по параметру, умножим уравнение (2.109) на функцию $-(A-t)u_{xxt}$ и результат проинтегрируем от 0 до T по временной переменной и от 0 до 1 по пространственной переменной. Получим равенство

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (A-t)u_{xxt}u_{tt}dxdt + \alpha\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (A-t)u_{xxt}u_{xx}dxdt +$$
$$\beta\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (A-t)u_{xxt}u_{xxtt}dxdt = -\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (A-t)u_{xxt}f_2(x,t)dxdt -$$
$$-\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (A-t)u_{xxt}h_2(x,t)\left(\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau\right)dxdt.$$

Выполнив интегрирование по частям и используя граничные условия, придем к соотношению

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+\alpha u_{xx}^2+\beta u_{xxt}^2]dxdt+$$
$$+\frac{A-T}{2}\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx=$$
$$=-\int\limits_0^T\int\limits_0^1(A-t)u_{xxt}f_2(x,t)dxdt-$$
$$-\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^1(A-t)u_{xxt}h_2(x,t)\left(\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau\right)dxdt.$$

Оценивая слагаемые в правой части этого равенства с помощью неравенств Юнга и Гельдера, а также неравенств

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2(x,t)dxdt\leq\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_x^2(x,t)dxdt\leq\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)dxdt, \qquad (*)$$

справедливых для функции $u(x,t)$, удовлетворяющей условию (2.98), получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+\alpha u_{xx}^2+\beta u_{xxt}^2]dxdt+$$
$$+\frac{A-T}{2}\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx\leq$$
$$\leq\frac{\delta_1^2+\delta_2^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2dxdt+\frac{A}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_2^2(x,t)dxdt+$$
$$+\frac{\gamma^2\bar{m}_1^2A^2T^2}{2\delta_2^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxdt.$$

Из условия (2.108) и свойств действительных чисел следует, что можно подобрать число A таким, что выполняется $A>T$, $\alpha A^2T^2\overline{m}_1^2<\beta^3$. Зафиксировав A указанным образом, выберем число $\delta_2$ так, чтобы имели место неравенства

$$\frac{\alpha A^2\bar{m}_2^2T^2}{\beta^2}<\delta_2^2<\beta$$

(это возможно). Зафиксировав $\delta_2$ и далее число $\delta_1$ достаточно малым, получим, что имеет место априорная оценка

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_0^1 [u_{xxt}^2 + u_{xx}^2 + u_{xt}^2]dxdt+ \\ +\int_0^1 [u_{xt}^2(x,T) + \alpha u_{xx}^2(x,T) + \beta u_{xxt}^2(x,T)]dx \leq \\ \leq K_1 \int_0^T\int_0^1 f_2^2(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{2.110}$$

в которой постоянная $K_1$ определяется числами $\alpha$, $\beta$, $A$, $T$, а также функцией $h(x,t)$.

Анализируя далее равенство

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_0^1 (u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt})(u_{tt} - \beta u_{xxtt})dxdt = \\ = \int_0^T\int_0^1 (f_2(x,t) + h_2(x,t)\int_0^T \sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau)(u_{tt} - \beta u_{xxtt})dxdt\end{gathered}$$

и присоединяя оценку (2.110), получим, что выполняется очевидная оценка

$$\|u\|_V \leq C_1, \tag{2.111}$$

в которой постоянная $C_1$ определяется числами $\alpha$, $\beta$, $A$, $T$, а также функцией $h(x,t)$.

При $\lambda = 0$ задача (2.109), (2.97), (2.98) при $\lambda = 0$ есть начально-краевая задача для линейного уравнения Буссинеска и разрешимость этой задачи в пространстве $V$ известна [102]. Оценка (2.111) показывает, что задача (2.109), (2.97), (2.98) разрешима при $\lambda \in [0,1]$ [94].

Определим функцию $q(x)$:

$$q(x) = -\frac{\gamma}{h_1(x,T)}\int_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau - \frac{f_1(x,T)}{h_1(x,T)}.$$

Очевидно, что решение $u(x,t)$ задачи (2.109), (2.97), (2.98) при $\lambda = 1$ и определенная выше функция $q(x)$ связаны в прямоугольнике Q уравнением (2.96).

Вновь положим в уравнении (2.96) $v = u_{xx}$ и $F(x,t) = u_{tt} - f(x,t) - q(x)h(x,t)$. Учитывая, что $\gamma^2 = \frac{\alpha}{\beta}$, получим уравнение

$$\alpha v + \beta v_{tt} = u_{tt} - f(x,t) - q(x)h(x,t).$$

Очевидным следствием этого уравнения является равенство

$$v(x,t) = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)F(x,\tau)d\tau$$

или

$$u_{xx} = \tfrac{1}{\gamma}\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)u_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau -$$
$$-q(x)\tfrac{1}{\gamma}\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)h(x,\tau)d\tau - \tfrac{1}{\gamma}\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)f(x,\tau)d\tau.$$

Выполняя в первом слагаемом правой части интегрирование по частям и используя вид функций $h_1(x,t)$ и $f_1(x,t)$, придем к равенству

$$u_{xx} - u = -\gamma\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)u(x,\tau)d\tau - q(x)h_1(x,t) - f_1(x,t).$$

Положим в этом равенстве $t = T$ и подставим $q(x)$:

$$u_{xx}(x,T) - u(x,T) = -\gamma\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau - f_1(x,T) -$$
$$-[-\tfrac{\gamma}{h_1(x,T)}\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)u(x,\tau)d\tau - \tfrac{f_1(x,T)}{h_1(x,T)}]h_1(x,T).$$

Отсюда

$$u_{xx}(x,T) - u(x,T) = 0.$$

Присоединяя граничные условия $u(0,T) = u(1,T) = 0$, получаем $u(x,T) = 0$ при $x \in [0,1]$. Следовательно, для решения краевой задачи (2.105), (2.97), (2.98) выполняется условие переопределения (2.99).

Очевидно, что для функций $u(x,t)$ и $q(x)$ выполняются включения $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$. Обратная задача 2.6 разрешима. $\square$

### 2.3.2. Разрешимость обратной задачи 2.7

Для исследования разрешимости обратной задачи 2.7 применим тот же метод перехода к интегродифференциальному уравнению, что и для обратной задачи 2.6. В качестве условия переопределения здесь используется условие интегрального вида. Поэтому умножим уравнение (2.104) на $N(x,t)$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до Т. Получим

$$\int\limits_0^T N(x,t)u_{xx}(x,t)dt =$$
$$-\gamma \int\limits_0^T N(x,t)\left(\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right)dt-$$
$$-q(x)\int\limits_0^T N(x,t)h_1(x,t)dt - \int\limits_0^T N(x,t)f_1(x,t)dt.$$

В левой части данного равенства выполним интегрирование по частям. Для краткости записи обозначим

$$\mu(x) = \int\limits_0^T N(x,t)h_1(x,t)dt, \ \ \varphi(x) = \int\limits_0^T N(x,t)f_1(x,t)dt.$$

Получим

$$-2\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt - \int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt =$$
$$= -\gamma \int\limits_0^T N(x,t)\left(\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right)dt - q(x)\mu(x) - \varphi(x).$$

Вновь введем обозначения

$$\Phi(u) = 2\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt + \int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt-$$
$$-\gamma \int\limits_0^T N(x,t)\left(\int\limits_0^t sin\gamma(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right)dt;$$

$$a(x) = \frac{1}{\mu(x)}; \ \ b(x) = -\frac{\varphi(x)}{\mu(x)}.$$

Пусть $\mu(x) \neq 0$. Найдем $q(x)$:

$$q(x) = a(x)\Phi(u) + b(x).$$

Используя введенные обозначения и представление $q(x)$ в (2.96), получим уравнение:

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f(x,t) + a(x)\Phi(u)h(x,t) + b(x)h(x,t). \tag{2.112}$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области $Q$ решением уравнения (2.112) и удовлетворяющую условиям (2.97) и (2.98). Разрешимость исходной обратной задачи 2.7 будет вытекать из разрешимости поставленной задачи.

Положим

$$m_2(x) = \frac{1}{\int\limits_0^T N(x,t)\left(\int\limits_0^t \sin\gamma(t-\tau)h(x,\tau)d\tau\right)dt},$$

$\bar{m_2} = \max\limits_{x\in[0,1]} |m_2(x)|$, $\bar{h} = \max\limits_{\bar{Q}} |h(x,t)|$, $\bar{N} = \max\limits_{\bar{Q}} |N(x,t)|$, $A$ - число, такое что $A > T$.

**Теорема 2.11.** *Пусть выполняются условия*

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; f(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.113}$$

$$\int\limits_0^T sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau \neq 0, x \in [0,1]; \tag{2.114}$$

$$\alpha\bar{m}_2^2 A^2\bar{h}^2\bar{N}(3\beta^2 T + \alpha^2 T^2) < \beta^5. \tag{2.115}$$

*Тогда обратная задача 2.7 имеет решение $u(x,t)$, $q(x)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.*

*Доказательство.* Как и при доказательстве теоремы 2.10 для доказательства разрешимости задачи (2.112), (2.97), (2.98), применим метод продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в прямоугольнике $Q$ уравнению

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f(x,t) + \lambda[a(x)\Phi(u)h(x,t) + b(x)h(x,t)]. \tag{2.116}$$

и условиям (2.97) и (2.98).

Умножим уравнение (2.116) на функцию $-(A-t)u_{xxt}$ и результат проинтегрируем от 0 до Т по переменной $t$ и от 0 до 1 по переменной $x$. Также выполним интегрирование по частям и используем граничные условия. Получим равенство:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+\alpha u_{xx}^2+\beta u_{xxt}^2]dxdt+\frac{A-T}{2}\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+$$
$$+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx=-\int\limits_0^T\int\limits_0^1(A-t)u_{xxt}f(x,t)dxdt-$$
$$-\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^1(A-t)u_{xxt}[a(x)\Phi(u)h(x,t)+b(x)h(x,t)]dxdt.$$

Оценивая слагаемые в правой части этого равенства с помощью неравенств Юнга, Гельдера и неравенства $(*)$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+\alpha u_{xx}^2+\beta u_{xxt}^2]dxdt+\frac{A-T}{2}\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+$$
$$+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx\le\frac{\delta_3^2+\delta_4^2+\delta_5^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2dxdt+$$
$$+\frac{A^2}{2\delta_3^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,t)dxdt+$$
$$+\frac{A^2\bar{b}^2}{2\delta_4^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 h^2(x,t)dxdt+$$
$$+\frac{\gamma^2\bar{m}_2{}^2A^2\bar{h}^2\bar{N}}{2\delta_5^2}(3T+\gamma^2T^2)\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxdt.$$

Выберем числа $\delta_3$, $\delta_4$ и $\delta_5$ так, чтобы имели места неравенства

$$\frac{\beta}{2}-\frac{\delta_3^2+\delta_4^2+\delta_5^2}{2}>0,$$
$$\frac{1}{2}-\frac{\gamma^2\bar{m}_2{}^2A^2\bar{h}^2\bar{N}}{2\delta_5^2}(3T+\gamma^2T^2)>0.$$

Зафиксируем число $\delta_5$ и выберем $\delta_3$ и $\delta_4$ достаточно малыми так, чтобы имела место очевидная оценка

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+u_{xx}^2+u_{xxt}^2]dxdt+\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx\le$$
$$\le K_2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2(x,t)dxdt+K_3\int\limits_0^T\int\limits_0^1 h^2(x,t)dxdt,$$

в которой постоянные $K_2$ и $K_3$ определяется числами $\alpha$, $\beta$, $A$, $T$, а также функциями $h(x,t)$ и $f(x,t)$. Отсюда вытекает оценка

$$\|u\|_V\le C_2. \tag{2.117}$$

Оценка (2.117) показывает, что задача (2.116), (2.97), (2.98) разрешима при $\lambda \in [0,1]$, так как она разрешима при $\lambda = 0$.

Аналогично доказательству теоремы 2.9, можно показать, что выполняется условие переопределения (2.100). Очевидно, что разрешимой является и обратная задача 2.7. $\square$

Используем иной подход для доказательства разрешимости обратной задачи 2.7, основанный на сведение исходной обратной задачи к прямой задаче для "нагруженного" уравнения.

Умножим уравнение (2.96) на $N(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до T по временной переменной. Получим равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T N(x,t)u_{tt}dt - \alpha\int\limits_0^T N(x,t)u_{xx}dt - \beta\int\limits_0^T N(x,t)u_{xxtt}dt = \\ = \int\limits_0^T N(x,t)f(x,t)dt + q(x)\int\limits_0^T N(x,t)h(x,t)dt.\end{gathered} \tag{2.118}$$

Обозначим

$$h_3(x) = \int\limits_0^T N(x,t)h(x,t)dt.$$

Пусть $h_3(x) \neq 0$ для любого $x \in [0,1]$. Используем следующие преобразования

$$\int\limits_0^T N(x,t)u_{tt}dt = N(x,T)u_t(x,T) - N_t(x,T)u(x,T) + \int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u(x,t)dt,$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T N(x,t)u_{xx}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dt\right) - \\ -2\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt - \int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt,\end{gathered}$$

$$\int\limits_0^T N(x,t)u_{xxtt}dt = N_t(x,T)u_{xx}(x,T) - N(x,T)u_{xxt}(x,T) + \int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u_{xx}(x,t)dt.$$

Вычислим $q(x)$ из выражения (2.118):

$$q(x)=\frac{1}{h_3(x)}[N(x,T)u_t(x,T)-N_t(x,T)u(x,T)+\int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u(x,t)dt+$$
$$+2\alpha\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt+\alpha\int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt-$$
$$-\beta N_t(x,T)u_{xx}(x,T)+\beta N(x,T)u_{xxt}(x,T)-$$
$$-\beta\int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u_{xx}(x,t)dt-\int\limits_0^T N(x,t)f(x,t)dt].$$

Обозначим

$$f_3(x,t)=f(x,t)-\frac{1}{h_3(x)}\int\limits_0^T N(x,t)f(x,t)dt,$$

$$h_4(x,t)=\frac{h(x,t)}{h_3(x)}.$$

С учетом этих обозначений уравнение (2.96) примет вид

$$u_{tt}-\alpha u_{xx}-\beta u_{xxtt}=f_3(x,t)+$$
$$+h_4(x,t)[N(x,T)u_t(x,T)-N_t(x,T)u(x,T)+\int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u(x,t)dt+$$
$$+2\alpha\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt+\alpha\int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt-$$
$$-\beta N_t(x,T)u_{xx}(x,T)+\beta N(x,T)u_{xxt}(x,T)-\beta\int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u_{xx}(x,t)dt]. \tag{2.119}$$

Уравнение (2.119) в совокупности с условиями (2.97) и (2.98) является уже прямой задачей. Из доказательства существования и единственности решения этой вспомогательной задачи следует разрешимость исходной обратной задачи 2.6.

Положим $\bar{h_4}=\max\limits_{\bar{Q}}|h_4(x,t)|$, $\bar{N}=\max\limits_{\bar{Q}}|N(x,t)|$, $\bar{N_t}=\max\limits_{\bar{Q}}|N_t(x,t)|$, $\bar{N_{tt}}=\max\limits_{\bar{Q}}|N_{tt}(x,t)|$, $A$ - число, такое что $A>T$.

$$B_1=\frac{\delta_6^2}{2}+\frac{\delta_7^2}{2}+\frac{\delta_8^2}{2}+\frac{\delta_9^2}{2}+\frac{\delta_{10}^2}{2}+\frac{\delta_{11}^2}{2}+\frac{\delta_{12}^2}{2}+\frac{\delta_{13}^2}{2}+\frac{\delta_{14}^2}{2},$$

$$B_2=\frac{(\bar{A}\bar{h_4})^2}{2\delta_{10}^2}T\bar{N}_{tt}+\frac{(\bar{A}\bar{h_4})^2}{2\delta_{14}^2}T\bar{N}+\frac{(\bar{A}\bar{h_4})^2}{2\delta_9^2}T\bar{N}_{tt},$$

$$B_3 = \frac{(\bar{A}\bar{h_4}\bar{N})^2}{2\delta_7^2}T,$$

$$B_4 = \frac{(\bar{A}\bar{h_4}\bar{N_t})^2}{2\delta_{12}^2}T + \frac{(\bar{A}\bar{h_4}\bar{N_t})^2}{2\delta_{11}^2}T + \frac{(\bar{A}\bar{h_4}\bar{N_t})^2}{2\delta_8^2}T,$$

$$B_5 = \frac{(\bar{A}\bar{h_4}\bar{N})^2}{2\delta_{13}^2}T,$$

$$B_6 = \frac{\bar{A}^2}{2\delta_6^2},$$

где числа $\delta_i$, $i = \overline{6, 14}$, есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены ниже.

**Теорема 2.12.** *Пусть выполняются условия*

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \ \ f(x,t) \in L_2(Q); \tag{2.120}$$

*и существуют положительные числа $\delta_i$, $i = \overline{6, 14}$, такие, что*

$$B_1 < \tfrac{1}{4},\ B_2 < \tfrac{\alpha}{4},\ \tfrac{A}{2} - B_3 > 0,\ \alpha\tfrac{A}{2} - B_4 > 0,\ \beta\tfrac{A}{2} - B_5 > 0. \tag{2.121}$$

*Тогда обратная задача 2.7 имеет решение $u(x,t)$, $q(x)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.*

*Доказательство.* Разрешимость задачи докажем, используя метод продолжения по параметру. Пусть $\lambda$ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области $Q$ решением уравнения

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = f_3(x,t) + \\ +\lambda h_4(x)[\tfrac{1}{h_3(x)}[N(x,T)u_t(x,T) - N_t(x,T)u(x,T) + \int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u(x,t)dt + \\ +2\alpha \int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt + \alpha \int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt - \\ -\beta N_t(x,T)u_{xx}(x,T) + \beta N(x,T)u_{xxt}(x,T) - \beta \int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u_{xx}(x,t)dt] \end{gathered} \tag{2.122}$$

и удовлетворяющую условиям (2.97) и (2.98).

Умножим уравнение (2.122) на функцию $-(A - t)u_{xxt}$ и результат проинтегрируем от 0 до T по временной переменной $t$ и от 0 до 1 по пространственной $x$. Также выполним интегрирование по частям и используем граничные условия. Оценивая слагаемые в правой части этого равенства с помощью неравенств Юнга, Гельдера и $(*)$, получим, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1[u_{xt}^2+\alpha u_{xx}^2+\beta u_{xxt}^2]dxdt+\frac{A-T}{2}\int\limits_0^1[u_{xt}^2(x,T)+\alpha u_{xx}^2(x,T)+\beta u_{xxt}^2(x,T)]dx\leq$$
$$\leq B_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2dxdt+B_2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxdt+B_3\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)dx+$$
$$+B_4\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,T)dx+B_5\int\limits_0^1 u_{xxt}^2(x,T)dx+B_6\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_3^2(x,t)dxdt,$$

где числа $B_i$, $i=\overline{1,6}$ определяются $\delta_i$, $i=\overline{6,14}$, числами A, T, функциями $h_4(x,t)$, $N(x,t)$ и ее производными. Поскольку числа $\alpha$, $\beta$ положительны, то фиксируя

$$\left(\frac{1}{2}-B_1\right)\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xt}^2dxdt+\left(\frac{\alpha}{2}-B_2\right)\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxdt+\frac{\beta}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2dxdt+$$
$$+\left(\frac{A-T}{2}-B_3\right)\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)dx+\left(\alpha\frac{A-T}{2}-B_4\right)\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,T)dx+$$
$$+\left(\beta\frac{A-T}{2}-B_5\right)\int\limits_0^1 u_{xxt}^2(x,T)dx\leq B_6\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_3^2(x,t)dxdt,$$

Отсюда следует очевидная оценка

$$\|u\|_V^2\leq C. \tag{2.123}$$

При $\lambda=0$ данная задача есть начально-краевая задача для линейного уравнения Буссинеска и разрешимость этой задачи в пространстве $V$ известна [102]. Разрешимость задачи при всех $\lambda$ из отрезка $[0,1]$ следует из оценки (2.123) [94].

Перейдем к доказательству разрешимости обратной задачи. Покажем, что решение вспомогательной задачи есть решение обратной задачи 2.6.

Положим

$$q(x) = \frac{1}{h_3(x)}[N(x,T)u_t(x,T) - N_t(x,T)u(x,T) + \int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u(x,t)dt +$$
$$+2\alpha\int\limits_0^T N_x(x,t)u_x(x,t)dt + \alpha\int\limits_0^T N_{xx}(x,t)u(x,t)dt -$$
$$-\beta N_t(x,T)u_{xx}(x,T) + \beta N(x,T)u_{xxt}(x,T) -$$
$$-\beta\int\limits_0^T N_{tt}(x,t)u_{xx}(x,t)dt - \int\limits_0^T N(x,t)f(x,t)dt].$$

Положим

$$w(x) = \int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dx.$$

Умножим уравнение (2.96) на $N(x,t)$ и проинтегрируем от 0 до T по переменной $t$. Подставим $q(x)$. Получим, что $w''(x) = 0$. Дважды проинтегрируем выражение от 0 до $x$ по переменной $\tau$, получим $\int\limits_0^x w'(\tau)d\tau = 0$. Учитывая, что $w(0) = w(1) = 0$, получим $w(t) = 0$. То есть

$$\int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dt = 0,$$

что и требовалось получить. Обратная задача 2.7 разрешима в требуемом классе. $\square$

**Замечание.** Можно получить иные условия разрешимости задачи 2.7, если использовать вместо $(*)$ неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_x^2(x,t)dxdt \leq T^2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)dxdt, \qquad (**)$$

справедливое для функций из пространства $V$, удовлетворяющих условию $u(x,0) = 0$.

# 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

## 3.1. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной

В главе изучается разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением $u(x,t)$ также неизвестного множителя $q(t)$ в уравнении

$$D_t^{2p}(u-\Delta u)+Bu=f_0(x,t)+q(t)h_0(x,t)$$

($t\in(0,T)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $p$ — натуральное число, $D_t^k=\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным, $B$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка, также действующий по пространственным переменным, $f_0(x,t)$ и $h_0(x,t)$ — заданные функции). В качестве условия переопределения в изучаемых задачах используется условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

### 3.1.1. Постановка обратных задач

Пусть $\Omega$ есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $S=\Gamma\times(0,T)$ — боковая граница $Q$, $f_0(x,t)$, $h_0(x,t)$, $N(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $b_0(x)$ — заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$. Через $D_t^k$, $k=1,2,\dots$, будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, через $B$ — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij}(x)v_{x_j}\right) + b_0(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до $n$). Наконец, для натурального числа $p$ через $L$ обозначим дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = D_t^{2p}(v - \Delta v) + Bv$$

($\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным).

**Обратная задача 3.1**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$Lu = f_0(x,t) + q(t)h_0(x,t), \tag{3.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3.2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, 2p-1, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_\Omega N(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{3.4}$$

**Обратная задача 3.2**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (3.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (3.2) и (3.4), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1, \tag{3.5}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1. \tag{3.6}$$

В обратных задачах 3.1 и 3.2 условие (3.4) есть условие интегрального переопределения, условия же (3.2) и (3.3) или (3.2), (3.5) и (3.6) есть условия прямой задачи (то есть задачи с известной правой частью) гиперболического [21, 102] или эллиптического [98] типов соответственно.

В специальном случае — именно, в случае $B = \beta_0\Delta + \beta_1$ для рассматриваемых уравнений будут предложены и другие обратные задачи, исходящие из квазигиперболичности [46] оператора $L$; точные формулировки этих задач будут даны ниже.

### 3.1.2. Разрешимость обратных задач 3.1 и 3.2

**Разрешимость обратной задачи 3.1** Введем необходимые для исследования разрешимости обратной задачи 3.1 обозначения. Именно, положим

$$\varphi(t) = \int\limits_{\Omega} N(x) f_0(x,t)\,dx, \quad \psi(t) = \int\limits_{\Omega} N(x) h_0(x,t)\,dx,$$

$$f_1(x,t) = f_0(x,t) - \frac{\varphi(t) h_0(x,t)}{\psi(t)}, \quad h_1(x,t) = \frac{h_0(x,t)}{\psi(t)},$$

$$N_1 = \int\limits_{\Omega} \left[\Delta N(x)\right]^2\,dx \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_{\Omega} h_1^2(x,t)\,dx\right),$$

$$N_2 = \int\limits_{\Omega} \left[B N(x)\right]^2\,dx \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_{\Omega} h_1^2(x,t)\,dx\right).$$

Для заданной функции $w(x,t)$ определим функцию $\Phi(w;t)$;

$$\Phi(w;t) = -\int\limits_{\Omega} \Delta N(x) D_t^{2p} w(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} B N(x) w(x,t)\,dx.$$

Для функций $v(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x)\,dx \le d_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2(x)\,dx, \tag{3.7}$$

число $d_0$ в котором определяется лишь областью $\Omega$. Это неравенство и число $d_0$ понадобятся нам ниже.

Наконец, через $V_1$ обозначим банахово пространство функций $v(x,t)$

$$V_1 = \{v(x,t): \ D_t^k v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \ k = 0,1,\ldots,2p\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \sum_{k=0}^{2p} \|D_t^k v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))}.$$

**Теорема 3.1.** *Пусть выполняются условия*

$$b^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)); \tag{3.8}$$

$$N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma; \tag{3.9}$$

$$|\psi(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{3.10}$$

$$N_1 < \left(1 + \frac{1}{d_0}\right)^2. \tag{3.11}$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$Lu - h_1(x,t)\Phi(u;t) = f_1(x,t) \tag{3.12}$$

*и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).* Докажем с помощью метода продолжения по параметру, что эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V_1$.

Пусть $\lambda$ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$D_t^{2p}(u - \Delta u) + \lambda[Bu - h_1(x,t)\Phi(u;t)] = f_1(x,t) \qquad 3.12_\lambda$$

*и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).* Для разрешимости этой задачи в пространстве $V_1$ при всех $\lambda$ (а, значит, и при $\lambda = 1$)

достаточно показать, что задача ($3.12_0$), (3.2), (3.3) разрешима в пространстве $V_1$, и что для всевозможных решений $u(x,t)$ задач (3.12), (3.2), (3.3) из пространства $V_1$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq R_0 \tag{3.13}$$

с постоянной $R_0$, определяющейся лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\ldots,n$, $b_0(x)$, $N(x)$, $h_0(x,t)$ и $f_0(x,t)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

Разрешимость в пространстве $V$ краевой задачи ($3.12_0$), (3.2), (3.3) очевидна, поскольку уравнение ($3.12_0$) вместе с условиями (3.2) и (3.3) порождает две независимые задачи, разрешимость каждой из которых известна.

Покажем, что имеет место требуемая оценка (3.13). Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ D_t^{2p}(u(x,t)-\Delta u(x,t)) + \lambda[Bu(x,t) - h_1(x,t)\Phi(u;t)] \Big\} D_t^{2p}u(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f_1(x,t) D_t^{2p} u(x,t)\,dx, \tag{3.14}$$

в котором $t$ есть произвольное число из отрезка $[0,T]$. После интегрирования по частям и использования равенства (3.7) нетрудно получить следствие равенства (3.14):

$$\left(1+\frac{1}{d_0}\right)\int\limits_{\Omega}\Big[D_t^{2p}u(x,t)\Big]^2\,dx \leq \left|\int\limits_{\Omega} h_1(x,t)\Phi(u;t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\Omega} Bu(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\Omega} f_1(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right|. \tag{3.15}$$

Имеют место оценки

$$\left|\int\limits_{\Omega} h_1(x,t)\Phi(u;t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right| \leq \left(\frac{\delta_0^2}{2}+\frac{\delta_1^2}{2}+\frac{N_1}{2\delta_0^2}\right)\int\limits_{\Omega}\Big[D_t^{2p}u(x,t)\Big]^2\,dx +$$

$$+\frac{N_2}{2\delta_1^2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx, \tag{3.16}$$

$$\left|\int\limits_\Omega Bu(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right| \le \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2 dx + \frac{B_0}{2\delta_2^2}\|u(x,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.17}$$

$$\left|\int\limits_\Omega f_1(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx\right| \le \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2 dx + \frac{1}{2\delta_3^2}\int\limits_\Omega f_1^2(x,t)\,dx, \tag{3.18}$$

в которых $\delta_0$, $\delta_1$, $\delta_2$ и $\delta_3$ есть произвольные положительные числа, число же $B_0$ определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, и $b_0$. Зафиксируем число $\delta_0$, положив $\delta_0=\sqrt{N_1}$. Используя условие (3.11), затем выбирая числа $\delta_1$, $\delta_2$ и $\delta_2$ малыми и фиксируя, нетрудно от (3.15) с помощью оценок (3.16)–(3.18) перейти к неравенству

$$\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2 dx \le K_1\|u(x,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} + K_2, \tag{3.19}$$

в котором $K_1$ и $K_2$ определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $b_0(x)$, $N(x)$, $h_0(x,t)$ и $f_0(x,t)$.

Неравенство (3.19) можно продолжить, используя второе основное неравенство для эллиптических операторов ( [55], гл. III, § 8), оценки

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \le T\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [D_\tau u(x,\tau)]^2\,dx\,d\tau \le T^3\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[D_\tau^2 u(x,\tau)\right]^2 dx\,d\tau \le \dots$$

$$\dots \le T^{4p-3}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[D_\tau^{2p-1}u(x,\tau)\right]^2 dx\,d\tau, \tag{3.20}$$

а также аналогичные оценки для производных функции $u(x,t)$ по пространственным переменным; в результате получим неравенство

$$\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2 dx \le K_3\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[D_\tau^{2p-1}\Delta u(x,\tau)\right]^2 dx\,d\tau + K_4, \tag{3.21}$$

числа $K_3$ и $K_4$ в котором определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $b_0(x)$, $N(x)$, $h_0(x,t)$ и $f_0(x,t)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left\{ D_\tau^{2p}\left(u(x,\tau) - \Delta u(x,\tau)\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda[Bu(x,\tau) - h_1(x,\tau)\Phi(u;\tau)] \right\} D_\tau^{2p-1} u(x,\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f_1(x,t) D_\tau^{2p-1}\Delta u(x,\tau)\, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя второе основное неравенство для эллиптических операторов, оценки (3.20) и (3.21) нетрудно от этого равенства перейти к неравенству

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ D_t^{2p-1} u_{x_i}(x,t)\right]^2 + \left[D_t^{2p-1}\Delta u(x,t)\right]^2 \right\} dx \leq$$

$$\leq K_5 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[D_\tau^{2p-1}\Delta u(x,\tau)\right]^2 dx\, d\tau + K_6,$$

числа $K_5$ и $K_6$ в котором определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $b_0(x)$, $N(x)$, $h_0(x,t)$ и $f_0(x,t)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$. Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, получим, что имеет место априорная оценка

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \left[D_t^{2p-1} u_{x_i}(x,t)\right]^2 dx + \int\limits_\Omega \left[D_t^{2p-1}\Delta u(x,t)\right]^2 dx \leq R_1, \tag{3.22}$$

в которой $t \in [0,T]$, число $R_1$ определяется числами $K_5$ и $K_6$, а также числом $T$.

Из оценок (3.21) и (3.22) вытекает вторая априорная оценка

$$\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p} u(x,t)\right]^2 dx \leq R_2, \tag{3.23}$$

число $R_2$ в которой определяется числами $K_3$, $K_4$ и $R_1$, а также числом $T$.

Следующее равенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ D_t^{2p}(u(x,t) - \Delta u(x,t)) + \lambda[Bu(x,t) - h_1(x,t)\Phi(u;t)] \right\} D_t^{2p}\Delta u(x,t)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f_1(x,t) D_t^{2p} \Delta u(x,t)\,dx$$

вместе с оценками (3.22) и (3.23) позволяет вывести третью априорную оценку

$$\int\limits_{\Omega} \left[ D_t^{2p} \Delta u(x,t) \right]^2 dx \leq R_3, \qquad (3.24)$$

постоянная $R_3$ в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $b_0(x)$, $N(x)$, $h_1(x,t)$ и $f_1(x,t)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

Оценки (3.22)–(3.24) в сумме и дают требуемую оценку (3.13).

Как уже говорилось выше, разрешимость в пространстве $V_1$ краевой задачи ($3.12_0$), (3.2), (3.3) и априорная оценка (3.13) дают разрешимость в пространстве $V$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.3). Покажем, что этот факт позволяет установить разрешимость обратной задачи 3.1 в требуемом классе.

Пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (3.12), (3.2), (3.3) из пространства $V$. Определим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\psi(t)} \Phi(u;t) - \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}. \qquad (3.25)$$

Очевидно, что функция $q(t)$ принадлежит пространству $L_\infty([0,T])$, и что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре $Q$ уравнением (3.1). Умножим уравнение (3.1) на функцию $N(x)$ с найденными функциями $u(x,t)$ и $q(t)$ и проинтегрируем по области $\Omega$. Условие (3.9) (единственное, которое до этого не использовалось) означает, что следствием полученного соотношения будет равенство

$$\int\limits_{\Omega} N(x) D_t^{2p} u(x,t)\,dx = 0,$$

в котором $t$ есть произвольная точка из интервала $(0,T)$. Из этого равенства и условий (3.3) вытекает, что для функции $u(x,t)$ — решения задачи (3.12), (3.2), (3.3) — выполняется условие переопределения (3.4).

Доказанное выше и означает, что найденные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дают решение обратной задачи 3.1 из требуемого класса. $\square$

### Разрешимость обратной задачи 3.2

Исследование разрешимости обратной задачи 3.2 проводится в целом вполне аналогично исследованию разрешимости обратной задачи 3.1. Отличие состоит лишь в том, что нельзя будет использовать лемму Гронуолла.

Ввиду очевидности и громоздкости ниже некоторые выкладки (основанные на интегрировании по частям, неравенствах Юнга и Гельдера, элементарных числовых и интегральных неравенствах, а также на неравенствах (3.7) и (3.20) будем опускать.

Перейдем непосредственно к исследованию разрешимости обратной задачи 3.2.

Приведем вначале два неравенства, которые будут использоваться ниже

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства $V$, для которой выполняются условия (3.5) и (3.6). Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_Q h_1(x,t) \left( \int\limits_\Omega \Delta N(y) D_t^{2p} u(y,t)\, dy \right) u(x,t)\, dx\, dt \right| \leq c_0 \int\limits_Q \left[ D_t^p u(x,t) \right]^2 \, dx\, dt, \tag{3.26}$$

число $c_0$ в котором определяется функциями $h_0(x,t)$ и $N(x)$, а также числом $T$.

Далее, имеет место также следующее неравенство

$$\left| \int\limits_Q h_1(x,t) \left( \int\limits_\Omega BN(y) u(y,t)\, dy \right) u(x,t)\, dx\, dt \right| \leq c_1 \int\limits_Q u^2(x,t)\, dx\, dt, \tag{3.27}$$

число $c_1$ в котором определяется лишь функциями $h_0(x,t)$ и $N(x)$.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполняются условия (3.9)–(3.11), а также условия*

$$b^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in C^p(\overline{Q}); \tag{3.28}$$

$$(-1)^{p+1}b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \overline{b}_1|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{b}_1 \geq 0; \tag{3.29}$$

$$(-1)^p b_0(x) \geq \overline{b}_0 \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.30}$$

$$1 + d_0(1 - c_0) \geq 0, \quad (\overline{b}_0 - c_1)d_0 + \overline{b}_1 \geq 0. \tag{3.31}$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.2 имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Вновь рассмотрим семейство уравнений $(3.12_\lambda)$ и соответствующее семейство задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* $(3.12_\lambda)$ *и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.5) и (3.6).*

Разрешимость краевой задачи $(3.12_0)$, (3.5), (3.6) в пространстве $V$ очевидна. Покажем, что для всевозможных решений $u(x,t)$ задачи выполняется оценка (3.13).

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \Big\{D_t^{2p}(u(x,t) - \Delta u(x,t)) + \lambda[Bu(x,t) - h_1(x,t)\Phi(u;t)]\Big\}\, u(x,t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_Q f_1(x,t)u(x,t)\, dx\, dt.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенства (3.26) и (3.27) и используя условия (3.29)–(3.31), нетрудно получить первую априорную оценку для решений $u(x,t)$ краевой задачи $(3.12_\lambda)$, (3.2), (3.5), (3.6):

$$\int\limits_Q \left\{ \left[D_t^p u(x,t)\right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[D_t^p u_{x_i}(x,t)\right]^2 \right\} dx\, dt \leq M_1, \tag{3.32}$$

постоянная $M_1$ в которой определяются функциями $h_0(x,t)$, $f_0(x,t)$ и $N(x)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \Big\{D_t^{2p}\left(u(x,t) - \Delta u(x,t)\right) + \lambda[Bu(x,t) - h_1(x,t)\Phi(u;t)]\Big\}\, \Delta u(x,t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_Q f_1(x,t)\Delta u(x,t)\,dx\,dt.$$

Выполняя интегрирование по частям, применяя аналог второго основного неравенства для пары двух эллиптических операторов ( [55], гл. III, § 8) и используя неравенство (3.32), получим, что для решений $u(x,t)$ задачи ($3.12_\lambda$), (3.26) , (3.5), (3.6) имеет место вторая априорная оценка:

$$\int\limits_Q \left[D_t^p \Delta u(x,t)\right]^2\,dx\,dt \leq M_2, \tag{3.33}$$

с постоянной $M_2$, определяющейся функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $b_0(x)$, $h_0(x,t)$, $f_0(x,t)$ и $N(x)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

Следующее равенство

$$\int\limits_\Omega \Big\{D_t^{2p}(u(x,t) - \Delta u(x,t)) + \lambda[Bu(x,t) - h_1(x,t)\Phi(u;t)]\Big\}\,D_t^{2p}u(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega f_1(x,t) D_t^{2p} u(x,t)\,dx$$

вместе с условиями теоремы и оценками (3.32) и (3.33) дает третью априорную оценку

$$\int\limits_\Omega \left\{\left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2 + \sum_{i=1}^n \left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\right\}dx \leq M_3, \tag{3.34}$$

число $M_3$ в которой вновь определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $b_0(x)$, $h_0(x,t)$, $f_0(x,t)$, $N(x)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

Последняя априорная оценка

$$\int\limits_\Omega \left[D_t^{2p}\Delta u(x,t)\right]^2\,dx \leq M_4, \tag{3.35}$$

очевидным образом теперь вытекает из самого уравнения ($3.12_\lambda$) и из оценок (3.32)–(3.35).

Оценки (3.32)–(3.35) и дают требуемую оценку (3.13). Как уже говорилось выше, из этой оценки и из разрешимости в пространстве $V$ краевой задачи ($3.12_0$), (3.2), (3.5), (3.6) следует разрешимость в этом же пространстве задачи ($3.12_1$), (3.2), (3.5), (3.6). Имея решение $u(x,t)$ задачи ($3.12_1$), (3.2), (3.5), (3.6) определим функцию $q(t)$ равенством (3.25). Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ будут связаны в цилиндре $Q$ уравнением (3.1). Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения (3.4) показывается так же, как показывалось выполнение этого же условия при доказательстве теоремы 3.1. Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна.

Все сказанное выше и означает, что найденные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дадут требуемое решение обратной задачи 3.2. □

### 3.1.3. Обратные задачи для аналогов уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява)

В настоящем пункте будет исследована разрешимость обратных задач 3.1 и 3.2, а также некоторых новых задач для уравнения (3.1) в случае $Bu = \beta_0 \Delta u + \beta_1 u$ ($\beta_i = const$). Уравнение (3.1) в этом специальном случае можно назвать непосредственным аналогом уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява).

**Обратная задача 3.3**: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (3.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (3.2) и (3.4), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p, \tag{3.36}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, p-1. \tag{3.37}$$

**Обратная задача 3.4**: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением (3.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (3.2), (3.4) и (3.36), а также условия*

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = p+1, \dots, 2p-1. \tag{3.38}$$

Обратные задачи 3.3 и 3.4 исходят в своих постановках из квазигиперболичности [46] оператора $L$. Специальный вид оператора $B$ позволит получить как теоремы существования, подобные теоремам 3.1 и 3.2, так и новые теоремы, причем новые теоремы существования можно будет получить и для обратных задач 3.1 и 3.2.

Положим

$$\gamma_0(T) = \left(\frac{\pi T^2}{8}\right)^{p-1}, \quad \gamma_1(T) = \frac{2|\beta_0|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1},$$

$$\gamma_2(T) = \sqrt{N_1} + \frac{2|\beta_1|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1} + \frac{2\sqrt{N_2}T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1}.$$

**Теорема 3.3.** *Пусть выполняются условие (3.10), а также условия*

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega));$$

$$(-1)^p\beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p\beta_1 \leq 0;$$

$$T\gamma_1(T) < 1, \quad T\gamma_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\gamma_1(T)\right).$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.3 имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения (3.12) и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.36) и (3.37).* Разрешимость этой задачи в пространстве $V$ нетрудно установить обычным для настоящей работы способом — с помощью теоремы о методе продолжения по параметру и априорных оценок. Схема применения метода продолжения по параметру — такая же, какая использовалась при доказательстве теоремы 3.1. Поскольку задача $(3.12_0)$, (3.2), (3.36), (3.37) разрешима в пространстве $V$, то тем самым для доказательства разрешимости задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37) достаточно показать, что для всевозможных решений

$u(x,t)$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37) имеет место априорная оценка (3.13).

Покажем, что требуемая оценка действительно имеет место.

Итак, пусть $u(x,t)$ есть решение из пространства $V$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36) . Для этой функции выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\Big[D_t^{2p}u(x,t)\Big]^2+\sum_{i=1}^{n}\Big[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\Big]^2\right\}dx=$$

$$=\beta_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}(x,t)D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\,dx-\beta_1\int\limits_{\Omega}u(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}h_1(x,t)\Phi(u;t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx+\int\limits_{\Omega}f_1(x,t)D_t^{2p}u(x,t)\,dx.$$

От этого равенства нетрудно перейти к неравенству

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\Big[D_t^{2p}u(x,t)\Big]^2+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\Big]^2\right\}dx\leq$$

$$\leq\frac{\delta_1^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\Big]^2\,dx+$$

$$+\left(\frac{\delta_2^2}{2}+\frac{\delta_3^2}{2}+\frac{N_1}{2\delta_3^2}+\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{\delta_5^2}{2}\right)\int\limits_{\Omega}\Big[D_t^{2p}u(x,t)\Big]^2\,dx+\frac{\beta_0^2}{2\delta_1^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,t)\,dx+$$

$$+\left(\frac{\beta_1^2}{2\delta_2^2}+\frac{N_2}{2\delta_4^2}\right)\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2\delta_5^2}\int\limits_{\Omega}f_1^2(x,t)\,dx,\tag{3.39}$$

в котором $\delta_1-\delta_5$ есть произвольные положительные числа.

Для функции $u(x,t)$ выполняются оценки

$$\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)\,dx\leq T\int\limits_{Q}(D_tu)^2\,dx\,dt,\tag{3.40}$$

$$\int\limits_{Q}(D_tu)^2(x,t)\,dx\,dt\leq\gamma_0(T)\int\limits_{Q}(D_t^pu)^2\,dx\,dt,\tag{3.41}$$

$$\int\limits_{Q}(D_t^pu)^2(x,t)\,dx\,dt\leq\frac{4T^2\gamma_0(T)}{(2p-1)^2}\int\limits_{Q}(D_t^{2p}u)^2\,dx\,dt.\tag{3.42}$$

Первая из этих оценок очевидна. Покажем справедливость второй оценки вначале для $p = 2$.

Имеют место равенства

$$D_t u(x,t) = \int\limits_0^t D_\tau^2 u(x,\tau)\, d\tau, \quad D_t u(x,t) = -\int\limits_t^T D_\tau^2 u(x,\tau)\, d\tau.$$

Эти равенства и неравенство Гельдера дают оценки

$$|D_t u(x,t)| \leq \sqrt{t} \left( \int\limits_0^T \left[ D_\tau^2 u(x,\tau) \right]^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|D_t u(x,t)| \leq \sqrt{T-t} \left( \int\limits_0^T \left[ D_\tau^2 u(x,\tau) \right]^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

из которых следует

$$\int\limits_Q [D_t u(x,t)]^2 \, dx\, dt \leq \int\limits_Q [D_t^2 u(x,t)]^2 \, dx\, dt \int\limits_0^T \sqrt{t(T-t)}\, dt =$$

$$= \frac{\pi T^2}{8} \int\limits_Q [D_t^2 u(x,t)]^2 \, dx\, dt.$$

Справедливость оценки (3.41) для $p = 2$ установлена. Переходя теперь от $p = 2$ к $p = 3$, и т.д., получим, что для всех натуральных чисел $p$ для решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36) выполняется оценка (3.1.41).

Для доказательства оценки (3.42) умножим уравнение $D^{2p} u = w$ на функцию $(T-t)D_t u$, затем полученное равенство проинтегрируем по цилиндру $Q$. Применяя формулу интегрирования по частям и используя условия (3.36) и (3.37), получим равенство

$$\frac{2p-1}{2} \int\limits_Q (D_t^2 u)^2 \, dx\, dt = \left| \int\limits_Q (T-t) D_t u \cdot D_t^{2p} u \, dx\, dt \right|.$$

Из этого равенства, неравенства Гельдера и неравенства (3.41) и вытекает оценка (3.42).

С помощью оценок (3.40)–(3.42) нетрудно продолжть неравенство (3.39):

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\right\}dx\leq$$

$$\leq\left(\frac{\delta_1^2}{2}+\frac{4\beta_0^2T^3\gamma_0^2(T)}{2\delta_1^2(2p-1)^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}\left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\,dx+$$

$$+\left(\frac{\delta_2^2}{2}+\frac{4\beta_1^2T^3\gamma_0^2(T)}{2\delta_2^2(2p-1)^2}+\frac{\delta_3^2}{2}+\frac{N_1}{2\delta_3^2}+\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{4N_2T^3\gamma_0^2(T)}{2\delta_4^2(2p-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_5^2}{2}\right)\int\limits_{Q}\left[D_t^{2p}u\right]^2\,dx\,dt+\frac{1}{2\delta_5^2}\int\limits_{\Omega}f_1^2(x,t)\,dx. \tag{3.43}$$

Зафиксируем числа $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ и $\delta_4$:

$$\delta_1^2=\frac{2|\beta_0|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1},\quad \delta_2^2=\frac{2|\beta_1|T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1},$$

$$\delta_3^2=\sqrt{N_1},\quad \delta_4^2=\frac{2\sqrt{N_2}T^{\frac{3}{2}}\gamma_0(T)}{2p-1}.$$

С учетом введенных выше обозначений и выбора чисел $\delta_1-\delta_2$ получим следствие (3.43):

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2\,dx\right)+\sum_{i=1}^{n}\max_{0\leq t\leq T}\left(\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\,dx\right)\leq$$

$$\leq T\gamma_1(T)\sum_{i=1}^{n}\max_{0\leq t\leq T}\left(\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\,dx\right)+$$

$$+\left[T\gamma_2(T)+\frac{\delta_5^2}{2}\right]\max_{0\leq t\leq T}\left(\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2\,dx\right)+\frac{1}{2\delta_5^2}\max_{0\leq t\leq T}\left(\int\limits_{\Omega}f_1^2(x,t)\,dx\right).$$

Из этого неравенства и из условий теоремы при выборе числа $\delta_5$ малым вытекает первая априорная оценка решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37):

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\left[D_t^{2p}u(x,t)\right]^2+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left[D_t^{2p}u_{x_i}(x,t)\right]^2\right\}dx\leq C_1, \tag{3.44}$$

в которой $t \in [0, T]$, число $C_1$ определяется числами $\beta_0$ и $\beta_1$, функциями $h_0(x,t)$, $f_0(x,t)$ и $N(x)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$.

Все следующие оценки легко выводятся теперь с помощью оценки (3.44). Действительно, анализируя последовательно равенства

$$\int\limits_Q \Big(D_t^{2p}(u - \Delta u) + Bu\Big)\,(T-t)\Delta u_t\,dx\,dt = \int\limits_Q (f_1 + h_1\Phi)\,(T-t)\Delta u_t\,dx\,dt$$

$$\int\limits_\Omega \Big[D_t^{2p}(u(x,t) - \Delta u(x,t)) + Bu(x,t)\Big]\,D_t^{2p}\Delta u(x,t)\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega [f_1(x,t) + h_1(x,t)\Phi(u;t)]\,D_t^{2p}\Delta u(x,t)\,dx,$$

применяя интегрирование по частям, используя неравенство Юнга и оценку (3.44), етрудно получить соответственно вторую и третью априорные оценки решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37):

$$\int\limits_Q \left[D_t^{p}\Delta u\right]^2 dx\,dt \le C_2, \tag{3.45}$$

$$\int\limits_\Omega \Big[D_t^{2p}\Delta u(x,t)\Big]^2 dx \le C_3, \tag{3.46}$$

постоянные $C_2$ и $C_3$ в которых определяется числами $\beta_0$ и $\beta_1$, функциями $h_0(x,t)$, $f_0(x,t)$ и $N(x)$, а также числом $T$ и областью $\Omega$. Из этих оценок, оценки (3.44), а также из неравенств (3.40)–(3.42) и следует требуемая оценка (3.13).

Как уже неоднократно говорилось ранее, из оценки (3.13) и теоремы о методе продолжения по параметру следует разрешимость в пространстве $V$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37).

Вновь определим функцию $q(t)$ с помощью формулы (3.25). Решение $u(x,t)$ краевой задачи (3.12), (3.2), (3.36), (3.37) и построенная функция $q(t)$ и дадут решение обратной задачи 3.3 из требуемого класса (что устанавливается так же, как устанавливался аналогичный факт при доказательстве теоремы 3.1). $\square$

Положим

$$\overline{\gamma}_0(T) = \left(\frac{T^2}{2}\right)^{p-1}, \quad \overline{\gamma}_1(T) = \frac{2|\beta_0|T^{\frac{3}{2}}\overline{\gamma}_0(T)}{2p-1},$$

$$\overline{\gamma}_2(T) = \sqrt{N_1} + \frac{2|\beta_1|T^{\frac{3}{2}}\overline{\gamma}_0(T)}{2p-1} + \frac{2\sqrt{N_2}T^{\frac{3}{2}}\overline{\gamma}_0(T)}{2p-1}.$$

**Теорема 3.4.** *Пусть выполняются условие (3.10), а также условия*

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega));$$

$$(-1)^p\beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p\beta_1 \leq 0;$$

$$T\overline{\gamma}_1(T) < 1, \quad T\overline{\gamma}_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\overline{\gamma}_1(T)\right).$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.4 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

Доказательство этой теоремы проводится вполне аналогично доказательству Теоремы 3.3 с тем лишь отличием что вместо неравенства (3.41) необходимо использовать неравенство

$$\int\limits_Q (D_t u)^2(x,t)\,dx\,dt \leq \overline{\gamma}_0(T)\int\limits_Q (D_t^p u)^2\,dx\,dt$$

(объясняется этот факт тем, что функции $D_t u$, …, $D_t^{p-1}u$ в обратной задаче 3.4 не обращаются в нуль при $t = T$).

### 3.1.4. Новые теоремы разрешимости обратных задач 3.1–3.4

Прежде чем перейти к доказательству новых теорем о разрешимости обратных задач 3.1–3.4, выполним некоторые преобразования.

Определим функции $\widetilde{f}_0(x,t)$ и $\widetilde{h}_0(x,t)$ как решения задач

$$\widetilde{f}_0 - \Delta\widetilde{f}_0 = f_0, \quad \widetilde{f}_0 = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$\widetilde{h}_0 - \Delta\widetilde{h}_0 = f_0, \quad \widetilde{h}_0 = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma$$

(переменная $t$ здесь является параметром). Пусть $G(x, \xi)$ есть функция Грина задачи Дирихле в области $\Omega$ для оператора $I - \Delta$. Тогда уравнение (3.1) можно записать в виде

$$D_t^{2p}u - \beta_0 u = \widetilde{f}_0(x,t) + \widetilde{h}_0(x,t)q(t) - (\beta_0 + \beta_1)\int\limits_\Omega G(x,\xi)u(\xi,t)\,d\xi. \quad (3.47)$$

Положим

$$\widetilde{\varphi}(t) = \int\limits_\Omega N(x)\widetilde{f}_0(x,t)\,dx, \quad \widetilde{\psi}(t) = \int\limits_\Omega N(x)\widetilde{h}_0(x,t)\,dx,$$

$$\widetilde{f}_1(x,t) = f_0(x,t) - \frac{\widetilde{\varphi}(t)h_0(x,t)}{\widetilde{\psi}(t)}, \quad \widetilde{h}_1(x,t) = \frac{(\beta_0+\beta_1)h_0(x,t)}{\widetilde{\psi}(t)}.$$

Далее определим для заданной функции $w(x,t)$ функцию $\widetilde{\Phi}(w;t)$:

$$\widetilde{\Phi}(w;t) = \int\limits_\Omega N(x)\left(\int\limits_\Omega G(x,\xi)w(\xi,t)\,d\xi\right)dx.$$

Умножая уравнение (3.47) на функцию $N(x)$, интегрируя, вычисляя далее функцию $q(t)$, получим с учетом введенных обозначений соотношение

$$D_t^{2p}(u - \Delta u) + \beta_0\Delta u + \beta_1 u = \widetilde{f}_1(x,t) + \widetilde{h}_1(x,t)\widetilde{\Phi}(u;t). \quad (3.48)$$

Это соотношение и определяет интегро–дифференциальное (нагруженное) уравнение, разрешимость соответствующих краевых задач для которого и даст разрешимость обратных задач 3.1–3.4.

**Теорема 3.5.** *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega));$$

$$|\widetilde{\psi}(t)| > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T].$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения (3.48) и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).* Разрешимость этой задачи в пространстве $V$ устанавливается обычным образом — с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок. Сами по себе априорные оценки легко выводятся с помощью техники, использованной при доказательстве теоремы 3.1; ключевым моментом в доказательстве необходимых априорных оценок является использование леммы Гронуолла.

Имея решение $u(x,t)$ задачи (3.48), (3.2) и (3.3), определим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{\beta_0 + \beta_1}{\widetilde{\psi}(t)} \widetilde{\Phi}(u;t) - \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{\widetilde{\psi}(t)}. \tag{3.49}$$

Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре $Q$ уравнением (3.47); применяя к этому уравнению оператор $I - \Delta$, получим, что для функций $u(x,t)$ и $q(t)$ в цилиндре $Q$ выполняется уравнение (3.1).

Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения (3.4) легко показывается с помощью умножения уравнения (3.47) на функцию $N(x)$, интегрирования по области $\Omega$ и использования представления (3.49). Принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дадут искомое решение обратной задачи 3.1. $\square$

Положим

$$\widetilde{N}_1 = \int\limits_\Omega N^2(x)\,dx \max_{0\le t\le T} \left( \int\limits_\Omega \widetilde{h}_1(x,t)\,dx \right).$$

**Теорема 3.6.** *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega));$$

$$|\widetilde{\psi}(t)| > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T],$$

$$(-1)^{p+1}\beta_0 \ge 0, \quad (-1)^p \beta_1 \ge 0;$$

$$\frac{(-1)^{p+1}\beta_0}{d_0} + (-1)^p\beta_1 - \widetilde{N}_1^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.2 имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Равенство

$$\int\limits_Q \left(D_t^{2p}(u-\Delta u) + \beta_0\Delta u + \beta_1 u\right) u\,dx\,dt = \int\limits_Q \left(\widetilde{f}_1 + \widetilde{h}_1\widetilde{\Phi}\right) u\,dx\,dt$$

дает оценку (3.32). Следующие оценки выводятся так же, как выводились соответствующие оценки при доказательстве теоремы 3.2. Наличие оценок (оценки (3.13)) стандартным (для настоящей работы) образом устанавливает разрешимость обратной задачи 3.2. □

Положим

$$\widetilde{N}_2 = \int\limits_\Omega N^2(x)\,dx \int\limits_Q (T-t)^2\widetilde{h}_1(x,t)\,dx\,dt.$$

**Теорема 3.7.** *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_2(Q);$$

$$|\widetilde{\psi}(t)| > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T],$$

$$(-1)^p\beta_0 \geq 0, \quad (-1)^{p+1}\beta_1 \geq 0;$$

$$\frac{2\left(\widetilde{N}_2 T\right)^{\frac{1}{2}}\gamma(T)}{2p-1} < 1.$$

*Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.3 имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

*Доказательство.* Равенство

$$\int\limits_Q \left(D_t^{2p}(u-\Delta u) + \beta_0\Delta u + \beta_1 u\right)(T-t)D_t u\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q} \left(\widetilde{f}_1 + \widetilde{h}_1 \widetilde{\Phi}\right)(T-t) D_t u \, dx \, dt$$

после интегрирования по частям и использования условий теоремы дает оценку (3.32). С помощью этой оценки выводятся все остальные требуемые оценки. Наличие оценок дает требуемую разрешимость обратной задачи 3.2.

□

**Теорема 3.8.** *Пусть выполняются все условия теоремы 3.7. Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ обратная задача 3.4 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.*

Доказательство этой теоремы очевидно.

**Дополнения и замечания**

Укажем на некоторые возможные обобщения полученных результатов.

1. Очевидно, что оператор Лапласа в уравнении (3.1) можно заменить более общим эллиптическим оператором второго порядка. Коэффициенты этого оператора а также коэффициенты оператора $B$ и функция $N(x)$ (в частности, и коэффициенты $\beta_0$ и $\beta_1$) вполне могут быть функциями, зависящими от переменных $x$ и $t$. В описанных ситуациях суть применяемой техники и полученных результатов не изменится, все выкладки будут отличаться лишь большей громоздкостью.

2. Методами, предложенными выше, вполне можно исследовать разрешимость обратных задач, подобных изученным выше, для уравнений вида (3.1) с заменой оператора Лапласа на эллиптический оператор произвольного порядка $2m$ (с добавлением естественных дополнительных граничных условий на поверхности $S$).

3. Некоторые из вышеприведенных условий можно ослабить. Так, от функции $N(x)$ достаточно потребовать, чтобы она принадлежала пространству $W_2^2(\Omega)$. Используя методы вариационного исчисления, можно уменьшить множитель $\gamma_0(T)$ в неравенстве (3.41) (связав его с собственными чис-

лами одномерного оператора Лапласа). 4. Единственность решений во всех рассматриваемых задачах раздела 3.1 очевидна - она вытекает из априорных оценок.

## 3.2. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной

Исследуется разрешимость линейных обратных задач для дифференциальных уравнений

$$Au_t + Bu = F(x,t), \tag{$*$}$$

$$Au_{tt} + Bu = F(x,t) \tag{$**$}$$

с операторами $A$ и $B$, действующими по пространственным переменным (точный вид этих операторов бедет приведен ниже).

Разрешимость краевых и начально-краевых задач для уравнений $(*)$ и $(**)$ представляется хорошо изученной - можно назвать монографии [24, 122]; что же касается журнальных статей, то их так много,что перечислить даже малую их часть весьма затруднительно.

Особенностью изучаемых в диссертационной работе задач является то, что в них неизвестная правая часть определяется некоторой функцией, зависящей лишь от пространственных переменных. Для уравнений $(*)$ и $(**)$ в ряде работ [36, 37, 86, 101] изучалась разрешимость линейных и нелинейных обратных задач в случае, когда неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) зависел (зависели) лишь от временной переменной. Что же касается случая, когда неизвестный коэффициент является функцией от пространственных переменных, то здесь можно назвать лишь работу [**?**], в которой изучались линейные обратные задачи пространственного типа для некоторых частных случаев уравнения $(**)$.

Одним из методов исследования линейных обратных задач является метод, основанный на переходе от исходной задачи к новой задаче для уравнения более высокого порядка, не содержащего неизвестных коэффициентов - см. [48,49,120]. Именно этот метод будет применяться в настоящем параграфе диссертационной работы, и именно он позволит получить существенно новые результаты для уравнений $(*)$ и $(**)$ с правой частью, содержащей неизвестный множитель, зависящий лишь от пространственных переменных.

Все построения и рассуждения в работе будут проводиться на основе пространств Лебега $L_p$ и Соболева $W_p^l$. Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [55, 88, 94, 114].

Уточним, что целью настоящей работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений для поставленных задач.

В работе будут изучаться дифференциальные уравнения $(*)$ и $(**)$ модельного вида. Некоторые обобщения и усиления полученных результатов будут представлены в конце работы.

**Постановка обратных задач**

Пусть $\Omega$ есть ограниченная область пространства $R^n$ с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть боковая граница $Q$. Далее, пусть $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, .., n$, $b_0(x), h(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T]$, $\triangle$ есть оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, .., x_n$, $B$ есть дифференциальный оператор, действие которого по заданной функции $v(x)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v,$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

**Обратная задача 3.5:** найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$\triangle u_t + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{3.50}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3.51}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3.52}$$

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3.53}$$

**Обратная задача 3.6:** найти функции $u(x,t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре $Q$ уравнением

$$\triangle u_{tt} + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{3.54}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (3.51) — (3.53), а также условия

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3.55}$$

В обратной задаче 3.5 условия (3.51) и (3.52) есть условия начально-краевой задачи для уравнения (3.50), называемого в некоторых источниках псевдопараболическим [85], условие же (3.53) есть условие переопределения, необходимость которого диктуется наличием дополнительной неизвестной функции $q(x)$.

В обратной задаче 3.6 условия (3.51), (3.52) и (3.55) можно трактовать как условия первой начально-краевой задачи для нестационарного уравнения (3.54), условие же (3.53) можно трактовать как условия переопределения. Можно и по иному трактовать условия обратной задачи 3.6.

**Разрешимость обратной задачи 3.5**

Всюду ниже будем считать выполненным условие

$$h(x,t) \geq h_0 > 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{3.56}$$

Определим функции $h_1(x,t), h_2(x,t)$ и $F(x,t,\xi,\eta)$ при $(x,t) \in \bar{Q}$, $\xi = (\xi_1,..,\xi_n) \in R^n$, $\eta \in R$:

$$h_1(x,t) = -\frac{h_t(x,t)}{h(x,t)},$$

$$h_2(x,t) = h_1(x,t)b_0(x) + \frac{1}{2}(b^{ij}(x)h_{1x_i}(x,t))_{x_j},$$

$$F(x,t,\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} h_{1x_i}(x,t)\xi_i\right)\eta + h_2(x,t)\eta^2.$$

Далее определим операторы $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 = h_1(x,t)\Delta + B,$$

$$C_2 = -(h_1(x,t)B - h_{1t}(x,t)\Delta).$$

**Теорема 3.9.** *Пусть выполняются условие* (3.56), *а также условия*

$$\begin{gathered} b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i,j = 1,..,n, \\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n; \end{gathered} \tag{3.57}$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{3.58}$$

$$\begin{gathered} h(x,t) \in C^3(\bar{Q}), \quad h_1(x,t) \leq 0, \quad h_{1t}(x,t) \leq 0, \\ h_2(x,t) \geq 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in Q; \end{gathered} \tag{3.59}$$

$$F(x,t,\xi,\eta) \geq \gamma_0 \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2, \quad \gamma_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \quad \xi \in R^n, \quad \eta \in R; \tag{3.60}$$

$$\begin{gathered} \textit{оператор} \quad C_1 \quad \textit{эллиптичен при} \quad (x,t) \in \bar{Q}, \\ \textit{оператор} \quad C_2 \quad \textit{эллиптико-параболичен в} \quad \bar{Q}. \end{gathered} \tag{3.61}$$

*Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача 3.5 имеет решение $\{u(x,t), q(x)\}$, для которого выполняются включения*

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad k=0,1,2, \quad q(x) \in L_2(Q).$$

*Доказательство.* Определим функцию $f_1(x,t)$:

$$f_1(x,t) = h(x,t)\left(\frac{f(x,t)}{h(x,t)}\right)_t.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$\triangle u_{tt} + C_1 u_t + h_1 B u = f_1(x,t) \tag{3.62}$$

*и такую, что для нее выполняются условия* (3.51)—(3.53). Покажем, используя метод продолжения по параметру [ [94], гл. III, § 14], что данная задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$ принадлежат пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

Пусть $\lambda$ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$\triangle u_{tt} + \lambda\left[C_1 u_t + h_1 B u\right] = f_1(x,t) \tag{$3.63_\lambda$}$$

*и такую, что для нее выполняются условия* (3.51)—(3.53). Как следует из теоремы о методе продолжения по параметру, эта задача будет иметь решение из указанного класса для всех чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$, если 1) задача ($3.63_0$), (3.51)—(3.53) имеет решение, принадлежащее требуемому классу; 2) для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи ($3.63_\lambda$), (3.51)—(3.53) при выполнении условий теоремы имеет место априорная оценка

$$\begin{gathered}\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \\ \|u_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \le R_0 \|f_1\|_{L_2(Q)}\end{gathered} \tag{3.63}$$

с постоянной $R_0$, определяющийся лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,..,n$, $b_0(x)$, $h(x,t)$, областью $\Omega$ и числом $T$.

Выполнение пункта 1) очевидно. Покажем, что для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи $(3.63_\lambda)$, (3.51)—(3.53) действительно имеет место требуемая оценка.

Умножим уравнение $(3.63_\lambda)$ на функцию $u(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру $Q$. После несложных преобразований с использованием условий (3.57)—(3.60) придем к оценке

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q} u_{x_i t}^2 dxdt \leq R_1 \int\limits_{Q} f_1^2 dxdt \tag{3.64}$$

с постоянной $R_1$, определяющейся лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(x,t)$.

На следующем шаге умножим уравнение $(3.63_\lambda)$ на функцию $-C_1 u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру $Q$. Полученное равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\int\limits_{Q} \Delta u_t C_1 u_t dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q} h_{1tt}(\Delta u)^2 dxdt + \int\limits_{Q} C_1 u C_2 u dxdt = -\int\limits_{Q} f_1 C_1 u dxdt. \tag{3.65}$$

Поскольку оператор $C_1$ эллиптичен в $Q$, то первое слагаемое левой части (3.65) можно преобразовать, используя технику доказательства второго основного неравенства для эллиптических операторов [55]; учитывая дополнительную оценку (3.64), придем к неравенству

$$\int\limits_{Q} \Delta u_t C_1 u_t dxdt \geq R_2 \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q} u_{x_i x_j t}^2 dxdt - R_3, \tag{3.66}$$

постоянные $R_2$ и $R_3$ в котором положительны и определяются лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(x,t)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Преобразуем аналогичным образом третье слагаемое левой части (3.65), учитывая, что оператор $C_2$ эллиптично-параболичен в $\bar{Q}$, применяя теоремы вложения и оценку (3.64) получим, что справедливо неравенство

$$\int\limits_Q C_1 u C_2 u dxdt \geq I - \delta \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q u^2_{x_i x_j t} dxdt - M(\delta), \tag{3.67}$$

в котором $I$ есть некоторый неотрицательный интеграл, $\delta$ есть произвольное положительное число, число же $M(\delta)$, помимо числа $\delta$, определяется также функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Неравенства (3.66) и (3.67) вместе с выбором числа $\delta$ малым означают, что следствием равенства (3.65) будет вторая априорная оценка решений $u(x,t)$ краевой задачи ($3.63_\lambda$), (3.51)—(3.53):

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q u^2_{x_i x_j t} dxdt \leq R_4 \int\limits_Q f_1^2 dxdt; \tag{3.68}$$

постоянная $R_4$ здесь вновь определяется лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Из оценок (3.64) и (3.68) вытекает очевидная третья оценка решений $u(x,t)$ краевой задачи ($3.63_\lambda$), (3.51)—(3.53):

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q u^2_{x_i x_j tt} dxdt \leq R_5 \int\limits_Q f_1^2 dxdt; \tag{3.69}$$

постоянная $R_5$, как и постоянные $R_1 - R_4$, определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также областью $\Omega$.

Оценки (3.64), (3.68) и (3.69) и дают в целом требуемую оценку (3.63). Как уже говорилось выше, из этой оценки следует, что краевая задача ($3.63_\lambda$), (3.51)—(3.53) будет разрешима в требуемом классе для всех чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$. Но тогда и задача (3.62), (3.51)—(3.53) будет иметь решение $u(x,t)$, также принадлежащее требуемому классу.

Уравнение (3.62) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{h}(\Delta u_t + Bu) - \frac{f}{h}\right) = 0.$$

Интегрируя, получим равенство

$$\Delta u_t(x,t) + Bu(x,t) = f(x,t) + h(x,t)q(x), \tag{3.70}$$

в котором $q(x)$ есть функция

$$q(x) = \frac{1}{h(x,0)}[\Delta u_t(x,0) - f(x,0)].$$

Принадлежность функции $q(x)$ пространству $L_2(\Omega)$ очевидна. Уравнение (3.70) и означает, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$ представляют собой искомое решение обратной задачи 3.5. $\square$

**Разрешимость обратной задачи 3.6**

Исследование разрешимости обратной задачи 3.6 будет проведено в целом по той же схеме, по какой было проведено исследование разрешимости обратной задачи 3.6.

Пусть для коэффициентов $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ оператора $B$ выполняются условия гладкости теоермы 3.9, и пусть $\beta_0$ есть фиксированное число, $v(x)$ есть функция из пространства $W_2^2(\Omega)\bigcap \dot{W}_2^1(\Omega)$. Используя простейшие алгебраические неравенства, а также применяя второе основное неравенство для эллиптических операторов, нетрудно показать, что для функции $v(x)$ имеет место оценка

$$\|Bv - \beta_0 \triangle v\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta_1 \|\triangle v\|_{L_2(\Omega)} + \beta_2 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{3.71}$$

в которой числа $\beta_1$ и $\beta_2$ определяются функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$ и $b_0(x)$, а также числом $\beta_0$ и областью $\Omega$.

Оценка (3.71) нам понадобится для доказательства разрешимости обратной задачи 3.6.

В дальнейшем будем считать, что функция $h$ зависит лишь от переменной $t$; общий случай $h = h(x,t)$ будет отличаться от рассмотренного большей громоздкостью условий и выкладок.

Через $\nu = (\nu_1,..,\nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к $\Gamma$ в текущей точке.

**Теорема 3.10.** *Пусть выполняются условие* (3.56), *а также условия*

$$\begin{gathered} b^{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i, j = 1, .., n, \\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n; \end{gathered} \tag{3.72}$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{3.73}$$

$$\begin{gathered} h \equiv h(t) \in C^3([0, T]), \quad (T-t)h_1(t) \leq -\tfrac{1}{2}, \\ ((T-t)h_1(t))_{tt} \leq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0, T]; \end{gathered} \tag{3.74}$$

*а также одно из условий*

$$b^{ij}(x)\nu_i\nu_j = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma \tag{3.75}$$

*или*

*для оператора* $B$ *существует число* $\beta_0$ *из промежутка* $(-\infty; 0]$ *такое, что для числа* $\beta_1$*, определенного в* (3.71)*, выполняется неравенство*

$$\frac{3}{2} + (T-t)h_1(t) - \frac{T^2\beta_1}{\pi} \geq 0. \tag{3.76}$$

*Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$ , $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ *обратная задача 3.6 имеет решение* $\{u(x,t), q(x)\}$ *такое, что*

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

*Доказательство.* . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения

$$\triangle u_{ttt} + h_1 \triangle u_{tt} + Bu_t + h_1 Bu = f_1(x,t) \tag{3.77}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.51)—(3.53) и (3.55). Разрешимость этой задачи вновь будет установлена с помощью метода продолжения по параметру.

Для чисел $\lambda$ из отрезка $[0, 1]$ рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в цилиндре* $Q$ *решением уравнения*

$$\triangle u_{ttt}+\lambda\left[h_1\triangle u_{tt}+Bu_t+h_1Bu\right]=f_1(x,t) \tag{$3.78_\lambda$}$$

*и такую, что для нее выполняются условия* (3.51)—(3.53) *и* (3.55). При $\lambda=0$ эта задача имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)$ и все ее производные по переменной $t$ до третьего порядка включительно существуют и принадлежат пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Покажем, что для произвольных регулярных решений задачи ($3.78_\lambda$), (3.51)—(3.53) и (3.55) имеют место необходимые априорные оценки.

Умножим уравнение ($3.78_\lambda$) на функцию $(T-t)u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру $Q$. После несложных преобразований получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\left[\tfrac{3}{2}+\lambda(T-t)\right]u_{x_it}^2dxdt-\lambda\int\limits_Q\left[\tfrac{1}{2}+(T-t)h_1(t)\right]b^{ij}u_{x_i}u_{x_j}dxdt-$$
$$\tfrac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\left[(T-t)h_1(t)\right]_{tt}u_{x_i}^2dxdt+\lambda\int\limits_Q\left[\tfrac{1}{2}+(T-t)h_1(t)\right]b_0u^2dxdt=$$
$$\int\limits_Q(T-t)f_1udxdt.$$

Используя условия (3.72)—(3.74) и применяя неравенство Юнга, нетрудно получить первую априорную оценку решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.77), (3.51)—(3.53) и (3.55):

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_it}^2dxdt\le N_1\int\limits_Q f_1^2dxdt \tag{3.78}$$

с постоянной $N_1$, определяющейся лишь функцией $h(t)$ и числом $T$.

На следующем шаге умножим уравнение ($3.78_\lambda$) на функцию $-(T-t)\triangle u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру $Q$. Получим равенство

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\left[\tfrac{3}{2}+(T-t)h_1(t)\right](\triangle u_t)^2dxdt-\\ \tfrac{1}{2}\int\limits_Q\left[(T-t)h_1(t)\right]_{tt}(\triangle u)^2dxdt-\int\limits_Q(T-t)Bu_t\triangle udxdt-\\ \int\limits_Q(T-t)h_1(t)Bu\triangle udxdt=-\int\limits_Q(T-t)f_1\triangle udxdt.\end{gathered} \tag{3.79}$$

Пусть выполняется условие (3.75). Тогда третье слагаемое $I_3$ левой части (3.79) преобразуется к виду

$$I_3 = -\frac{1}{2} \int\limits_Q b^{ij} u_{x_i x_k} u_{x_j x_k} dxdt$$

(появляющиеся при интегрировании по частям граничные интегралы будут равны нулю вследствие условия характеристического вырождения (3.75) и условий (3.52) и (3.53)), и тем самым будет представлять собой неотрицательную величину. Далее, четвертое слагаемое левой части (3.79) преобразуется к сумме неотрицательной величины и величины, являющейся ограниченной вследствие оценки (3.78). Учитывая далее условия теоремы и применяя неравенство Юнга, получим, что при выполнении условия (3.75) из равенства (3.79) вытекает оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt \leq N_2 \int\limits_Q f_1^2 dxdt, \tag{3.80}$$

постоянная $N_2$ в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, .., n$, $b_0(x)$ и $h(t)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Пусть теперь выполняется условие (3.76). Для интеграла $I_3$ выполняется равенство

$$I_3 = -\frac{\beta_0}{2} \int\limits_Q (\triangle u)^2 dxdt - \int\limits_Q (T-t)(Bu_t - \beta_0 \triangle u_t) \triangle u dxdt.$$

Первое слагаемое правой части данного равенства неотрицательно, второе же нетрудно оценить с помощью неравенства Гельдера, неравенства

$$\int\limits_0^T v^2(t) dt \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^T v_t^2(t) dt,$$

справедливого для любой функции $v(t)$ из пространства $\dot{W}_2^1([0,T])$, а также неравенства (3.71) и оценки (3.78):

$$\left| \int\limits_Q (T-t)(Bu_t - \beta_0 \triangle u_t) \triangle u dxdt \right| \leq \frac{T^2 \beta_1}{\pi} \int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt + N_3 \left( \int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(число $N_3$ здесь определяется лишь числом $N_1$, областью $\Omega$ и числом $T$).

Проведенные выше рассуждения и выкладки, а также условие (3.76) означают, что следствием равенства (3.79) будет оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt \leq N_2' \int\limits_Q f_1^2 dxdt \tag{3.81}$$

с постоянной $N_2'$, определяющейся функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$ и $h(t)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Последняя оценка

$$\int\limits_Q (\triangle u_{ttt})^2 dxdt \leq N_4 \int\limits_Q f_1^2 dxdt \tag{3.82}$$

очевидным образом вытекает из оценок (3.78), (3.80) и (3.81), а также из неравенства

$$\int\limits_Q (\triangle u_{tt})^2 dxdt \leq \delta \int\limits_Q (\triangle u_{ttt})^2 dxdt + C(\delta) \int\limits_Q (\triangle u_t)^2 dxdt,$$

в котором $\delta$ есть произвольное положительное число.

Оценки (3.78), (3.80) и (3.81), а также (3.82) дают окончательную оценку

$$\sum_{k=0}^{3} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq N_0 \|f_1\|_{L_2(Q)}, \tag{3.83}$$

постоянная $N_0$ в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,..,n$, $b_0(x)$, $h(t)$, а также областью $\Omega$ и числом $T$.

Из оценки (3.83) и теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (3.77), (3.51)—(3.53), (3.55) имеет решение $u(x,t)$, для которого выполняется оценка (3.83). Повторяя далее рассуждения из доказательства теоремы 3.9, получим, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$, определенная равенством

$$q(x) = \triangle u_{tt}(x,0) - f(x,0),$$

и дадут требуемое решение обратной задачи 3.6. $\square$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в работе результаты представляют собой новые результаты о разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Исследованы линейные обратные задачи для псевдопараболических уравнений с одним и двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдопараболических уравнений;

2. Исследованы линейные обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдогиперболических уравнений;

3. Получены условия однозначной разрешимости линейных обратных задач для параболических уравнений с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида. При этом обратная задача сведена к начально-краевой задаче для псевдопараболического уравнения, которая также была исследована;

4. Исследованы вопросы разрешимости линейных обратных задач для уравнения Буссинеска-Лява временного и пространственного типов в одномерном случае. При этом применялись точечные и интегральные условия переопределения;

5. Исследованы вопросы разрешимости обратных задач для уравнений соболевского типа высокого порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной в многомерном случае. Использовались условия переопределения точечного и интегрального вида. В специальном

случае эти задачи были сведены к уравнению распространения продольных волн (Буссинеска-Лява) и также получены условия их разрешимости;

6. Исследованы вопросы разрешимости обратных задач для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной в многомерном случае. Использовались финальные условия переопределения.

Область применения полученных результатов – обратные задачи для уравнений соболевского типа и теория нелокальных краевых задач. Полученные результаты позволят перейти к изучению новых обратных задач, обобщить и систематизировать исследования в данной области.

# ЛИТЕРАТУРА


1. Аблабеков Б. С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка / Б.С. Аблабеков. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 300 с.
2. Аблабеков Б. С., Молдоярова У. Обратные задачи для псевдогиперболического уравнения / Б.С. Аблабеков, У. Молдоярова // Вестник Кыргызского гос. нац. ун-та. Сер. естественно-техн. наук. – 1998. – Вып. 1. – С. 170-174.
3. Алексеев А. С. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли / А. С. Алексеев и др. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2010. – 310 с.
4. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988 г. – 280 с.
5. Аниконов Ю. Е. Обратные задачи математической физики и биологии / Ю.Е. Аниконов // Доклады академии наук СССР. – 1991. – Т. 318. – № 6. – С. 1350-1354.
6. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Ю. Е. Аниконов. — Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.
7. Аниконов Ю. Е. Некоторые вопросы аналитической теории идентификации / Ю. Е. Аниконов. – Новосибирск: ИМ, 2013. – 19 с.
8. Аниконов Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – С. 45-63.
9. Асанов А. А., Атаманов Э. Р. Обратная задача для операторного интегродифференциального псевдопараболического уравнения / А. А.

Асанов, Э. Р. Атаманов // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36,– №4. – С. 752–762.

10. Атаманов Э. Р., Мамаюсупов М. Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений / Э. Р. Атаманов, М. Ш. Мамаюсупов. – Фрунзе: Илим. – 1990. – 124 с.
11. Баренблатт Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 25, вып. 5. – С. 852-864.
12. Безнощенко Н. Я. Обратные задачи для уравнений параболического типа. В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики / Н. Я. Безнощенко, А. И. Прилепко. – М.: Наука, 1977. – С. 51 — 63.
13. Белов Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. – 236 с.
14. Белов Ю. Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – № 5. – С. 583 — 585.
15. Бубнов Б. А. О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Б. А. Бубнов. – Новосибирск, 1988. – 287 с.
16. Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — 184 с.
17. Васин В. В. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач / В. В. Васин, В. П. Танана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – Т. 15. – № 1. – С. 19 – 29.
18. Васин И. А. Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений / И. А. Васин, В. Л. Камынин // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 4. – С. 750 – 766.

19. Гальперн С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С.А. Гальперн // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 119, № 4. – С. 640-643.

20. Гулиева А. М. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями: автореф. дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02 / А. М. Гулиева. – Баку, 2010. – 21 с.

21. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 456 с.

22. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений / Г. В. Демиденко // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56. – № 6. – С. 1289–1303.

23. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

24. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, У.А. Уткина – Казань: Казанский ун-т, 2014. – 385 с.

25. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н.И. Иванчов // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 4. – С. 547–564.

26. Икези Х. Экспериментальное исследование солитонов в плазме // Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – С. 163-184.

27. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференц.уравнения, 1997 — Т. 13 — №2. — С.294-304.

28. Искендеров А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений / А. Д. Искендеров // Изв. АН АзССР, Сер. физ-техн. и мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 58 - 63.

29. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С. И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
30. Камынин В. Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с условием финального переопределения / В. Л. Ка- мынин // Мат. заметки. – 2003. – Т. 72. – № 2. – С. 217 — 227.
31. Касымалиева А.А. Обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Бишкек, —2014.
32. Клибанов М. В. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / М. В. Клибанов // Матем. заметки, 1991. — Т.30. — вып.2. — С.203-210.
33. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения / А. Б. Костин // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 10. – С. 3 – 46.
34. Кожанов А. И. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений / А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина // Докл.АН, 2009. — №404. — С.589-592.
35. Кожанов А. И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа / А. И. Кожанов // Вестник НГУ. Серия Математика, механика, информатика. – 2008.– Т.8. Вып.2. – С. 81-99.
36. Кожанов А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа / А. И. Кожанов // Вестник Южно-Уральского гос. университета. – 2008. – Вып.1. – С. 27-36.
37. Кожанов А. И. О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов // Научные

ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика.– 2010. – № 5. – Вып.18. – С. 88-98.

38. Кожанов А. И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении / А. И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т.23. – №4. – С. 31–45.
39. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А. И. Кожанов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44. – № 4. – С. 694 – 716.
40. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера / А.И. Кожанов // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 769–774.
41. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. – 2004, – Вып. 30. – С. 63–69.
42. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче / А.И. Кожанов // Мат. заметки. – 2004, Т. 76. – Вып. 6. – С. 840–853.
43. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 3(62). – С. 165–174.
44. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка / А.И. Кожанов // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 427, № 6. – С. 747–749.
45. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе-Самарского для линейных гиперболических уравнений

/ А.И. Кожанов // Доклады Академии Наук. – 2010. – Т. 432, № 6. – С. 738–740.

46. Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений. Математические заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 403–412.

47. Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р. Определение параметров в телеграфном уравнении / А. И. Кожанов, Р. Р. Сафиуллова // Уфимский математический журнал. – 2007. – Т.9. – №1. – С.63-74.

48. Кириллова Г.А. Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка. Автореф. … дис. канд. ф.-м. Наук. – Стерлитамак, 2004. – 20 с.

49. Акимова Е.В., Кожанов А.И. Линейные обратные задачи пространственного типа для квазипараболических уравнений. Мат. заметки СВФУ, 2018. Том 25, № 3.

50. Копачевский Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Симферополь: Таврический национальный университет, 2012.

51. Курманбаева А. К. Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений: диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.02 / А. К. Курманбаева. – Бишкек, 2002. – 84 с.

52. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962. – 96 с.

53. Лаврентьев М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск: Наука, 1969. – 66 с.

54. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.

55. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / – М.: Наука, 1973.
56. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
57. Лонгрен К. Экспериментальные исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией / К. Лионс // Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – С. 138-162.
58. Любанова А. Ш. Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А. Ш. Любанова // Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54. – № 6. – С. 1315-–1330.
59. Мегралиев Я. Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява с дополнительным интегральным условием / Я. Т. Мегралиев // Сиб. журн. индустр. мат. – 2013. – Т. 16. – №1. – С. 75-83.
60. Мегралиев Я. Т. Ализаде Ф. Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска с интегральным условием / Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде // Чебышевский сборник – 2013. – Т. 14. – Вып. 4. – С. 167-179.
61. Намсараева Г. В. Нелокальные и обратные задач для некоторых классов псевдопараболических уравнений / Г.В. Намсараева // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.): Тез. докладов / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск, 2013. – С. 200.
62. Намсараева Г. В. О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений / Г.В. Намсараева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т.20. № 2. – С. 111-137.
63. Намсараева Г. В. Разрешимость обратных задач для некоторых классов псевдопараболических уравнений / Г.В. Намсараева // Методы

создания, исследования и идентификации математических моделей. Международная научная конференция, посвященная 85-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева (Новосибирск, 10–13 окт. 2013 г.): Тез. докл. / Сибирское научное издательство. – Новосибирск, 2013. – С. 64-65.

64. Намсараева Г. В. Разрешимость обратной задачи для одного псевдогиперболического уравнения / Г.В. Намсараева // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы V Международной конференции.Изд-во ВСГУТУ – Улан-удэ: , – 2014. – С. 229-235.

65. Намсараева Г. В. Об обратных задачах для некоторых дифференциальных уравнений / Г.В. Намсараева // VII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. / Под редакцией д.ф.-м.н. И.Е. Егорова, д.ф.-м.н. Ф.М. Федорова - Якутск: ООО "Компания "Дани-Алмас 2014. - с. 50-51.

66. Намсараева Г. В. Об одной обратной задаче для линейного псевдогиперболического уравнения. Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа: материалы семинара молодых ученых в рамках V Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование 19-28 июня 2014 г. - Улан-Удэ: издательско-полиграфический комплекс ФГБОУ ВПО ВСГАКИ, 2014. - С. 86-90.

67. Намсараева Г. В. Разрешимость обратных задач для некоторых псевдогиперболических уравнений. Вестник ВСГУТУ. - Улан-удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2014.

68. Намсараева Г. В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска / Г.В. Намсараева // Математические заметки СВФУ. –2014. – Т.21, № 2. – С. 47-59.

69. Намсараева Г. В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска / Г. В. Намсараева // Международная конфе-

ренция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование»: Тезисы докладов / под ред. д. ф.-м.н. А.И. Кожанова, к. ф.-м. н. Б.Б.Ошорова – Улан-Удэ: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2015. – С. 200-201.

70. Намсараева Г. В. Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн / Г. В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 3. С. 28-40.
71. Намсараева Г. В. О задаче восстановления граничных режимов для уравнения Буссинеска / Г. В. Намсараева // Соболевские чтения. Международная школа-конференция (Новосибирск, 18-22 декабря 2016 г.): Тез. докладов. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. С. 126.
72. Кожанов А. И., Намсараева Г. В. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Челяб. физ.-мат. журн. – Челябинск, 2018. – Т.3, выпуск 2. – С. 153–171.
73. Кожанов А. И., Намсараева Г. В. Уравнения соболевского типа с неизвестной правой частью / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. – № 4. – С. 34–47.
74. Кожанов А.И., Намсараева Г.В. Исследование разрешимости задач определения внешнего воздействия комбинированного типа в процессах, описываемых параболическими уравнениями / А.И. Кожанов, Г. В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. матем. 2024. –Т.27, № 2. С. 66-79.
75. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

76. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высшая школа, 1995.
77. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
78. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2012.
79. Попов Н. С. Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений: автореф. дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02 / Н. С. Попов. – Казань, 2015. – 20 с.
80. Пятков С. Г. Некоторые обратные задачи для параболических уравнений / С. Г. Пятков // Фундамент. и прикл. матем. – 2006. – Т. 12. – № 4. – С. 187 – 202.
81. Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений / В. Г. Романов. – Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 1973. – 252 с.
82. Романов В. Г. Устойчивость в братных задачах / В. Г. Романов. – М.: На- учный мир, 2005. – 304 с.
83. Саватеев Е. Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения / Е. Г. Саватеев // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 177–185.
84. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
85. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Б. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.
86. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М.О. Корпусов. - М.: Либроком, 2011.

87. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1954. – Т. 18. – С. 3-50.

88. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.

89. Солдатов А. П. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка / А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297, № 3. – С. 547–551.

90. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка / А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547-551.

91. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для вузов по спец. Прикладная математика / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 3-е изд., испр. – Москва: Наука, 1986. – 287 с.

92. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151. – ќ 3. –С. 501 – 504.

93. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

94. Треногин В. А. Функциональный анализ / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980. – 496 с.

95. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 638 с.

96. Уткина Е. А. Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве / Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 3. – С. 50–55.

97. Уткина Е. А. Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки / Е.А. Уткина // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 535–539.

98. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка / Е. А. Уткина // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 4. – С. 400–404.

99. Фроленков И. В., Кригер Е. Н. Об одной задаче идентификации функции источника специального вида для многомерного параболического уравнения с данными Коши // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2013. – Т. 6. – № 2. – С. 186–199.

100. Шергин С. Н., Пятков С. Г. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С. Н. Шергин, С. Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. –2014. – Т.21, № 2. – С. 106–130.

101. Шергин С. Н. Обратные задачи для математических моделей соболевского типа / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 75-89

102. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.

103. Anikonov Yu.E. Inverse and Ill-Posed Sources Problems / Yu. E. Anikonov, B. A. Bubnov, G. N. Erokhin. – Utrecht: VSP. – 1997. – 239 p.

104. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / – Utrecht: VSP, 2002. – 211p.

105. Cannnon J. R. Determination of a parameter p(t) in some quasi-linear parabolic differential equations / J. R. Cannnon, Y. Lin // Inverse Problems. — 1988. — V.4. — №1. — P.35-45.

106. Colton D. Pseudo-parabolic equations in one space variable / D. Colton. // J. Diff. Equ. – 1972. – V. 12. – № 3. – P. 559-565.

107. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. — Springer Science. — 2006. — 343p.

108. Isakov V. Inverse parabolic problems with final overdetermination / V. Isakov // Comm.Pure Appl. Math. — 1991. — V.54. — P. 185-209.

109. Lesnic D. Inverse problems with applications in science and engineering // Taylor and Francis Group, LLC, 2022. – 359 p.

110. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudoparabolic integrodifferential operator equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 1997. – V. 5. – P. 235–253.

111. Lyubanova A. Sh. On the approximation of a parabolic inverse problem by pseudoparabolic one // Журн. сиб. федерального ун-та. Сер. Математика и физика. 2012. V. 5, N 3. P. 326–336.

112. Lyubanova A. Sh., Tani A. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity // Appl. Anal. 2011. V. 90. P. 1557–1571.

113. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. Mathematical Studies. Monograph Series, vol.10. V NTL Publishers, 2003.

114. Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Amsterdam. New York: North-Holland Pub. Co., 1978.

115. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. - Marcel Dekker, Inc., New-York, 1999. - 336 p.

116. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equations. J.Inverse and Ill-posed Problems. 2004. V12, №4. P.387-395.

117. Lorenzi A., Mola G. Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Problems Imaging. 2011. V.5, N 3. P.695-714.

118. Mola G. Reconstruction of two constant coefficients in linear anisotropic diffusion model // Inverse Problems. 2016. V.32. P.22.

119. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH Co. KG, 2012.

120. Kozhanov A.I. Questions of posing and solvability of linear inverse problems for elliptic equations. J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1997. V.5, N 4. P. 337-352.

121. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov – Utrecht: VSP, 1999. – 171 p.

122. Prilepko A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. 709 p.

123. Pyatkov S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems. Utrecht: VSP, 2002.

124. Rossby C.G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action / C.G. Rossby // J. Marine Res. - 1939. - Vol. 2, № 1. -P. 38-55.

125. Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. V. 10. P. 231–242.

126. Showalter R.E. Homogenization of a pseudoparabolic system / R.E. Showalter, M. Peszynska, Yi Son-Young // Applicable Analysis. - 2009. - Vol. 88, № 9. -P. 1265-1282.

127. Showalter R.E. Local regularity of solutions of sobolevgalpern partial differential equations / R.E. Showalter // Pacific journal of mathematics. - 1970. -Vol. 34, № 3. - P. 781-787.

128. Showalter R.E. A Nonlinear Parabolic-Sobolev Equation / R.E. Showalter // Journal of mathematical analysis and application. - 1975. - Vol. 50. - P. 183-190.

129. Showalter R.E. Pseudoparabolic Partial Differentail Equations / R.E. Showalter, T.W. Ting // Siam j. Math. Anal. - 1970. - Vol. 1, № 1. - P. 1-26.

130. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk , V.E. Fedorov - Utrecht: VSP, 2003. - 226 p.

131. Tikhonov A. N. Solutions of Ill-Posed Problems / A. N. Tikhonov. – New York: Winston, 1977. – 272 p.

132. Wang W. Two-dimensional parabolic inverse source problem with final overdetermination in reproducing kernel spase / W. Wang, M. Yamamoto, B. Han // Chinese Annals of Mathimatics. Series B. — 2014. — V. 35. — P. 469-482.