Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет"

На правах рукописи

Артюшин Александр Николаевич

Метод априорных оценок для уравнений с дробными производными

Специальность 1.1.2
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Кожанов Александр Иванович

Новосибирск — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В последние годы наблюдается практически взрывной рост числа публикаций на тему дробных производных. С прикладной точки зрения дробные производные присутствуют во многих моделях физики, биологии, механики (см. работы А. М. Нахушева, В. В. Учайкина, Ю. А. Россихина, М. В. Шитиковой, F. Mainardi, R. Hilfer и др.). С теоретической точки зрения дробные производные представляют собой достаточно трудный математический объект со специфическими свойствами. В известных монографиях А. М. Нахушева, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева представлен, в основном, базовый технический аппарат работы с дробными производными и их основные свойства. Аналитические методы решения и анализа краевых задач представлены в книгах А. В. Псху, М. О. Мамчуева. Однако большое количество задач не поддается исследованию такими методами. К таким можно отнести задачи с переменными коэффициентами, коэффициентные и иные обратные задачи, задачи с нелинейными членами и др. Все они нуждаются в дальнейшем изучении.
Степень разработанности темы. Идея дифференцирования нецелого порядка связана с именами Г. Лейбница, Л. Эйлера, П. Лапласа, Ж. Фурье. Среди первых работ на тему дробного интегрирования и дифференцирования были работы Н. Абеля и Ж. Лиувилля, Б. Римана. Дальнейшее развитие теория получила в работах А. Грюнвальда, А. В. Летникова, Н. Я. Сонина, Г. Харди, Д. Литтлвуда, М. Рисса и др. Среди авторов последнего времени отметим М. В. Шитикову, А. В. Псху (с учениками), В. Е. Федорова (с учениками), М. В. Плеханову (с учениками), М. О. Мамчуева, С. М. Ситника, Э. Л. Шишкину, R. Zacher, M. Yamomoto, E. Bazhlekova и др.

Интегральные неравенства с дробными производными (и даже более общими сверточными интегралами) известны достаточно давно (O. Staffans, H. Engler, G. Gripenberg). Они с успехом применялись при исследовании различных моделей вязкоупругости. Впоследствии многократно переоткрывались разными авторами (А. А. Алиханов, М. И. Гомоюнов, А. Н. Артюшин и др). Эти неравенства (и их обобщения) лежат в основе метода априорных оценок.

Разрешимость задачи Коши (типа Коши) для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто хорошо известна (см. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, I. Podlubny, K. Diethelm,

A. Kochubei, Y. Luchko). Для задач с липшицевой нелинейностью существует глобальное единственное решение. В случае монотонной нелинейности можно применять технику верхних и нижних решений (V. Lakshmikanthama, A.S. Vatsalab), а также интегральные неравенства (M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J-C. Yao). Вырождающиеся уравнения рассматривались только в ряде простых случаев. Вырождающиеся уравнения с монотонной нелинейностью, по-видимому, не рассматривались.

Уравнение дробной диффузии рассматривалось многими авторами. Построено фундаментальное решение задачи Коши (С. Д. Эйдельман, А. Н. Кочубей, А. В. Псху). Смешанная задача с различными краевыми условиями изучалась с использованием метода потенциалов (J. Kemppainen), построена функция Грина (А. В. Псху). Рассмотрено более общее уравнение континуального порядка (А. В. Псху), установлено свойство максимальной регулярности (R. Zacher), рассмотрены обобщенные решения (R. Zacher, M. Yamomoto) и решения в классе бесселевых потенциалов (А. О. Лопушанский). Установлены принцип максимума и принцип сравнения (Y. Luchko), рассматривалось уравнение с вырождением в нелинейности (R. Zacher). Наконец, рассматривалось уравнение дробной диффузии с переменным показателем производной (K. V. Bockstal). Уравнения с произвольным вырождающимся коэффициентом при дробной производной, по-видимому, не рассматривались.

Эллиптико-параболические вырождающиеся уравнения и корректные задачи для них имеют долгую историю. Отметим фундаментальную работу О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [22]. В дальнейшем в работах С. А. Терсенова, Н. В. Кислова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова изучались так называемые параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Особо отметим работу С. Г. Пяткова [30]. Изучение корректных задач для уравнения смешанного типа в цилиндрической области берет начало с работ В. Н. Врагова и Г. Д. Каратопраклиева. Типичная корректная задача ставится с помощью функции Фикеры. Далее подобные задачи для уравнений второго и высокого порядка изучались в работах И. Е. Егорова, В. Е. Федорова, А. Н. Терехова, А. В. Чуешева, С. Н. Глазатова, С. Г. Пяткова. Уравнения с дробными производными и меняющимся направлением эволюции, по-видимому, не рассматривались.

Обратные задачи для уравнений с дробной производной изучались в работах M. Yamamoto, K. Sakamoto, K. V. Bockstal, J. Janno, Д. Г. Орловского, Ш. А. Алимова, Р. Р. Ашурова. Рассматривались коэффициентные обратные задачи, задача восстановления источника и задача определения показателя дробной производной (константы). Задача восстановления переменного показателя дробной производной не рассматривалась.

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование возможностей метода априорных оценок в приложении к сложным задачам с дробными производными. Речь идет о переменных коэффициентах, вырождении и нелинейностях. В качестве задач для такого исследования были выбраны следующие.

1. Вырождающееся ОДУ с нелинейными монотонными членами произвольного роста.
2. Уравнение дробной диффузии с вырождением и сменой направления времени.
3. Дробно-волновое уравнение со сменой направления времени.
4. Обратная задача определения переменного показателя дробной производной в уравнении дробной диффузии.

Научная новизна:

1. Доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений для вырождающихся уравнений с произвольной монотонной нелинейностью. С учетом произвольного вырождения требование монотонности является необходимым, и, по сути дела, минимальным. Ранее подобные задачи в такой общности не рассматривались.
2. Для вырождающегося уравнения дробной диффузии доказано существование и единственность обобщенного решения задачи типа Коши. Для уравнения с меняющимся направлением времени указана корректная постановка задачи, доказана ее однозначная разрешимость. Ранее такие задачи не рассматривались.
3. Аналогичный результат был установлен для дробно-волнового уравнения с меняющимся направлением времени. Ранее такие задачи не рассматривались.
4. Доказана единственность решения обратной задачи определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии. Указан эффективный алгоритм поиска решения. Ранее рассматривалась лишь задача по определению постоянного показателя (константы).

Случай переменного показателя производной ранее не рассматривался. Таким образом, все результаты новые.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа посвящена приложению метода априорных оценок к уравнениям с дробными производными, в случаях с вырождением и нелинейностью. В этих случаях стандартные подходы, опирающиеся на идею разделения переменных, не работают. Предложен новый эффективный метод регуляризации дробной производной, а также ряд эффективных технических приемов получения априорных оценок. Эти идеи и инструменты дают возможность в дальнейшем изучать и другие сложные задачи с дробными производными.

Модели с дробными производными все чаще используются в прикладных задачах. Так что задача определения порядка дробной производной в уравнении диффузии безусловно имеет практический интерес. В работе предложен эффективный алгоритм решения этой задачи, который может быть реализован на ЭВМ.

Методология и методы исследования. Основу методологии данной диссертации составляют интегральные неравенства с дробными производными. Хорошо известны положительность операторов дробного интегрирования и дифференцирования (с однородными начальными данными). Соответствующие неравенства могут быть распространены и на более общие случаи сложных функций с весом. Эти неравенства во многом аналогичны неравенствам с обычной производной, что позволяет прменить известную технику априорных оценок (энергетических неравенств) к дифференциальным уравнениям с дробными производными. Кроме этого, при доказательстве разрешимости задач на постоянной основе используется метод регуляризации как уравнения, так и собственно дробной производной. Например, в случае уравнения дробной диффузии используется параболическая регуляризация вместе с регуляризацией дробной производной. В результате разрешимость такой задачи не вызывает никаких затруднений. Для уравнений с меняющимся направлением эволюции дополнительно применяется специальная регуляризация краевых условий, предложенная автором [1]. Комбинация всех этих элементов позволяет единообразно доказывать теоремы существования для уравнений с дробной производной.

Отдельно отметим обратную задачу определения переменного порядка дробной производной в уравнении дробной диффузии. Особенность данной задачи заключается в том, что для нее не удается получить подходящие оценки гладкости и устойчивости. Поэтому стандартные методы типа сжимающего отображения или теоремы Шаудера в данном случае неприменимы. Вместо этого применяется теорема о неподвижной точке Биркгофа-Тарского. Замечательная особенность этой теоремы заключается в том, что она использует лишь отношение нестрогого порядка. Для уравнения дробной диффузии при определенных условиях имеет место принцип сравнения, который и позволяет ввести требуемое отношение.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши как для линейного так и для нелинейного обыкновенного вырождающегося уравнения с дробной производной. На поведение вырождающегося коэффициента при дробной производной не накладываются никакие ограничения кроме неотрицательности. Нелинейность удовлетворяет условию типа монотонности.
2. Доказана разрешимость задачи типа Коши для вырождающегося уравнения дробной диффузии. На поведение вырождающегося коэффициента при дробной производной не накладываются никакие ограничения кроме неотрицательности. При некоторых дополнительных упрощающих предположениях доказана единственность обобщенного решения.
3. Указана постановка краевой задачи для уравнения дробной диффузии с меняющимся направлением эволюции и доказана ее разрешимость. При некоторых дополнительных упрощающих предположениях доказана единственность обобщенного решения.
4. Указана постановка краевой задачи для дробно-волнового уравнения с меняющимся направлением эволюции и доказана ее разрешимость. Единственность обобщенного решения доказана при некоторых дополнительных предположениях относительно поведения вырождающегося коэффициента.
5. Рассмотрена обратная задача восстановления переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии. При определенных условиях на правую часть доказана теорема единственности решения. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в терминах некоторого конструктивного оператора A. Предложен конструктивный алгоритм поиска такого решения, который может быть реализован на ЭВМ.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими доказательствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: Межгородском научно-исследовательском семинаре "Неклассические задачи математической физики" (под руководством проф. Кожанова А. И.), научном семинаре "Избранные вопросы математического анализа" (под руководством проф. Демиденко Г. В.), научном семинаре "Современные проблемы математической физики" (под руководством ак. Алимова Ш. А., Ташкент), на российско-французском семинаре "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование", Ханты-Мансийск, 2019, на научном семинаре “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (АМАДЕ-2021), Минск, на VII Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (B&NAK 2023), Нальчик, на конференции "Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование", Самара, 2024.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 работах [94-97], которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК. В работах [96], [97] соавтору принадлежит только вывод первой априорной оценки для регуляризованного уравнения.

В диссертацию вошли только результаты принадлежащие лично автору.

Структура и краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы.

Полный объём диссертации составляет 100 страниц. Список литературы содержит 97 наименований. Введение содержит описание актуальности темы исследования, степени разработанности, целей и задач работы, научной новизны полученных результатов, теоретической и практической значимости работы, методологии и методов исследования, выносимых на защиту положений, степени достоверности и апробации резвльтатов, структуры диссертации и ее краткого содержания.

В первой главе вводятся все основные определения, связанные с дробными производными. Формулируется и доказывается основное интегральное тождество, которое лежит в основе всех интегральных неравенств.

Пусть $T > 0$, $R(\eta) \in C^1(0,T] \bigcap L_1(0,T)$, $R(\eta) \geqslant 0$, $R'(\eta) \leqslant 0$, причем

$$\lim_{\eta \to 0} \eta R(\eta) = 0.$$

Пусть $\psi(\eta)$ — гладкая функция, определенная для $\eta \in \mathbb{R}$, $\psi(0) = 0$. Обозначим $\Psi(a,b) = \psi'(a)(a-b) + \psi(b) - \psi(a)$, $\Psi_0(a) = \Psi(a,0)$. Пусть $r(t), k(t), y(t) \in C^1[0,T]$, $r(t)$ и $k(0)y(0) = 0$. Для $0 < z < T$ обозначим

$$J(z) = \int\limits_0^z r(t)\psi'(y(t)) \int\limits_0^t R(t-s)(k(s)y(s))'\, ds\, dt.$$

Тогда имеет место тождество

$$J(z) = \int\limits_0^z \int\limits_0^t |R'(t-s)| r(t)k(s)\Psi(y(t),y(s))\, ds\, dt +$$

$$\int\limits_0^z r(t)\Psi_0(y(t)) \left(k(0)R(t) + \int\limits_0^t R(t-s)k'(s)\, ds \right) dt +$$

$$\int\limits_0^z k(t)\psi(y(t)) \left(R(z-t)r(z) - \int\limits_t^z R(s-t)r'(s)\, ds \right) dt.$$

Из этого тождества (и некоторых других) можно извлекать содержательные неравенства для дробных производных, если $\psi(\eta)$ выпуклая и $R(\eta) = \eta^{-\nu}$, $0 < \nu < 1$. Например,

$$\psi'(y(t))D^\nu y(t) \geqslant D^\nu \psi(y(t)) + \frac{y(t)\psi'(y(t) - \psi(y(t))}{\Gamma(1-\nu)t^\nu}.$$

В частности, имеет место хорошо известное неравенство

$$2y(t)D^\nu y(t) \geqslant D^\nu y^2(t).$$

Для неотрицательных функций $k(t)$ и $r(t)$ имеют место неравенства вида $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\int\limits_0^T r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1} D^\nu(k(t)y(t))\, dt \geqslant -C(p,r,k,T)\|y(t)\|^p_{L_p(0,T)}, \qquad (1)$$

дающие для интеграла оценку снизу. Такие оценки весьма эффективны в случае вырождающихся уравнений, где функция $k(t)$ может обращаться в ноль произвольным образом. Если же вырождения нет, то в случае $p = 2$ имеют место оценки для норм в пространствах Соболева-Слободецкого

$$C_1(\nu)\|\tilde{y}(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(R)} \leqslant \int\limits_0^T y(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant C_2(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(0,T)}.$$

Здесь $\tilde{y}(t)$ — продолжение нулем на всю ось функции $y(t)$. Кроме этого, вводятся регуляризирующие операторы с параметром $\theta > 0$

$$J_{\mu,\theta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s+\theta)^{1-\mu}}\,ds,$$

$$K_{\mu,\theta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s+\theta)^{\mu}}\,ds.$$

Для оператора $K_{\mu,\theta}$ устанавливается важная оценка уклонения от оператора D^ν. Если обозначить

$$D(y(t),z(t)) = \int\limits_0^T \left(D^\mu y(t) - K_{\mu,\theta}y(t)\right)z(t)\,dt,$$

то

$$|D(y(t),z(t))| \leqslant C(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}\|z(t)\|_{W_2^1(0,T)}.$$

В второй главе рассматривается задача типа Коши для линейного и нелинейного вырождающихся ОДУ.

Пусть $T > 0$, $k(t) \in C^1[0,T])$, $k(t) \geqslant 0$. В остальном на поведение функции $k(t)$ не накладывается никаких ограничений.

Сначала на интервале $(0,T)$ рассматривается задача

$$\partial_0^\gamma(k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t),$$
$$k(0)y(0) = 0,$$

с коэффициентом $c(t) \in C[0,T]$, $c(t) \geqslant c_0 > 0$. С помощью интегральных неравенств из главы 1 сначала получается оценка

$$\|y(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant C\|f(t)\|_{L_1(0,T)},$$

а затем и оценка $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\|y(t)\|_{L_p(0,T)} \leqslant C\|f(t)\|_{L_p(0,T)},$$

С помощью этих оценок методом регуляризации доказана теорема существования обобщенного решения. Единственность такого решения доказывается с помощью решений сопряженной задачи к регуляризированному уравнению. Такой прием позволяет избежать необходимости повышать гладкость решения задачи с дробной производной.

Далее рассматривается задача

$$\begin{aligned} &\partial^{\nu}(k(t)y(t)) + c(y(t)) = f(t),\\ &k(0)y(0) = 0, \end{aligned}$$

с монотонной функцией $c(\eta) \in C_{loc}(R)$. Для доказательства разрешимости снова применяется метод регуляризации и получаются необходимые оценки. Но по сравнению с линейной задачей возникает существенная трудность. Для предельного перехода в нелинейном слагаемом $c(y(t))$ слабой сходимости уже недостаточно. При этом никакой содержательной оценки производной $y'(t)$ не существует. Метод монотонности применить не удалось, поскольку на этом пути возникли большие технические трудности. В конечном итоге удалось построить последовательность приближенных решений, сильно сходящуюся к решению в $L_1(0,T)$ и почти всюду. Попутно была получена оценка, позволяющая доказать единственность обобщенного решения.

В третьей главе рассматривается уравнение дробной диффузии с вырождением и со сменой направления эволюции.

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $S = (0,T) \times \Gamma$, $0 < \nu < 1$. В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} &\partial_{0t}^{\nu}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u(t,x) = f(t,x),\\ &u(t,x)\big|_S = 0,\\ &k(0,x)u(0,x) = 0, \end{aligned}$$

с равномерно-эллиптическим оператором $L(x,t,D_x)$. При этом предполагается, что $k(t,x)$, $k_t(t,x) \in C(\bar{Q})$ и $k(t,x) \geqslant 0$. При некоторых предположениях на величину коэффициента $c(t,x)$ доказывается теорема существования обобщенного решения $u(t,x) \in L_p(Q)$ для любой функции $f(t,x) \in L_p(Q)$. Единственность такого решения доказана при упрощающем предположении, что коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ и $c(t,x)$ не зависят от x. Для доказательства разрешимости применялся метод параболической регуляризации вместе с регуляризацией дробной производной. А именно, для $\varepsilon > 0$ рассматривалась вспомогательная задача

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_t + K_{\nu,\varepsilon}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u = f_\varepsilon(t,x),\\
&u(t,x)\big|_S = 0,\\
&u(0,x) \;\; = 0,
\end{aligned}$$

с регуляризирующим оператором $K_{\nu,\varepsilon}$ из первой главы. Разрешимость такой задачи не вызывает сомнения, поскольку ядро оператора $K_{\nu,\varepsilon}$ не имеет особенности. Равномерные по ε оценки для решений этой задачи можно получить с помощью неравенства (1).

Далее рассматриваем модельную задачу для уравнения дробной диффузии с меняющимся направлением эволюции В цилиндре Q, рассматриваем следующую задачу для модельного уравнения

$$\partial^\nu(k(t,x)u(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma u(t,x) = f(t,x), \tag{2}$$

$$u(t,x)|_S = 0,$$

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\}, \tag{3}$$

$$u(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}. \tag{4}$$

При этом на знак коэффициента $k(t,x)$ не накладывается никаких ограничений. Такая задача ставится по аналогии с известной задачей для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Отметим, что условия для $u(0,x)$ и $u(T,x)$ нуждаются в особом обосновании, поскольку такие следы не определены для малых ν.

Прежде всего, дается определение обобщенного решения. Формально определим функции

$$\chi_0(x) = k(0,x)u(0,x), \quad \chi_T(x) = k(T,x)u(T,x)$$

и применим оператор J^ν к уравнению (2). Получится равенство

$$k(t,x)u(t,x) - J^\nu\Delta u(t,x) + \gamma J^\nu u(t,x) = J^\nu f(t,x) + \chi_0(x). \tag{5}$$

В частности, для $t = T$

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^\nu\Delta u(T,x) + \gamma J^\nu u(T,x) = J^\nu f(T,x). \tag{6}$$

Принимая во внимание (3) и (4), получаем включения

$$\operatorname{supp}\chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp}\chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+, \tag{7}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (3) и (4). В соответствии с этим, мы называем функцию $u(t,x) \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))$ обобщенным решением задачи (2)-(4), если

$$J^\nu u(t,x) \in C([0,T];\mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad k(t,x)u(t,x) \in C([0,T],W_2^{-1}(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_1(\Omega)$ справедливы равенства (5), (6) и включение (7).

После этого доказывается теорема о существовании обобщенного решения, при условии $D^{\mu/2}f(t,x) \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и некотором условии на величину γ. Отметим, что условие на величину γ вполне стандартно для задач такого типа. Для доказательства этой теоремы полагаем $\mu = 1-\nu$ и формально применяем оператор D^μ, к уравнению (2)

$$(k(t,x)u(t,x))_t - D^\mu \Delta u(t,x) + \gamma D^\mu u(t,x) = D^\mu f(t,x).$$

А уже к этому уравнению применяем регуляризацию

$$-\varepsilon u_{tt} + (k(t,x)u(t,x))_t - D^\mu \Delta u(t,x) + \gamma D^\mu u(t,x) = D^\mu f_\varepsilon(t,x), \tag{8}$$

$$u(t,x)|_S = 0,$$

$$-\varepsilon u_t(0,x) + k^+(0,x)u(0,x) = 0, \tag{9}$$

$$-\varepsilon u_t(T,x) + k^-(T,x)u(T,x) = 0. \tag{10}$$

Особо отметим, что регуляризации вводится и в условия (9), (10). Априорная оценка получается стандартным умножением уравнения (8) на $u(t,x)$ и интегрированием по частям.

Единственность обобщенного решения доказывается при условиях $k(0,x) \geqslant 0$, $k(T,x) \geqslant 0$ и предположении, что γ достаточно велико. При этих условиях можно получить простую оценку непосредственно из определения обобщенного решения. Для доказательства более общей теоремы необходимо привлекать технику усреднений. В данной главе такая техника не используется.

В четвертой главе рассматривается дробно-волновое уравнение с меняющимся направлением эволюции. В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial^{\nu}(k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma_1 u_t(t,x) + \gamma_2 \partial^{\nu} u(t,x) = f(t,x), \tag{11}$$

$$u(t,x)|_S = 0,$$

$$u(0,x) = 0,$$

$$u_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\}, \tag{12}$$

$$u_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}. \tag{13}$$

И опять на знак коэффициента $k(t,x)$ не накладывается никаких ограничений. Такая постановка вполне аналогична постановке смешанной задачи для уравнения смешанного типа в цилиндре. Обобщенное решение определяется аналогично обобщенному решению для уравнения дробной диффузии. Формально определим функции

$$\chi_0(x) = k(0,x)u_t(0,x), \quad \chi_T(x) = k(T,x)u_t(T,x).$$

Заметим, что в силу (12) и (13), справедливы включения

$$\operatorname{supp}\chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp}\chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+,, \tag{14}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (12), (13). Затем применим оператор J^{ν} к уравнению (11). Получится равенство

$$k(t,x)u_t(t,x) - J^{\nu}\Delta u(t,x) + \gamma_1 J^{\nu} u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x) = J^{\nu} f(t,x) + \chi_0(x). \tag{15}$$

В частности,

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^{\nu}\Delta u(T,x) + \gamma_1 J^{\nu} u_t(T,x) + \gamma_2 u(T,x) = J^{\nu} f(T,x). \tag{16}$$

Обобщенным решением задачи (11))-(13) называем такую функцию Функцию $u(t,x) \in L_2(Q)$, что

$$u_t(t,x) \in L_2(Q), \quad u(0,x) = 0,$$
$$\partial^{1-\nu} u(t,x) \in C([0,T]; W_2^{-1}(\Omega)), \quad k(t,x)u_t(t,x) \in C([0,T], W_2^{-1}(\Omega)),$$
$$u(t,x) \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad J^{\nu} u(t,x) \in C([0,T]; \mathring{W}_2^1(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_2(\Omega)$ справедливы уравнения (15), (16) и включения (14).

После этого доказывается теорема о существовании обобщенного решения, при условии $f(t,x) \in W_2^{\mu/2}(0,T; L_2(\Omega))$и некотором условии на величину γ. В целом, ход рассуждений аналогичен рассуждениями из главы 3. Сначала формально применяем оператор $D^{1-\nu}$ к уравнению (11), а затем его регуляризируем $(\mu = 1 - \nu)$

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon u_{ttt} + (k(t,x)u_t(t,x))_t - D^\mu \Delta u(t,x) + \gamma_1 D^\mu u_t(t,x) + \gamma_2 u_t(t,x) = D^\mu f_\varepsilon(t,x),\\
&u(t,x)|_S = 0,\\
&u(0,x) = 0,\\
&-\varepsilon u_{tt}(0,x) + k^+(0,x)u_t(0,x) = 0,\\
&-\varepsilon u_{tt}(T,x) + k^-(T,x)u_t(T,x) = 0.
\end{aligned}
$$

Априорная оценка получается стандартным умножением на $u_t(t,x)$ и интегрированием по частям.

Затем доказываются теоремы единственности при том условии, что функции $k(0,x)$ и $k(T,x)$ не меняют знак. Для этого используется техника усреднений. Сама по себе идея довольно простая. Мы хотим умножить уравнение (11) на $u_t(t,x)$ и проинтегрировать по частям. Для этого мы применяем усреднение в уравнении (15) с помощью свертки с ядром ρ_δ. При этом возникает неудобное слагаемое с усредненной функцией $\rho_\delta * \chi_0(x)$. В случае, когда $k(0,x) \geqslant 0$ из определения обобщенного решения следует, что $\chi_0(x) = 0$, и данное слагаемое отсутствует. Если же $k(0,x) \leqslant 0$, то в этом месте возникают серьезные технические трудности, т.к. у нас нет хороших оценок на $\chi_0(x)$. Аналогичным образом дело обстоит с функцией $\chi_T(x)$, когда $k(T,x) \geqslant 0$. В результате приходится использовать усреднение лишь строго внутри цилиндра при $t \in (\delta, T-\delta)$. Тогда после умножения на $u_t(t,x)$ и интегрирования по частям возникают несколько дополнительных слагаемых, которые нуждаются в оценке. В конечном итоге, пришлось рассмотреть четыре случая

(**C1**) $k(0,x) \geqslant 0$, $k(T,x) \geqslant 0$.

(**C2**) $k(0,x) \leqslant 0$, $k(T,x) \geqslant 0$.

(**C3**) $k(0,x) \leqslant 0$, $k(T,x) \leqslant 0$.

(**C4**) $k(0,x) \geqslant 0$, $k(T,x) \leqslant 0$.

В каждом из этих случаев имеются свои особенности. Поэтому пришлось рассматривать их по отдельности.

В пятой главе рассматривается обратная задача для уравнения дробной диффузии с переменным показателем дробной производной.

В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial^{\mu(x)}u(t,x) + L(x,D_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{17}$$

$$u_n(t,x)\big|_S = 0, \tag{18}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{19}$$

Здесь $L(x,D_x)$ — равномерно-эллиптический оператор второго порядка с симметричной матрицей $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, а $u_n(t,x)$ — конормальная производная

$$u_n(t,x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_j}(t,x)n_i(x),$$

где $\bar{n}(x) = (n_1(x), n_2(x)\ldots)$ — вектор внешней нормали в точке $x \in \Gamma$. Функция $\mu(x)$ предполагается измеримой, причем для некоторого $\lambda < 1$ и п.в. $x \in \Omega$

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \lambda.$$

Показатели, удовлетворяющие такому неравенству называются допустимыми. Обратная задача заключается в одновременном определении пары функций $(u(t,x), \mu(x))$ с помощью дополнительного условия

$$u(t,x) = \varphi(x).$$

Сначала доказывается однозначная разрешимость прямой задачи. А именно, при условии $u_0(x) \in L_2(\Omega)$ и $f(t,x) \in L_2(Q)$ обобщенное решение прямой задачи существует и единственно. Далее, если $f_t(t,x) \in L_2(Q)$, $f(0,x) \equiv 0$ и $u_0(x) \equiv 0$, то обобщенное решение будет регулярным

$$\partial^{\mu(x)}u(t,x) \in C(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$u(t,x) \in C(0,T;W_2^2(\Omega)).$$

Причем, если $u_0(x) \geqslant 0$ и $f(t,x) \geqslant 0$, то $u(t,x) \geqslant 0$. С помощью этого утверждения удается доказать принцип сравнения для разных показателей $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$, который выглядит следующим образом.

Пусть $u_0(x) \equiv 0$, $T \leqslant T(\lambda)$, $f(t,x), f_t(t,x) \in L_2(Q)$. Причем $f(0,x) = 0$ и $f_t(t,x) \geqslant 0$. Пусть, далее, $\mu_1(x), \mu_2(x)$ — допустимые показатели, причем $\mu_1(x) \leqslant \mu_2(x)$. Обозначим через $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ соответствующие решения задачи (17)-(19). Тогда для п.в. $(t,x) \in Q$

$$u_2(t,x) \leqslant u_1(t,x).$$

Если дополнительно функция $f_t(t,x)$ неубывает по переменной t, то для всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant u_2(T,x) - u_2(t,x) \leqslant u_1(T,x) - u_1(t,x).$$

Далее мы строим некий изотонный оператор A, неподвижные точки которого порождают решения обратной задачи.

Пусть $(u(t,x),\ \bar{\mu}(x))$ — решение обратной задачи. Тогда имеет место следующее равенство

$$\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))T^{\bar{\mu}(x)}} + \bar{\mu}(x)\int\limits_0^T \frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))(T-\tau)^{1+\bar{\mu}(x)}}\,d\tau = G(x),$$

где

$$G(x) = f(t,x) - L(x,D_x)\varphi(x).$$

Иными словами, если обозначить

$$R(x,z,u) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-z)T^z} + z\int\limits_0^T \frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-z)(T-\tau)^{1+z}}\,d\tau,$$

то для решения обратной задачи имеет место равенство

$$R(x,\bar{\mu}(x),u) = G(x).$$

Важно отметить, что функция $R(x,z,u)$ монотонно возрастает по переменной z, при условии $u(T,x)-u(\tau,x) \geqslant 0$. Поэтому для любой монотонной по переменной t функции $u(t,x)$ можно разрешать уравнение

$$R(x,z,u) = G(x)$$

относительно z. В результате для такой функции $u(t,x)$ формально определена функция $\tilde{\mu}(x)$, для которой выполняется равенство

$$R(x,\tilde{\mu}(x),u) = G(x). \tag{20}$$

Тем самым, формально определяется оператор A по следующему правилу. Для всякого допустимого показателя $\mu(x)$ решаем прямую задачу и находим решение $u(t,x)$. Если она монотонна по переменной t, то разрешаем уравнение (20) относительно $\tilde{\mu}(x)$. Наконец, если функция $\mu(x)$ допустима, то полагаем

$$A\mu(x) = \tilde{\mu}(x).$$

Мы накладываем на правую часть $f(t,x)$ и величину T такие условия, которые позволяют корректно определить этот оператор A. Более того, оказывается, что в силу принципа сравнения, доказанного ранее, этот оператор изотонный. Если $\mu_1(x) \geqslant \mu_2(x)$, то $A\mu_1(x) \geqslant A\mu_2(x)$. Множество допустимых показателей образует полную банахову решетку. Поэтому в данных условиях применима теорема Биркгофа-Тарского о неподвижных точках изотонного оператора. В конечном итоге оказывается справедливым следующее утверждение.

Пусть выполнены некоторые условия на функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и величину T. Тогда

(P1) Для разрешимости обратной задачи необходимо, чтобы

$$0 < \varphi(x) \leqslant G(x), \qquad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

(P2) Пара функций $(u(t,x), \bar{\mu}(x))$ является решением обратной задачи если и только если $\bar{\mu}(x)$ — неподвижная точка оператора A.

(P3) Обратная задача разрешима если и только если выполнено необходимое условие (P1), и для некоторого допустимого показателя $\mu(x)$ справедливо неравенство

$$A\mu(x) \leqslant \mu(x), \qquad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

(P4) Решение обратной задачи единственно.

Затем доказывается следствие, в котором указано одно простое достаточное условие разрешимости обратной задачи.

Глава 1. Интегральные неравенства с дробными производными

В данной главе будут даны все основные определения, сформулированы и доказаны интегральные неравенства и некоторые другие вспомогательные утверждения.

Неравенства со сверточными интегралами известны давно [88], [55], [68]. Интегральные неравенства с дробными производными получаются из них как частный случай. Впоследствии они многократно переоткрывались и обобщались [37], [38], [6], [50],[94]. Отметим, что подобные неравенства тесно связаны с так называемым "цепным правилом"(дифференцирование сложной функции). Относительно этого правила с участием дробных производных сошлемся на [62], [49]

1.1 Определение дробных производных и их простейшие свойства

При определении дробных производных мы следуем изложению книги [31].

Пусть $\nu > 0$, $t \in (a, b)$. Левосторонний дробный интегралы порядка ν с началом в точке a определяется по формуле

$$J^{\nu}_{a+}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_a^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1-\nu}}\, ds.$$

Аналогично определяется правосторонний дробный интеграл

$$J^{\nu}_{b-}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_t^b \frac{y(s)}{(s-t)^{1-\nu}}\, ds.$$

Легко проверяется, что дробные интегралы корректно определены для $y(t) \in L_1(a,b)$ и удовлетворяют полугрупповому свойству

$$J^{\nu}_{a+}J^{\mu}_{a+} = J^{\nu+\mu}_{a+}, \qquad J^{\nu}_{b-}J^{\mu}_{b-} = J^{\nu+\mu}_{b-}.$$

Справедлива формула дробного интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b \varphi(t) J_{a+}^{\nu} \psi(t)\, dt = \int\limits_a^b \psi(t) J_{b-}^{\nu} \varphi(t)\, dt. \tag{1.1}$$

Для гладких функций дробные производные Римана-Лиувилля нецелого порядка ν определяются по формулам

$$D_{a+}^{\nu} y(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m J_{a+}^{1-\{\nu\}} y(t), \quad m = [\nu] + 1,$$

$$D_{b-}^{\nu} y(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^m J_{b-}^{1-\{\nu\}} y(t), \quad m = [\nu] + 1,$$

А дробные производные Герасимова-Капуто определяются по формулам

$$\partial_{a+}^{\nu} y(t) = J_{a+}^{1-\{\nu\}} \left(\frac{d}{dt}\right)^m y(t), \quad m = [\nu] + 1,$$

$$\partial_{b-}^{\nu} y(t) = J_{b-}^{1-\{\nu\}} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m y(t), \quad m = [\nu] + 1,$$

Отметим, что правосторонние операторы интегрирования и дифференцирования легко получаются из левосторонних простой заменой переменных $t' = b - t$. Далее, если это не вызовет недоразумений, в случае $a = 0$ вместо J_{0+}^{ν}, D_{0+}^{ν}, ∂_{0+}^{ν} используем простые обозначения J^{ν}, D^{ν}, ∂^{ν}.

В дальнейшем нас будет интересовать лишь случай $0 < \nu < 1$. В этом случае определения дробных производных принимают вид

$$D^{\nu} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\nu}}\, ds,$$

$$\partial^{\nu} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int\limits_0^t \frac{y'(s)}{(t-s)^{\nu}}\, ds.$$

Для функций $y(t) \in C^1[0,T]$ дробные производные связаны простым соотношением

$$D^{\nu} y(t) = \frac{y(0)}{\Gamma(1-\nu) t^{\nu}} + \partial^{\nu} y(t), \tag{1.2}$$

из которого следует, что производные совпадают в случае $y(0) = 0$. Непосредственной подстановкой легко проверяются равенства

$$D^{\nu} J^{\nu} y(t) = \frac{d}{dt} J^1 y(t) = y(t), \qquad J^{\nu} \partial^{\nu} y(t) = J^1 \frac{d}{dt} = y(t) - y(0).$$

И, в силу (1.2),

$$J^{\nu}D^{\nu}y(t) = y(t).$$

Пусть $0 < \mu \leqslant \nu < 1$. Из предыдущих равенств легко следуют коммутационные соотношения

$$D^{\mu}J^{\nu}y(t) = D^{\mu}J^{\mu}J^{\nu-\mu}y(t) = J^{\nu-\mu}y(t) = J^{\nu-\mu}J^{\mu}D^{\mu}y(t) = J^{\nu}D^{\mu}y(t),$$
$$J^{\mu}D^{\nu}y(t) = D^{\nu-\mu}J^{\nu-\mu}J^{\mu}D^{\nu}y(t) = D^{\nu-\mu}y(t) = D^{\nu}J^{\mu}y(t).$$

Из этих соотношений вытекает одно полезное следствие.

Лемма 1.1.1. *Пусть* $f(t), g(t) \in C^1[0,T]$, $0 < \mu < 1/2$, $1 < p < \infty$. *Обозначим*

$$J(f,g) = \int\limits_0^T f(t)g(t)\,dt.$$

Тогда

$$|J(f,g)| \leqslant C\|J^{\mu}f\|_{L_p(0,T)}\|D^{\mu}g\|_{L_{p'}(0,T)}.$$

Доказательство. Согласно коммутационным соотношениям

$$J(f,g) = \int\limits_0^T f(t)J^{\mu}_{T-}D^{\mu}_{T-}g(t)\,dt = \int\limits_0^T J^{\mu}f(t)D^{\mu}_{T-}g(t)\,dt.$$

По условию леммы $\mu < 1/2$, а значит ([31, Теорема 11.5, Следствие 1, стр. 168])

$$C_1\|D^{\mu}g\|_{L_{p'}(0,T)} \leqslant \|D^{\mu}_{T-}g\|_{L_{p'}(0,T)} \leqslant C_2\|D^{\mu}g\|_{L_{p'}(0,T)}. \tag{1.3}$$

Осталось применить неравенство Гельдера. ■

Отметим, что оператор дифференцирования Римана-Лиувилля допускает естественную область определения. А именно,

$$D(D^{\nu}) = \{y(t)|\ J^{1-\nu}y(t) \in W^1_1(0,T)\}.$$

С оператором Герасимова-Капуто дело обстоит несколько сложнее. Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим

$$R^{\nu,p}(0,T) = \{y(t) \in L_p(0,T) :\ \partial^{\nu}y(t) \in L_p(0,T)\}.$$

Согласно [44] справедливо равенство

$$R^{\nu,p}(0,T) = H_p^\nu(0,T), \tag{1.4}$$

где $H_p^\nu(0,T)$ — пространство Бесселевых потенциалов. В частном случае $p=2$ пространство $H_2^\nu(0,T)$ совпадается с пространством Соболева-Слободецкого $W_2^\nu(0,T)$.

1.2 Интегральное тождество и интегральные неравенства

Для обычных производных правило дифференцирования сложной функции после интегрирования по частям приводит к тождествам вида

$$\int\limits_0^T r(t)\psi'(y(t))y'(t)\,dt = r(t)\psi(y(t))\Big|_0^T - \int\limits_0^T r'(t)\psi(y(t))\,dt. \tag{1.5}$$

Из этого тождества можно извлекать полезные неравенства, при определенных условиях на знак и величину $r(t)$ и $r'(t)$. Для дробных производных такой простой формулы интегрирования по частям нет. Однако, как оказывается, имеет место некоторое, довольно общее, тождество для сверточных интегралов с произвольным ядром. Дробные производные — суть свертки со степенным ядром. Поэтому и для них имеют место некоторые аналоги формулы (1.5) По всей видимости, такие тождества несколько раз переоткрывались разными авторами. Мы сошлемся на книгу [68].

Пусть $T>0$, $R(\eta)\in C^1(0,T]\bigcap L_1(0,T)$, $R(\eta)\geqslant 0$, $R'(\eta)\leqslant 0$, причем

$$\lim_{\eta\to 0}\eta R(\eta) = 0.$$

Простейший пример такой функции — $R(\eta) = \eta^{-\nu}$ для $0<\nu<1$. Пусть $\psi(\eta)\in C^1_{loc}(R)$, $\psi(0)=0$. Обозначим

$$\Psi(a,b) = \psi(b)-\psi(a)-\psi'(a)(b-a), \qquad \Psi_0(a) = \Psi(a,0) = \psi'(a)a-\psi(a).$$

Для гладких функций $r(t), k(t), y(t)$ и $0<z<T$ положим

$$J(z) = \int\limits_0^z r(t)\psi'(y(t))\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt.$$

Лемма 1.2.1. *Пусть* $r(t), k(t), y(t) \in C^1[0,T]$. *Тогда*

$$J(z) = \int_0^z \int_0^t |R'(t-s)| r(t) k(s) \Psi(y(t), y(s))\, ds\, dt +$$
$$\int_0^z r(t)\Psi_0(y(t)) \left(k(0)R(t) + \int_0^t R(t-s)k'(s)\, ds \right) dt - \tag{1.6}$$
$$\int_0^z k(t)\psi(y(t)) \left(r(z)R(z-t) - \int_t^z R(s-t)r'(s)\, ds \right) dt.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in C^1[0,T]$. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_0^t R(t-s)\varphi(s)\, ds = \int_0^t R(s)\varphi(t-s)\, ds.$$

Тогда

$$\Phi'(t) = \varphi(0)R(t) + \int_0^t R(t-s)\varphi'(s)\, ds, \tag{1.7}$$

$$\Phi'(t) = \varphi(t)R(t) + \int_0^t R'(t-s)(\varphi(s) - \varphi(t))\, ds. \tag{1.8}$$

Положим

$$A(t) = \int_0^t R(t-s)k(s)y(s)\, ds.$$

Тогда согласно (1.8)

$$A'(t) = k(t)y(t)R(t) + \int_0^t R'(t-s)(k(s)y(s) - k(t)y(t))\, ds.$$

Далее,

$$\psi'(y(t))(k(s)y(s) - k(t)y(t)) = -k(s)\Psi(y(t), y(s)) +$$
$$(k(s)\psi(y(s)) - k(t)\psi(y(t))) + (\psi'(t)y(t) - \psi(y(t))(k(s) - k(t)).$$

И опять согласно (1.8)

$$\psi'(y(t))A'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)\psi(y(s))\,ds\right) - R(t)k(t)\psi(t)+$$
$$\Psi_0(y(t))\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)\,ds\right) - R(t)k(t)(\psi'(t)y(t)-\psi(y(t)))+ \tag{1.9}$$
$$R(t)k(t)\psi'(y(t))y(t) + \int\limits_0^t |R'(t-s)|k(s)\Psi(y(t),y(s))\,ds.$$

Для завершения доказательства леммы остается только применить к первой производной в правой части равенство (1.7), а другую проинтегрировать по частям

$$\int\limits_0^z r(t)\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)\psi(y(s))\,ds\right)dt =$$
$$\int\limits_0^z k(s)\psi(y(s))\left(r(z)R(z-s) - \int\limits_s^z R(t-s)r'(t)\,dt\right)ds.$$

После чего просто переобозначить переменные. ■

Наиболее интересные следствия из этого тождества получаются для выпуклой функции $\psi(\eta)$ и неотрицательных $r(t), k(t)$. В этом случае имеет место неравенство $\Psi(a,b) \geqslant 0$, а значит первое слагаемое в правой части (1.6) неотрицательно.

Лемма 1.2.2. *Пусть $\psi(\eta) \geqslant 0$ — выпуклая функция, $y(t) \in C^1[0,T]$. Тогда*

$$\int\limits_0^z \psi'(y(t))\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)y(s)\,ds\right)dt \geqslant R_{0z}\int\limits_0^z (\psi(y(t)) + \Psi_0(y(t)))\,dt,$$

где

$$R_{0z} = \inf_{t\in(0,z)} R(t).$$

Доказательство. Немедленно следует из леммы 1.2.1. ■

Лемма 1.2.3. *Пусть выполнены условия леммы 1.2.1, причем* $k(t) \geqslant 0$ *и* $r(t) \geqslant 0$. *Тогда для* $1 \leqslant p < \infty$

$$p\int\limits_0^z r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt \geqslant$$

$$-\,\|R\|_{L_1(0,z)}((p-1)\||k'(t)\|_{C[0,z]}\|r(t)\|_{C[0,z]} + \|k(t)\|_{C[0,z]}\|r'(t)\|_{C[0,z]})\|y(t)\|^p_{L_p(0,z)}.$$

А если $k'(t) \geqslant 0$, $r'(t) \leqslant 0$ *для* $t \in (0,z)$, *то*

$$p\int\limits_0^z r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt \geqslant C_{rk}(z)\|y\|^p_{L_p(0,z)},$$

где

$$C_{rk}(z) = \inf_{t\in(0,z)}\left((p-1)k(0)r(t)R(t) + r(z)k(t)R(z-t)\right).$$

Доказательство. В случае $p > 1$ применяем лемму 1.2.1. А случай $p = 1$ обосновываем с помощью предельного перехода. ■

Лемма 1.2.4. *Пусть* $k(t), y(t) \in C^1[0,T]$, $k(t) \geqslant 0$, $1 < p < \infty$. *Тогда для любого* $\mu > 0$ *найдутся такие константы* $\delta(\mu) > 0$, $C(\delta(\mu)) > 0$, *что для* $z \in (\delta(\mu), T)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^z r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt \geqslant$$

$$-\,\mu\|y(t)\|^p_{L_p(0,z)} - C(\delta(\mu))\mu^{1-p}\|y(t)\|^p_{L_1(0,z-\delta(\mu))}.$$

Доказательство. Используем разбиение единицы. Пусть $\rho(\eta) \in C^1(R)$, $\rho'(\eta) \leqslant 0$. Причем $\rho(\eta) = 1$ для $\eta \leqslant 0$ и $\rho(\eta) = 0$ для $\eta \geqslant 1$. Для всякого $\delta > 0$ положим

$$P_\delta(\eta) = \rho(\eta/\delta - 1)R(\eta), \qquad Q_\delta(\eta) = R(\eta) - P_\delta(\eta).$$

Очевидным образом имеем равенство $J(z) = J_1(z) + J_2(z)$, где

$$J_1(z) = \int\limits_0^z \mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t P_\delta(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt,$$

$$J_2(z) = \int\limits_0^z \mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t Q_\delta(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt.$$

Отметим, что в силу определения функции Q_δ в последнем интеграле нет особенности. Поэтому

$$J_2(z) = \int\limits_0^z \operatorname{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1} \int\limits_0^t Q'_\delta(t-s)k(s)y(s)\,ds\,dt.$$

Следовательно

$$|J_2(z)| \leqslant C(\delta)\|k(t)\|_{C[0,T]}\|R\|_{C^1[\delta,T]}\|y(t)\|_{L_1(0,z-\delta)} \int\limits_0^z |y(t)|^{p-1}\,dt.$$

По неравенству Юнга

$$|J_2(z)| \leqslant \frac{\mu}{2}\int\limits_0^z |y(t)|^p\,dt + C(\delta)T\mu^{1-p}\|k(t)\|^p_{C[0,T]}\|R\|^p_{C^1[\delta,T]}\|y(t)\|^p_{L_1(0,z-\delta)}.$$

По лемме1.2.3

$$J_1(z) \geqslant -(p-1)\|k(t)\|_{C^1[0,T]}\|y(t)\|^p_{L_p(0,z)}\int\limits_0^{2\delta} R(\eta)\,d\eta.$$

Осталось только выбрать δ так, чтобы

$$(p-1)\|k(t)\|_{C^1[0,T]}\int\limits_0^{2\delta} R(\eta)\,d\eta < \mu/2.$$

■

Замечание 1.2.1. *В дальнейшем мы будем применять эту лемму для разных ядер $R(\eta)$. В связи с этим отметим, что в доказанной лемме $\delta(\mu)$ зависит лишь от поведения величины*

$$\int\limits_0^{2\delta} R(\eta)\,d\eta,$$

и тем больше, чем меньше $R(\eta)$. А величина $C(\delta(\mu))$ зависит лишь от поведения $\|R(\eta)\|_{C^1[\delta,z]}$.

Пусть $0 < \nu < 1$. Если положить $R(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\eta^\nu}$, то получатся неравенства для дробных производных. Т.к. сверточный интеграл с таким ядром дает производную Римана-Лиувилля. В частности, справедливы следующие неравенства.

Лемма 1.2.5. *Пусть* $k(t), r(t) \in C^1[0,T]$, $k(t) \geqslant 0$ *и* $r(t) \geqslant 0$. *Тогда для* $1 \leqslant p < \infty$

$$\int\limits_0^z r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1} D^\nu(ky)\,dt \geqslant -C(k,r,\nu)\|y(t)\|^p_{L_p(0,z)}.$$

А если $k(t) \not\equiv 0$, $k'(t) \geqslant 0$, $r(t) \not\equiv 0$, $r'(t) \leqslant 0$ *для* $t \in (0,z)$, *то*

$$\int\limits_0^z r(t)\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1} D^\nu(ky)\,dt \geqslant C(k,r)\|y\|^p_{L_p(0,z)}, \quad C(k,r) > 0.$$

Доказательство. Следует из леммы 1.2.3. ■

Аналог формулы интегрирования по частям (1.5) дает следующая лемма.

Лемма 1.2.6. *Пусть* $y(t), r(t) \in C^1[0,T]$, $r(t) \geqslant 0$, $\psi(\eta) \in C^1_{loc}(R)$ — *выпуклая функция, причем* $\psi(0) = 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^T r(t)\psi'(y(t))D^\nu y(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^T \frac{r(t)\Psi_0(y(t))}{\Gamma(1-\nu)t^\nu}\,dt + \int\limits_0^T D^\nu_{T-} r(t)\psi(y(t))\,dt. \tag{1.10}$$

Доказательство. Из коммутационных соотношений и формулы 1.1 следуют равенства

$$\int\limits_0^T D^\nu_{T-} r(t)\psi(y(t))\,dt = \int\limits_0^T D^\nu_{T-} r(t) J^\nu D^\nu \psi(y(t))\,dt =$$

$$\int\limits_0^T J^\nu_{T-} D^\nu_{T-} r(t) D^\nu \psi(y(t))\,dt = \int\limits_0^T r(t) D^\nu \psi(y(t))\,dt.$$

Из формулы (1.9) имеем неравенство

$$\psi'(y(t))D^\nu y(t) \geqslant D^\nu \psi(y(t)) + \frac{\Psi_0(y(t))}{\Gamma(1-\nu)t^\nu},$$

откуда и следует утверждение леммы. ■

Замечание 1.2.2. *На практике такая лемма дает аналог леммы Гронуолла, если положить* $r(t) = e^{-\gamma t}$, *где* $\gamma > 0$ — *достаточно велико. В этом случае*

$$D^\nu_{T-} e^{-\gamma t} = \frac{e^{-\gamma T}}{\Gamma(1-\nu)(T-t)^\nu} + \gamma \int\limits_t^T \frac{e^{-\gamma s}\,ds}{\Gamma(1-\nu)(s-t)^\nu}.$$

Из леммы 1.2.1 вытекают следующие важные оценки норм в пространстве Соболева-Слободецкого.

Лемма 1.2.7. *Пусть $y(t) \in C^1[0,T]$. Обозначим как $\tilde{y}(t)$ продолжение нулем функции $y(t)$ на всю ось. Тогда*

$$C_1(\nu)\|\tilde{y}(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(R)} \leqslant \int_0^T y(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant C_2(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(0,T)}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Согласно определению нормы

$$\|\tilde{y}(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(R)} = \int_0^T y^2(t)\,dt + \int_{R^2} \frac{(y(t)-y(\tau))^2}{(t-\tau)^{1+\nu}}\,dtd\tau = \int_0^T y^2(t)\,dt +$$
$$\frac{1}{\nu}\int_0^T y^2(t)\left(\frac{1}{t^\nu} + \frac{1}{(T-t)^\nu}\right)dt + \int_0^T\int_0^T \frac{(y(t)-y(\tau))^2}{(t-\tau)^{1+\nu}}\,dtd\tau. \tag{1.12}$$

Для доказательства левого неравенства в (1.11) полагаем $k(t) = r(t) = 1$, $z = T$ и применяем лемму 1.2.1. При этом правая часть (1.6) с точностью до множителя имеет вид (1.12).

Далее, в силу коммутационных соотношений

$$D^\nu y(t) = D^{\nu/2}J^{\nu/2}D^\nu y(t) = D^{\nu/2}D^{\nu/2}y(t).$$

Как и в лемме 1.2.5 получаем

$$\int_0^T y(t)D^\nu y(t)\,dt = \int_0^T D^{\nu/2}_{T-}y(t)D^{\nu/2}y(t)\,dt,$$

и, с учетом (1.3),

$$\int_0^T y(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant \tilde{C}_4\|D^{\nu/2}y(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Теперь правое неравенство в (1.11) следует из (1.4) и равенства $H_2^{\nu/2}(0,T) = W_2^{\nu/2}(0,T)$. ■

Лемма 1.2.8. *Пусть $y(t) \in C^1[0,T]$ и $y(0) = 0$. Тогда*

$$C_3(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\nu)/2}(0,T)} \leqslant \int_0^T y'(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant C_4(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\nu)/2}(0,T)}. \tag{1.13}$$

Доказательство. По условию $y(0) = 0$, а значит в силу 1.2

$$y' = D^{1-\nu}\partial^{\nu} y(t) = D^{1-\nu} D^{\nu} y(t).$$

По лемме 1.2.7

$$C_1(\nu)\|D^{\nu}y(t)\|^2_{W_2^{(1-\nu)/2}(0,T)} \leqslant \int\limits_0^T y'(t) D^{\nu} y(t)\, dt \leqslant C_2(\nu)\|D^{\nu}y(t)\|^2_{W_2^{(1-\nu)/2}(0,T)}.$$

Осталось заметить, что $D^{(1-\nu)/2}D^{\nu}y(t) = D^{(1+\nu)/2}y(t)$ и воспользоваться равенством (1.4). ■

1.3 Регуляризация

В дальнейшем нам понадобится одна регуляризация дробных интегралов и дробных производных.

Пусть $0 < \mu < 1$, $0 < \theta < 1$. Положим

$$J_{\mu,\theta} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s+\theta)^{1-\mu}}\, ds,$$

$$K_{\mu,\theta} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s+\theta)^{\mu}}\, ds.$$

Очевидным образом,

$$K_{\mu,\theta} = \frac{d}{dt} J_{1-\mu,\theta}.$$

По лемме 1.2.3, для некоторой константы $C(\mu) > 0$, не зависящей от θ, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T y(t) K_{\mu,\theta} y(t)\, dt \geqslant \frac{C(\mu)}{(T+1)^{\mu}} \|y(t)\|^2_{L_2(0,T)} = C(\mu, T)\|y(t)\|^2_{L_2(0,T)}. \qquad (1.14)$$

Обозначим

$$D(y(t), z(t)) = \int\limits_0^T \left(D^{\mu} y(t) - K_{\mu,\theta} y(t)\right) z(t)\, dt.$$

Лемма 1.3.1. *Найдется некоторая константа $C(\mu, T) > 0$, не зависящая от θ, такая, что для $y(t)$, $z(t) \in C^1[0,T]$ справедливо неравенство*

$$|D(y(t), z(t))| \leqslant C(\mu, T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}\|z(t)\|_{W_2^1(0,T)}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Определим функцию $\rho_\theta(t)$ по формуле

$$\rho_\theta(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1}{t^\mu} - \frac{1}{(t+\theta)^\mu}\right).$$

Тогда согласно 1.7

$$D^\mu y(t) - K_{\mu,\theta} y(t) = y(0)\rho_\theta(t) + \int\limits_0^t y'(s)\rho_\theta(t-s)\, ds.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_0^T \rho_\theta(t)\, dt \leqslant C(\mu)\left(T^{1-\mu} + \theta^{1-\mu} - (T+\theta)^{1-\mu}\right) \leqslant C(\mu)\theta^{1-\mu}, \tag{1.16}$$

$$0 < \rho_\theta(t) = C(\mu)\frac{t+\theta - t^\mu(t+\theta)^{1-\mu}}{t^\mu(t+\theta)} \leqslant C(\mu)\frac{\theta}{t^\mu(t+\theta)}. \tag{1.17}$$

Обозначим

$$w(t) = \int\limits_0^t y'(s)\rho_\theta(t-s)\, ds.$$

С помощью неравенства (1.16) и неравенства Хаусдорфа-Юнга получаем

$$\|w(t)\|_{L_2(0,T)} \leqslant C(\mu)\theta^{1-\mu}\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}.$$

Следовательно, с учетом (1.17), имеет место неравенство

$$|D(y(t), z(t))| \leqslant C(\mu)\theta^{1-\mu}\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}\|z(t)\|_{L_2(0,T)} + C(\mu)|y(0)|I_z, \tag{1.18}$$

где

$$I_z = \int\limits_0^T \frac{|z(t)|\theta}{t^\mu(t+\theta)}\, dt.$$

По неравенству Коши

$$I_z \leqslant \left(\int\limits_0^T \frac{z^2(t)}{t^\mu}\, dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^T \frac{\theta^2}{t^\mu(t+\theta)^2}\, dt\right)^{1/2}.$$

Для оценки последнего интеграла разбиваем интервал $(0,T)$ на два подинтервала

$$\int\limits_0^T \frac{\theta^2}{t^\mu(t+\theta)^2}\,dt \leqslant \int\limits_0^\theta \frac{dt}{t^\mu} + \int\limits_\theta^T \frac{\theta^2\,dt}{t^{2+\mu}} \leqslant C(\mu)\theta^{1-\mu}.$$

Отметим, что по теореме вложения

$$\sup_{t\in(0,T)} |y(t)| \leqslant C(T)\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}, \qquad \sup_{t\in(0,T)} |z(t)| \leqslant C(T)\|z(t)\|_{W_2^1(0,T)}.$$

Таким образом

$$I_z \leqslant C(T,\mu)\theta^{1-\mu}\|z(t)\|_{W_2^1(0,T)}. \tag{1.19}$$

Собирая оценки (1.18),(1.19) вместе, получаем (1.15). ∎

Лемма 1.3.2. *При условии леммы 1.3.1 имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T y(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt \geqslant C_{K1}(\mu,T)\|y(t)\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T)} - C_{K2}(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|^2_{W_2^1(0,T)}$$

с некоторыми константами $C_{K1}(\mu,T) > 0$, $C_{K2}(\mu,T) > 0$, *не зависящими от* θ.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно заметить, что

$$\int\limits_0^T y(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt = \int\limits_0^T y(t)D^\mu y(t)\,dt - \int\limits_0^T \left(D^\mu y(t) - K_{\mu,\theta}y(t)\right)y(t)\,dt,$$

а затем применить лемму 1.2.7 и лемму 1.3.1. ∎

Лемма 1.3.3. *Пусть* $y(t) \in C^2[0,T]$ *и* $y(0) = 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T y'(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt \geqslant C_{K3}(\mu,T)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\mu)/2}(0,T)} - C_{K4}(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|^2_{W_2^2(0,T)}$$

с некоторыми константами $C_{K3}(\mu,T) > 0$, $C_{K4}(\mu,T) > 0$, *не зависящими от* θ.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно заметить, что

$$\int\limits_0^T y'(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt = \int\limits_0^T y'(t)D^\mu y(t)\,dt - \int\limits_0^T \left(D^\mu y(t) - K_{\mu,\theta}y(t)\right)y'(t)\,dt,$$

а затем применить лемму 1.2.8 и лемму 1.3.1. ∎

Глава 2. Обобщенные решения вырождающихся ОДУ с дробной производной

В данной главе будут рассмотрены две задачи типа Коши для вырождающихся ОДУ. Отметим, что даже для ОДУ возникают специфические сложности, обусловленные наличиием дробной производной. Например, технические трудности, возникающие при повышении гладкости решения.

Разрешимость задачи Коши для уравнений с дробной производной хорошо известна [53], [74], [84]. Задача сводится к эквивалентному уравнению Вольтерры. Для монотонной нелинейности существование и единственность решений можно установить с помощью техники верхних и нижних решений [78]. На самом деле для уравнений с монотонной нелинейностью можно достичь более содержательные результаты. Отметим лишь [83], [63]. В работе [52] исследуется принцип сравнения решений. Для линейных уравнений исследовались задачи с общими краевыми условиями [5] и с запаздыванием [20], [19].

Всюду ниже, особо не оговаривая, предполагаем, что $0 < \nu < 1$, $k(t) \in C^1[0,T]$ и $k(t) \geqslant 0$ для $t \in [0,T]$.

2.1 Линейное вырождающееся ОДУ с дробной производной.

Пусть $T > 0$. На интервале $(0,T)$ рассматриваем задачу

$$\partial^\nu(k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t), \tag{2.1}$$

$$k(0)y(0) = 0. \tag{2.2}$$

Всюду далее предполагаем, что $c(t) \in C[0,T]$.

Обобщенным решением задачи (2.1), (2.2) называем такую функцию $y(t) \in L_1(0,T)$, что для любой $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$ имеет место тождество

$$\int_0^T y(t)(k(t)D_T^\nu\varphi(t) + c(t)\varphi(t))\,dt = \int_0^T \varphi(t)f(t)\,dt.$$

Теорема 2.1.1. *Пусть* $f(t) \in L_1(0,T)$ *и* $y(t)$ *— обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2). *Тогда*

$$k(t)y(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_0^t \frac{f(s) - c(s)y(s)}{(t-s)^{1-\nu}}\, ds. \tag{2.3}$$

и для любого $p \in [1, 1/(1-\nu))$ *имеет место включение* $k(t)y(t) \in L_p(0,T)$. *Пусть* $q > \frac{1}{\nu}$ *и для некоторого* $0 < t_0 < T$ *справедливы включения* $f(t), y(t) \in L_q(0,t_0)$. *Тогда* $k(t)y(t) \in C[0,t_0)$ *и* $k(0)y(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $r(t) \in C^1[0,T]$ и $r(T) = 0$. Положим

$$\varphi(t) = \int\limits_t^T \frac{r(z)}{(z-t)^{1-\nu}}\, dz.$$

Легко проверить, что $\varphi(t) \in C^1[0,T]$ и $\varphi(T) = 0$. По определению обобщенного решения

$$\int\limits_0^T y(t)k(t)D_T^\nu \varphi(t)\, dt = \int\limits_0^T \varphi(t)(f(t) - c(t)y(t))\, dt = \int\limits_0^T r(z) \int\limits_0^z \frac{f(t) - c(t)y(t)}{(z-t)^{1-\nu}}\, dt.$$

Далее,

$$D_T^\nu \varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int\limits_t^T r(z) \int\limits_t^z \frac{ds}{(z-s)^{1-\nu}(s-t)^\nu}\, dz = \Gamma(\nu) r(t).$$

Отсюда в силу произвольности $r(t)$ вытекает равенство (3.1). Используя свойства свертки, из этой формулы легко получаем утверждения теоремы. ■

Прежде чем доказывать однозначную разрешимость задачи (2.1), (2.2) рассмотрим регуляризованное уравнение. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t) + \partial^\nu (k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t), \tag{2.4}$$
$$y(0) = 0. \tag{2.5}$$

Ниже будем говорить, что выполнено условие **(C)** если для некоторой константы $c_0 > 0$ и всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство

$$c(t) \geqslant c_0. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнено условие* **(C)**. *Тогда для любой функции* $f(t) \in C[0,T]$ *существует единственная функция* $y(t) \in C^1[0,T]$ *— решение задачи* (2.4), (2.5). *При этом*

$$c_0\|y(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|f(t)\|_{L_1(0,T)}. \tag{2.7}$$

Для любого $p > 1$

$$\|y(t)\|_{L_p(0,T)} \leqslant C(p)\|f(t)\|_{L_p(0,T)}, \tag{2.8}$$

и константа $C(p)$ *не зависит от* ε.

Доказательство. Обозначим

$$g(t) = \varepsilon y'(t) + c(t)y(t).$$

Тогда для некоторой функции $a(t) \in C^1[0,T]$

$$\varepsilon y(t) = \int\limits_0^t e^{a(s)-a(t)} g(s)\, ds.$$

С помощью этого представления из (2.4) легко получаем уравнение Вольтерры второго рода

$$g(t) + \int\limits_0^t \frac{K(t,s)g(s)}{(t-s)^\nu}\, ds = f(t),$$

с непрерывным ядром $K(t,s)$. Решение такого уравнения $g(t) \in C[0,T]$ существует и единственно. Следовательно существует единственное решение задачи (2.4), (2.5). Умножим уравнение (2.4) на $\operatorname{sign}(y(t))$ и проинтегрируем. Заметим, что в силу (1.2)

$$\partial^\nu(k(t)y(t)) = D^\nu(k(t)y(t)).$$

По лемме 1.2.3

$$\int\limits_0^T \operatorname{sign}(y(t))\partial^\nu(k(t)y(t))\, dt \geqslant 0.$$

Поэтому

$$c_0\int\limits_0^T |y(t)|\, dt \leqslant \int\limits_0^T |f(t)|\, dt.$$

Таким образом, для $y(t)$ справедлива оценка (2.7).

Пусть $p > 1$. Умножим уравнение (2.4) на $\operatorname{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}$ и проинтегрируем. По лемме 1.2.4 в силу (2.7) имеем неравенство

$$\int_0^T \operatorname{sign}(y(t))|y(t)|^{p-1}\partial^\gamma(k(t)y(t))\,dt \geqslant -\frac{c_0}{2}\|y(t)\|^p_{L_p(0,T)} - C\|f(t)\|^p_{L_1(0,T)}.$$

Следовательно

$$\frac{c_0}{2}\int_0^T |y(t)|^p\,dt \leqslant C\|f(t)\|^p_{L_1(0,T)} + \int_0^T |f(t)||y(t)|^{p-1}\,dt.$$

Применяем неравенство Юнга и приходим к неравенству (2.8). ■

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнено условие* **(C)**, $p \geqslant 1$. *Тогда для любой функции* $f(t) \in L_p(0,T)$ *задача* (2.1), (2.2) *имеет обобщенное решение* $y(t) \in L_p(0,T)$. *Для этого решения справедливы оценки* (2.7), (2.8).

Доказательство. Сначала предположим, что $p > 1$. Пусть функции $f_\varepsilon(t) \in C[0,T]$ определены для всякого $\varepsilon > 0$. Причем $f_\varepsilon(t) \to f(t)$ сильно в $L_p(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим задачу (2.4), (2.5) с правой частью $f_\varepsilon(t)$. Решение этой задачи обозначим $y_\varepsilon(t)$. По теореме 2.1.2 для этого решения имеют место оценки (2.7), (2.8). При $p > 1$ пространство $L_p(0,T)$ рефлексивно. Поэтому можно выбрать такую последовательность $\varepsilon_k \to 0$ (далее индекс k опускаем), что $y_\varepsilon(t) \rightharpoonup y(t)$ слабо в $L_p(0,T)$. Умножим уравнение (2.7) на пробную функцию $\varphi(t)$, проинтегрируем и перейдем к пределу по ε. Получим обобщенное решение задачи (2.1), (2.2). Неравенства (2.7), (2.8) для предельной функции $y(t)$ легко следуют из соответствующих неравенств для $y_\varepsilon(t)$.

Пусть теперь $p = 1$. Для всякого натурального n полагаем

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } n-1 \leqslant |f(t)| < n; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функцию $f(t)$ можно представить в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=1}^\infty f_n(t), \qquad \|f(t)\|_{L_1(0,T)} = \sum_{n=1}^\infty \|f_n(t)\|_{L_1(0,T)}.$$

Для всякого n функция $f_n(t) \in L_\infty(0,T)$. Решаем задачу (2.1), (2.2) с правой частью $f_n(t)$ и получаем решение $y_n(t)$. При этом

$$c_0\|y_n(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|f_n(t)\|_{L_1(0,T)}.$$

Следовательно корректно определена функция $y(t) \in L_1(0,T)$ по формуле

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t).$$

Легко проверить, что эта функция — решение задачи (2.1), (2.2) и для нее справедлива оценка (2.7). ■

Теорема 2.1.4. *Пусть выполнено условие* ***(C)****. Тогда обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *единственно.*

Доказательство. Сначала предположим, что $c(t) \equiv c_0$ и c_0 достаточно велико.

Пусть функция $u(t) \in L_1(0,T)$ — решение задачи (2.1), (2.2) с $f(t) = 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ определим пробную функцию $\varphi_\varepsilon(t)$ следующим образом. Пусть $g(t) \in C^2[0,T]$, $g(0) = 0$. Обозначим $k_1(t) = k(T-t)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon y_\varepsilon'(t) + k_1(t)\partial^\nu y_\varepsilon(t) + c_0 y_\varepsilon(t) = g(t), \\ &y_\varepsilon(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Как и в теореме 2.1.2 легко показать, что у этой задачи существует решение $y_\varepsilon(t) \in C^1[0,T]$, если c_0 достаточно велико. Наконец, положим $\varphi_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(T-t)$. Легко убедиться, что

$$-\varepsilon\varphi_\varepsilon'(t) + k(t)D_T^\nu\varphi_\varepsilon(t) + c_0\varphi_\varepsilon(t) = g(T-t).$$

Подставляем функцию $\varphi_\varepsilon(t)$ в определение обобщенного решения

$$\int_0^T y(t)(g(T-t) + \varepsilon\varphi_\varepsilon'(t))\,dt = 0.$$

Предположим, что при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость

$$\varepsilon\varphi_\varepsilon'(t) \rightharpoonup 0 \tag{2.10}$$

$*$-слабо в $L_\infty(0,T)$. Тогда переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int_0^T y(t)g(T-t)\,dt = 0.$$

В силу произвольности $g(t)$ отсюда следует, что $y(t) = 0$.

Таким образом, нам достаточно установить справедливость утверждения (2.10). По лемме 1.2.3 найдется такая константа $C(k) \geqslant 0$, что для любого $p > 1$

$$p \int\limits_0^T k_1(t)\,\mathrm{sign}(y_\varepsilon(t))|y_\varepsilon|^{p-1}\partial^\nu y_\varepsilon(t)\,dt \geqslant -C(k)\int\limits_0^T |y_\varepsilon(t)|^p\,dt.$$

Следовательно

$$(pc_0 - C(k))\int\limits_0^T |y_\varepsilon(t)|^p\,dt \leqslant p\int\limits_0^T |y_\varepsilon(t)|^{p-1}|g(t)|\,dt.$$

Отсюда легко заключаем (c_0 достаточно велико), что

$$c_0\|y_\varepsilon(t)\|_{C[0,T]} \leqslant 2\|g(t)\|_{C[0,T]}. \tag{2.11}$$

Обозначим $v_\varepsilon(t) = \partial^\nu y_\varepsilon(t)$. Тогда в силу условий на $g(t)$ имеем систему

$$\begin{aligned}
&\varepsilon v_\varepsilon'(t) + \partial^\nu(k_1(t)v_\varepsilon(t)) + c_0 v_\varepsilon(t) = \partial^\nu g(t) \equiv g_1(t),\\
&v_\varepsilon(0) = 0.
\end{aligned}$$

По лемме 1.2.3 найдется такая константа $C_1(k) \geqslant 0$, что для любого $p > 1$

$$p\int\limits_0^T \mathrm{sign}(v_\varepsilon(t))|v_\varepsilon|^{p-1}\partial^\nu(k_1(t)v_\varepsilon(t))\,dt \geqslant -C_1(k)(p-1)\int\limits_0^T |v_\varepsilon(t)|^p\,dt.$$

Поэтому аналогично предыдущей оценке

$$(c_0 - C_1(k))\int\limits_0^T |v_\varepsilon(t)|^p\,dt \leqslant \int\limits_0^T |v_\varepsilon(t)|^{p-1}|g_1(t)|\,dt.$$

Как и раньше, отсюда получаем

$$c_0\|v_\varepsilon(t)\|_{C[0,T]} \leqslant 2\|g_1(t)\|_{C[0,T]}. \tag{2.12}$$

Из неравенств (2.11), (2.11) и уравнения (2.9) следует равномерная по ε оценка

$$\|\varepsilon y_\varepsilon'(t)\|_{C[0,T]} \leqslant C.$$

Переходя если потребуется к подпоследовательности, можно считать, что для некоторой функции $\chi(t) \in L_\infty(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость

$$\varepsilon y_\varepsilon'(t) \rightharpoonup \chi(t)$$

*-слабо в $L_\infty(0,T)$. Пусть $\psi(t) \in C^1[0,T]$, $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Тогда

$$\int_0^T \varepsilon y_\varepsilon'(t)\psi(t)\,dt = -\varepsilon \int_0^T y_\varepsilon(t)\psi'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу по ε, получаем

$$\int_0^T \chi(t)\psi(t)\,dt = 0.$$

Следовательно $\chi(t) = 0$, и сходимость (2.10) доказана.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть функция $y(t) \in L_1(0,T)$ — решение задачи (2.1), (2.2) с $f(t) = 0$ и c_1 — достаточно большая константа. Легко видеть, что функция $y(t)$ — обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned} &\partial^\gamma(k(t)y(t)) + c_1 y(t) = (c_1 - c(t))y(t),\\ &k(0)y(0) = 0. \end{aligned}$$

Как мы только что видели, если константа c_1 достаточно велика, то это решение единственно и в силу (2.7) справедливо неравенство

$$c_1 \int_0^T |y(t)|\,dt \leqslant \int_0^T |c_1 - c(t)||y(t)|\,dt.$$

Выбирая при необходимости $c_1 > \|c(t)\|_{C[0,T]}$, приходим к неравенству

$$\int_0^T c(t)|y(t)|\,dt \leqslant 0.$$

А значит в силу (2.6) $y(t) \equiv 0$. ■

2.2 Нелинейное вырождающееся ОДУ с дробной производной.

В этом разделе мы рассмотрим нелинейное ОДУ с дробной производной. Для доказательства разрешимости задачи Коши мы снова применяем метод регуляризации. Но на сей раз слабой сходимости приближенных решений уже не достаточно. Мы докажем, что существует последовательность приближенных решений, которая сходится сильно в $L_1(0,T)$ и почти всюду. После этого можно переходить к пределу в нелинейном слагаемом. Сразу же отметим, что построение такой последовательности сопряжено с определенными трудностями. Поэтому сначала мы докажем ряд вспомогательных лемм, в которых получим необходимые оценки решений регуляризованного уравнения. Пусть $c(\eta) \in C_{loc}(\mathbb{R})$, $c(0) = 0$, и для некоторой константы $c_0 > 0$ имеет место неравенство

$$(a-b)(c(a)-c(b)) \geqslant c_0(a-b)^2, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$Ly(t) = \partial^\nu(k(t)y(t)) + c(y(t)).$$

Пусть $T > 0$. На интервале $(0,T)$ рассматриваем задачу

$$Ly(t) = f(t), \tag{2.13}$$

$$k(0)y(0) = 0. \tag{2.14}$$

Обобщенным решением задачи (2.13), (2.14) называем такую функцию $y(t) \in L_1(0,T)$, что $c(y(t)) \in L_1(0,T)$, и для любой $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$ имеет место тождество

$$\int\limits_0^T (k(t)y(t)D_T^\nu\varphi(t) + c(y(t))\varphi(t))\,dt = \int\limits_0^T \varphi(t)f(t)\,dt.$$

Лемма 2.2.1. *Пусть $y(t) \in C^1[0,T]$ и $y(0) = 0$. Тогда*

$$\partial^\nu(k(t)y(t)) = k(t)\partial^\nu y(t) + g_1(t).$$

Причем для $q > 1$

$$\|g_1(t)\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(\nu)\|k\|_{C^1[0,T]}\|y(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.15}$$

Если $k(t) \in C^2[0,T]$, то

$$\partial^\nu(k(t)y(t)) = k(t)\partial^\nu y(t) + \nu k'(t)J^{1-\nu}y(t) + g_2(t).$$

Причем для $q > 1$

$$\|g_2(t)\|_{W_q^1(0,T)} \leqslant C(\nu)\|k\|_{C^2[0,T]}\|y(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Легко проверить, что функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ определяются следующим образом

$$g_1(t) = -\frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int\limits_0^t \frac{(k(s)-k(t))y(s)}{(t-s)^{1+\nu}}\, ds.$$

$$g_2(t) = -\frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int\limits_0^t \frac{(k(s)-k(t)-k'(t)(s-t))y(s)}{(t-s)^{1+\nu}}\, ds.$$

Оценки (2.15), (2.16) легко следуют из теоремы Тейлора. ■

Пусть $m>0$ — фиксировано. Для $\varepsilon>0$ полагаем $k_\varepsilon(t)=\varepsilon+k(t)$ и

$$L_\varepsilon y(t) = \varepsilon^m y'(t) + \partial^\nu(k_\varepsilon(t)y(t)) + c(y(t)).$$

Пусть $f_\varepsilon(t)\in C^1[0,T]$, $f_\varepsilon(T)=0$ Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon y_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t), \tag{2.17}$$
$$y_\varepsilon(0) = 0. \tag{2.18}$$

Как и раньше, нетрудно доказать локальную разрешимость этой задачи. Далее, там, где это не вызовет недоразумения, индекс ε опускаем, и вместо y_ε, f_ε пишем просто y и f.

Лемма 2.2.2. *Пусть $q>1$. Решение задачи (2.17), (2.18) продолжается на весь интервал $[0,T]$ и для него справедливы оценки*

$$\|c(y(t))\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|f(t)\|_{L_1(0,T)}. \tag{2.19}$$

$$\|y(t)\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(q)\|f(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.20}$$

$$\|c(y(t))\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(q)\|f(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Оценки (2.19), (2.20) доказываются совершенно аналогично (2.7), (2.8). Далее, для $\eta\in\mathbb{R}$ положим

$$\psi(\eta) = \operatorname{sign}(\eta)\int\limits_0^\eta |c(s)|^{q-1}\, ds.$$

Легко видеть, что $\psi(\eta)$ — выпуклая неотрицательная функция, а значит по лемме 1.2.2

$$\int_0^T |c(y(t))|^q\,dt \leqslant C(q)\int_0^T |f(t)|^q\,dt + C(q)\int_0^T \Psi_0(y(t))\,dt.$$

Очевидным образом, для любого $\delta > 0$

$$\Psi_0(y(t)) \leqslant |y(t)|\psi'(y(t))| \leqslant |y(t)||c(y(t))|^{q-1} \leqslant \delta|c(y(t))|^q + C(\delta)|(y(t)|^q.$$

Отсюда с помощью оценки (2.20) получаем (2.21). ■

Лемма 2.2.3. *Если $m > q$ и ε достаточно мало, то*

$$\|k_\varepsilon \partial^\nu y(t)\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(q)\|f(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.22}$$

$$\|\partial^\nu (k_\varepsilon y(t))\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(q)\|f(t)\|_{L_q(0,T)}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Заметим, что

$$y'(t) = D_0^{1-\nu}\partial^\nu y(t).$$

По лемме 1.2.3 (при необходимости используем гладкие приближения)

$$\int_0^T y'(t)\,\mathrm{sign}(\partial^\nu y(t))|k_\varepsilon(t)\partial^\nu y(t)|^{q-1}(t)\,dt \geqslant -C\|\partial^\nu y(t)\|^q_{L_q(0,T)}.$$

Умножим уравнение (2.17) на $\mathrm{sign}(\partial^\nu y(t))|k_\varepsilon(t)\partial^\nu y(t)|^{q-1}(t)$ и проинтегрируем по $(0,T)$. С помощью неравенства Юнга и леммы 2.2.1 легко получаем

$$\|k_\varepsilon \partial^\nu y(t)\|^q_{L_q(0,T)} \leqslant C(\delta)(|c(y(t))|^q + \|f(t)\|^q_{L_q(0,T)}) + C(\varepsilon^m + \delta)\|\partial^\nu y(t)\|^q_{L_q(0,T)}.$$

Для малых ε и δ (с учетом (2.21)) из этого неравенства следует (2.22). После этого применяем лемму 2.2.1 и с помощью (2.20) получаем (2.23). ■

Лемма 2.2.4. *Пусть $k(t) \in C^2[0,T]$, $q > \max(1/\nu, 2)$. Тогда для решения задачи* (2.17), (2.18) *справедливы неравенства*

$$\varepsilon\int_0^T |\partial^\nu y(t)|^2\,dt \leqslant C\|f(t)\|^2_{W_2^1(0,T)}, \tag{2.24}$$

$$\varepsilon^{m+1}\int_0^T |y'(t)|^2\,dt \leqslant C\|f(t)\|^2_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Обозначим

$$z(t) = J^{1-\nu} y(t).$$

При этом

$$\partial^\nu y(t) = z'(t)$$

По лемме 2.2.1

$$k_\varepsilon(t)|\partial^\nu y(t)|^2\,dt = \partial^\nu y(t)\partial^\nu(k_\varepsilon y(t)) - \nu k'(t)z'(t)z(t) - z'(t)g_2(t).$$

Поэтому в силу (2.16) имеем неравенство

$$\int_0^T k_\varepsilon(t)|\partial^\nu y(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^T \partial^\nu y(t)\partial^\nu(k_\varepsilon y(t))\,dt + C\sup_{t\in(0,T)} z^2(t) + C\|y(t)\|^2_{L_q(0,T)}.$$

Отметим, что по условию леммы $q > 1/\nu$. Значит

$$\sup_{t\in(0,T)} z^2(t) \leqslant C\|y\|^2_{L_q(0,T)}.$$

Умножим уравнение (2.17) на $\partial^\nu y(t)$ и проинтегрируем по $(0,T)$.

$$\varepsilon^m \int_0^T y'(t)\partial^\nu y(t)\,dt + \int_0^T c(y(t))\partial^\nu y(t)\,dt +$$
$$\int_0^T k_\varepsilon(t)|\partial^\nu y(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^T f(t)\partial^\nu y(t)\,dt + C\|y(t)\|^2_{L_q(0,T)}.$$

Первое слагаемое в левой части неравенства неотрицательно. Далее, для $\eta \in \mathbb{R}$ положим

$$\psi(\eta) = \int_0^\eta c(s)\,ds.$$

Функция $c(\eta)$ монотонная и $(0) = 0$. Поэтому $\psi(\eta)$ — выпуклая и $\psi(\eta) \geqslant 0$. Так что и второе слагаемое неотрицательно по лемме 1.2.2. Кроме того, $f(T) = 0$. Используя оценки леммы 2.2.2, приходим к неравенству

$$\int_0^T k_\varepsilon(t)|\partial^\nu y(t)|^2\,dt \leqslant C\|f(t)\|^2_{L_2(0,T)} + C\|f(t)\|^2_{L_q(0,T)}\,dt + C\|\partial^\gamma_T f(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Следовательно имеет место неравенство (2.24). Умножим уравнение (2.17) на $2y'(t)$ и проинтегрируем по $(0,T)$. По лемме 2.2.1

$$2\varepsilon^m \int\limits_0^T |y'(t)|^2\,dt + c_0 y^2(T) + 2\int\limits_0^T k_\varepsilon y'(t)\partial^\nu y(t)\,dt +$$
$$2\nu \int\limits_0^T y'(t)k'(t)z(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^T 2y'(t)(f(t)-g_2(t))\,dt.$$

Следовательно,

$$2\varepsilon^m \int\limits_0^T |y'(t)|^2\,dt + c_0 y^2(T) \leqslant C\|\partial^\nu y(t)\|^2_{L_2(0,T)} + C\|y(t)\|^2_{L_2(0,T)} + C\|f(t)\|^2_{W_2^1(0,T)} +$$
$$2|y(T)||g_2(T)| + 2\nu|y(T)||k'(T)||z(T)| + 2\nu\int\limits_0^T y(t)k'(t)\partial^\nu y(t)\,dt.$$

Применяем (2.24) и получаем (2.25). ■

Лемма 2.2.5. *Пусть $c(\eta) = c_0\eta$. Пусть $p \geqslant 1$, $f \in L_p(0,T)$, $y(t)$ — обобщенное решение задачи* (2.13), (2.14). *Найдется такая последовательность функций $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, что*

1. *$y_n(t) \in C^1[0,T]$ для всех $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n(t) - y(t)\|_{L_p(0,T)} + \|Ly_n(t) - f(t)\|_{L_p(0,T)} = 0$,*
3. *$\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$ для п.в. $t \in (0,T)$.*

Для решения $y(t)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^T c_0|y(t)|\,dt \leqslant \int\limits_0^T f(t)\,\mathrm{sign}(y(t))\,dt. \tag{2.26}$$

Доказательство. Прежде всего, по теореме 2.1.3 обобщенное решение задачи (2.13), (2.14) существует и единственно. Сначала предположим, что $p > 1$. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ задана функция $f_\varepsilon(t) \in C^1[0,T]$, причем $f_\varepsilon(T) = 0$ и $f_\varepsilon(t) \to f(t)$ при $\varepsilon \to 0$ сильно в $L_p(0,T)$. Выберем $m > p$ и обозначим $y_\varepsilon(t)$ — решение задачи (2.17), (2.18). По леммам 2.2.2, 2.2.3 справедливы равномерные по ε оценки

$$\|y_\varepsilon(t)\|_{L_p(0,T)}, \|\partial^\nu(k_\varepsilon(t)y_\varepsilon(t))\|_{L_p(0,T)} \leqslant C.$$

Как и раньше, можно считать, что

$$y_\varepsilon(t) \rightharpoonup y(t), \quad \text{слабо в } L_p(0,T).$$

Кроме этого, для некоторой $\chi(t) \in L_p(0,T)$

$$\partial^\nu(k_\varepsilon(t)y_\varepsilon(t)) \rightharpoonup \chi(t), \quad \text{слабо в } L_p(0,T).$$

Следовательно

$$\varepsilon^m y_\varepsilon'(t) \rightharpoonup \chi_1(t) = f(t) - c_0 y(t) - \chi(t), \quad \text{слабо в } L_p(0,T).$$

Как и в теореме 2.1.4 с помощью гладких пробных функций легко получаем $\chi_1(t) = 0$. Тогда существование искомой последовательности функций $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует из теоремы Мазура. Как и раньше

$$\int_0^T c_0|y_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^T \operatorname{sign}(y_n(t))Ly_n(t)\,dt.$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$. По теореме Лебега получаем (2.26).

Осталось рассмотреть случай $p = 1$. Пусть $\{f^{(j)}(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность гладких функций, такая, что $f^{(j)}(t) \to f(t)$ сильно в $L_1(0,T)$ при $j \to \infty$, и $\{y^{(j)}(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность соответствующих решений задачи (2.13), (2.14). Для каждого $j \in \mathbb{N}$ строим последовательность $\{y_n^{(j)}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$. А далее применяем диагональный процесс и (2.26). ■

Теорема 2.2.1. *Пусть $p \geqslant 1$, $f_1(t), f_2(t) \in L_p(0,T)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ — соответствующие им решения задачи* (2.13), (2.14). *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_0^T |c(y_1(t)) - c(y_2(t))|\,dt \leqslant \int_0^T (f_1(t) - f_2(t))\operatorname{sign}(y_1(t) - y_2(t))\,dt. \qquad (2.27)$$

В частности, если $f_1(t) \equiv f_2(t)$, то $y_1(t) \equiv y_2(t)$, и решение задачи (2.13), (2.14) *единственно.*

Доказательство. Пусть $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Легко видеть, что

$$\partial^\nu(k(t)w(t)) + w(t) = f_1(t) - f_2(t) + c(y_2(t)) - c(y_1(t)) + y_1(t) - y_2(t) \equiv h(t).$$

По лемме 2.2.5

$$\int_0^T |w(t)|\,dt \leqslant \int_0^T h(t)\operatorname{sign}(w(t))\,dt.$$

Подставляем вместо $h(t)$ соответствующее выражение и приходим к (2.27). ■

Теорема 2.2.2. *Пусть функция $k(t) \in C^2[0,T]$, $p \geqslant 1$, $f \in L_p(0,T)$. Тогда существует $y(t)$ — решение задачи (2.13), (2.14), и для него справедливо утверждение, аналогичное утверждению леммы 2.2.5.*

Доказательство. Сначала предположим, что $p > 1$. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ задана функция $f_\varepsilon(t) \in C^1[0,T]$, причем причем $f_\varepsilon(T) = 0$ и $f_\varepsilon(t) \to f(t)$ при $\varepsilon \to 0$ сильно в $L_p(0,T)$. Дополнительно потребуем, чтобы для некоторой константы $C_f > 0$ при $\varepsilon \to 0$ выполнялась оценка

$$\sqrt{\varepsilon}\|f_\varepsilon\|^2_{W_2^1(0,T)} \leqslant C_f.$$

Выберем $m > 2$ и обозначим $y_\varepsilon(t)$ — решение задачи (2.17), (2.18). Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$. Для разности $w(t) = y_{\varepsilon_1}(t) - y_{\varepsilon_2}(t)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned}\varepsilon_2^m w'(t) + \partial^\nu(k_{\varepsilon_2}(t)w(t)) + c(y_{\varepsilon_1}(t)) - c(y_{\varepsilon_2}(t)) = \\ f_{\varepsilon_1}(t) - f_{\varepsilon_2}(t) + (\varepsilon_2^m - \varepsilon_1^m)y'_{\varepsilon_1}(t) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\partial^\nu y_{\varepsilon_1}(t).\end{aligned}$$

Умножая это уравнение на $\operatorname{sign}(w(t))$ и интегрируя по $(0,T)$, как и раньше получаем

$$\int\limits_0^T |c(y_{\varepsilon_1}(t)) - c(y_{\varepsilon_2}(t))|\,dt \leqslant \int\limits_0^T |f_{\varepsilon_1}(t) - f_{\varepsilon_2}(t)|\,dt + \int\limits_0^T (\varepsilon_1^m|y'_{\varepsilon_1}| + \varepsilon_1|\partial^\nu y_{\varepsilon_1}|)\,dt.$$

По лемме 2.2.4 при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon\partial^\nu y_\varepsilon(t) \to 0, \quad \text{сильно в } L_2(0,T),$$

$$\varepsilon^m y'_\varepsilon(t) \to 0, \quad \text{сильно в } L_2(0,T).$$

Следовательно, семейства функций $c(y_\varepsilon(t))$ и $y_\varepsilon(t)$ фундаментальны в $L_1(0,T)$. Поэтому можно считать, что для некоторой функции $y(t) \in L_1(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $y_\varepsilon(t) \to y(t)$ сильно в $L_1(0,T)$ и почти всюду в $(0,T)$. По лемме 2.2.2 имеем включение $y(t), c(y(t)) \in L_p(0,T)$. При $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $c(y_\varepsilon(t)) \to c(y(t))$ сильно в $L_1(0,T)$ и почти всюду в $(0,T)$. Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны рассуждениям из леммы 2.2.5. ■

Глава 3. Уравнение дробной диффузии с вырождением и изменяющимся направлением эволюции

В этой главе будут рассматриваться уравнение дробной диффузии с вырождением и меняющимся направлением эволюции.

Изучению уравнения дробной диффузии посвящено огромное количество работ (см., например, [77]). Отметим лишь некоторые результаты в этой области. Фундаментальное решение построено в [54], [29]. Абстрактные уравнения с дробной производной рассматривались в работах [13], [92]. В работах R. Zacher с учениками с помощью интегральных неравенств рассматривались уравнения с разрывными коэффициентами, с вырождением в пространственном операторе [91], [89]. Доказано нервенство Гарнака [93]. С помощью метода потенциалов рассмотрена смешанная задача с краевыми условиями Робина [70]. Неоднородные граничные условия рассматривались в работах [90], [73]. Рассматривалось и уравнение с дробными производными и по времени и по пространству [80], [71], [17]

Отдельно стоит упомянуть о работах с использованием методов теории полугрупп. С помощью таких методов можно изучать абстрактные уравнения в банаховом пространстве [43], вырожденные [60], [58], задачи управления с вырождением и нелинейностью [25], [24], соболевского типа (с вырождением) итд.

Мы рассматриваем уравнение дробной диффузии с произвольно вырождающимся коэффициентом при дробной производной. Более того, мы рассматриваем и случай смены направления эволюции. Отметим, что такие задачи раннее не рассматривались. Поэтому представляет известный интерес следующий вопрос: насколько результаты для уравнений с обычной производной и меняющимся направлением эволюции могут быть перенесены на случай дробной производной. Оказывается, что постановка задачи не меняется, хотя от правой части приходится требовать некоторую, возможно, завышенную гладкость. Поскольку такие требования возникают вследствие техники доказательств, то вопрос о необходимости такой гладкости остается открытым.

Следует отметить, что теоремы единственности обобщенных решений даже в случае обычной производной доставляют особые трудности. Вся проблема в поведении коэффициента $k(t, x)$, определяющего вырождение в уравнении. Более или менее простым является случай знакоопределенности функций $k(0, x)$

и $k(T,x)$. Если же эти функции могут менять знак, то ситуация резко осложняется. Для дробной производной проблем еще больше. Поэтому теоремы единственности будут доказаны лишь при некоторых условиях знакоопределенности функций $k(0,x)$ и $k(T,x)$.

3.1 Вырождающееся уравнение дробной диффузии.

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $S = (0,T) \times \Gamma$, $0 < \nu < 1$. В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial^\nu_{0t}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u(t,x) = f(t,x), \in Q \tag{3.1}$$

$$u(t,x)\big|_S = 0,$$

$$k(0,x)u(0,x) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь ∂^ν_{0t} — производная Герасимова-Капуто по переменной t с началом в точке $t = 0$ (в дальнейшем пишем просто ∂^ν), а $L(x,t,D_x)$ — равномерно эллиптический оператор второго порядка

$$Lu(t,x) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(t,x)u_{x_j}(t,x))$$

с симметричной и положительно определенной матрицей $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$. При этом, для некоторой константы $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma|\xi|^2, \quad (t,x) \in \bar{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Всюду далее считаем, что $a_{ij}(t,x)$, $c(t,x)$, $k(t,x)$, $k_t(t,x) \in C(\bar{Q})$. Обозначим через V пространство таких функций $\varphi(t,x) \in C^2(\bar{Q})$, что $\varphi(t,x) = 0$ и $\varphi(t,x)\big|_S = 0$. Обобщенным решением задачи (3.1)-(3.2) назовем такую функцию $u(t,x) \in L_1(Q)$, что для любой функции $\varphi(t,x) \in V$ справедливо равенство

$$\int\limits_Q kuD^\nu_T\varphi\, dQ - \int\limits_Q u\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\varphi_{x_j})\, dQ + \int\limits_Q cu\varphi\, dQ = \int\limits_Q f\varphi\, dQ. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1.1. *Пусть* $p > 1$, $k(t,x) \geqslant 0$ *и* $c(t,x) \geqslant c_0$ *для некоторого* $c_0 > 0$ *и* $(t,x) \in \bar{Q}$. *Тогда для любой* $f \in L_p(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (3.1)-(3.2) *из класса* $L_p(Q)$. *При этом если* $p < 2$, *то* $u \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, *а если* $p \geqslant 2$, *то* $u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$

Доказательство. Для доказательства применим метод регуляризации. Пусть $\varepsilon > 0$. В цилиндре Q рассмотрим задачу

$$\varepsilon u_t + K_{\nu,\varepsilon}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u = f_\varepsilon(t,x), \tag{3.4}$$

$$u(t,x)\big|_S = 0,$$

$$u(0,x) \ = 0, \tag{3.5}$$

с регуляризованным оператором $K_{\nu,\varepsilon}$, определенным в разделе 1.3. Считаем, что $f_\varepsilon \in C(\bar{Q})$ и $f_\varepsilon \to f$ сильно в $L_p(Q)$ при $\varepsilon \to 0$. Коль скоро ядро оператора не имеет особенности, нетрудно показать, что задача (3.4)-(3.5) имеет решение $u(t,x) \in L_\infty(Q)$. При этом $u_t \in L_2(Q)$, $u \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

Пусть $0 < z < T$. Умножим уравнение (3.4) на $2\operatorname{sign}(u(t,x))|u(t,x)|^{p-1}$ и проинтегрируем по $Q_z = (0,z) \times \Omega$. Выбирая $0 < \mu < c_0/2$, по лемме 1.2.4 для $z \geqslant \delta(\mu)$ получаем неравенство

$$2\gamma \int\limits_{Q_z} |u|^{p-2}|\nabla u|^2\, dQ + c_0 \int\limits_{Q_z} |u|^p\, dQ \leqslant 2 \int\limits_{Q_z} |f||u|^{p-1}\, dQ + C(\mu) \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^{z-\delta(\mu)} |u|\, dt \right)^p dx.$$

При этом константы $\delta(\mu)$ и $C(\mu)$ не зависят от ε (см. замечание 1.2.1). Ясно, что при $z \leqslant \delta(\mu)$ отсюда имеем оценку

$$\int\limits_{Q_z} |u|^{p-2}|\nabla u|^2\, dQ + \int\limits_{Q} |u|^p\, dQ \leqslant C \int\limits_{Q} |f|^p\, dQ.$$

В частности

$$\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^{\delta(\mu)} |u|\, dt \right)^p dx \leqslant C.$$

Далее действуем индуктивным образом и приходим к оценке

$$\int\limits_{Q} |u|^{p-2}|\nabla u|^2\, dQ + \int\limits_{Q} |u|^p\, dQ \leqslant C \int\limits_{Q} |f|^p\, dQ. \tag{3.6}$$

Если $p \leqslant 2$, то с помощью неравенства Юнга отсюда получаем

$$\int\limits_Q |\nabla u|^p \, dQ \leqslant \int\limits_Q |u|^{p-2} |\nabla u|^2 \, dQ + \int\limits_Q |u|^p \leqslant C \int\limits_Q |f|^p \, dQ.$$

Дальнейшее уже стандартно. Для всякого $\varepsilon > 0$ решаем задачу (3.4)-(3.5) и получаем решение $u_\varepsilon(t,x)$, удовлетворяющее неравенству 3.6. Выберем последовательность ε_n так, что

$$\varepsilon_n \to 0,$$

и для некоторой функции $u(t,x) \in L_p(Q)$ (далее индекс n опускаем)

$$u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{слабо в } L_p(Q).$$

Умножим уравнение (3.4) на пробную функцию $\varphi(t,x)$, проинтегрируем по цилиндру Q и перейдем к пределу. Получим обобщенное решение задачи (3.1)-(3.2). ■

Можно показать, что такое решение единственно. Ради простоты мы рассмотрим лишь случай, когда коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ и $c(t,x)$ не зависят от x.

Теорема 3.1.2. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ и $c(t,x)$ не зависят от x. При условии теоремы 3.1.1 обобщенное решение задачи (3.1)-(3.2) единственно.*

Доказательство. Для доказательства применяем технику с использованием решений сопряженной задачи, аналогично доказательству теоремы 2.1.4.

Обозначим $k_1(t,x) = k(T-t,x)$, $q = p'$. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $g(t,x)$ — гладкая функция, причем $g(0,x) = 0$. В цилиндре Q рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_{\varepsilon t} + k_1(t,x) K_{\nu,\varepsilon} u_\varepsilon(t,x) - L(x, D_x) u_\varepsilon(t,x) + c(x) u_\varepsilon(t,x) = g(t,x), \qquad (3.7)\\ &u_\varepsilon(t,x)\big|_S = 0,\\ &u_\varepsilon(0,x) \;= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Далее, там, где это не вызовет недоразумений, индекс ε опускаем и вместо $u_\varepsilon(t,x)$ пишем просто $u(t,x)$. Как и раньше, легко убедиться, что решение этой задачи существует и

$$\|u(t,x)\|_{L_q(Q)} \leqslant \|g(t,x)\|_{L_q(Q)}.$$

Причем, в силу гладкости $g(t,x)$ существует производная u_{tt} и $u_t(0,x) = 0$. Обозначим $v(t,x) = K_{\nu,\varepsilon} u(t,x)$ и применим оператор $K_{\nu,\varepsilon}$ к уравнению (3.7).

Тогда

$$\begin{aligned}
&\varepsilon v_t + K_{\nu,\varepsilon}(k_1(t,x)v(t,x)) - L(x,D_x)v(t,x) + c(x)v = K_{\nu,\varepsilon}g(t,x),\\
&v(t,x)\big|_S = 0,\\
&v(0,x) \ = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|v(t,x)\|_{L_q(Q)} \leqslant \|g_t(t,x)\|_{L_q(Q)},$$

и

$$\varepsilon u_t - L(x,D_x)u(t,x) + c(x)u = G(t,x),$$

причем

$$\|G(t,x)\|_{L_q(Q)} \leqslant C(\|g(t,x)\|_{L_q(Q)} + \|g_t(t,x)\|_{L_q(Q)}).$$

Данное уравнение обладает свойством максимальной регулярности, поэтому

$$\varepsilon\|u_t\|_{L_q(Q)} + \|L(x,D_x)u\|_{L_q(Q)} \leqslant C(\|g(t,x)\|_{L_q(Q)} + \|g_t(t,x)\|_{L_q(Q)}).$$

Из этой оценки легко следует, что функцию $\varphi(t,x) = u_\varepsilon(T-t,x)$ можно использовать в качестве пробной в тождестве (3.3). Причем при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon u_{\varepsilon t} \rightharpoonup 0 \text{ слабо в } L_q(Q).$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями теоремы 2.1.4. ■

3.2 Уравнение дробной диффузии с меняющимся направлением эволюции

В цилиндре Q рассматриваем следующую задачу для модельного уравнения

$$\begin{aligned}
&\partial_t^\nu(k(t,x)u(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma u(t,x) = f(t,x),\\
&u(t,x)|_S = 0,\\
&u(0,x) = u_0(x).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Как уже отмечалось выше, случай $k(t,x) \geqslant k_0 > 0$ достаточно широко представлен в литературе. Для уравнения с постоянным коэффициентом $k(t,x) \equiv k_0$, в основом использовались подходы, связанные с идеей разделения переменных или преобразованием Лапласа. В случае переменных коэффициентов может быть использован подход с использованием априорных оценок, описанных в главе 1. Отметим лишь наиболее харктерные [91], [46], [92], [93], [94].

Нас же будет интересовать постановка корректной задачи в случае, когда коэффициент $k(t, x)$ может менять знак произвольным образом. Очевидно, что в таком случае начальные условия Коши (3.8) следует определенным образом изменить. Например, в случае $k(t, x) \geqslant 0$, часть границы Ω освобождается от задания данных (см. [94]). Для "обычной" производной при определеннных условиях корректна задача

$$\begin{aligned}
&k(t, x)u_t(t, x) - \Delta u(t, x) + \gamma u(t, x) = f(t, x),\\
&u(t, x)|_S = 0,\\
&u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0, x) > 0\},\\
&u(T, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T, x) < 0\}.
\end{aligned}$$

Упомянем книги [32], [8], [7]. Особенно следует отметить работу [30], в которой, среди прочего, глубоко изучался вопрос о единственности обобщенного решения. Как уже говорилось выше, оказывается, что аналогичная постановка корректна и для уравнения дробной диффузии. Мы сводим такую задачу к задаче с уравнением

$$(k(t, x)u(t, x))_t - D^\mu \Delta u(t, x) + \gamma D^\mu u(t, x) = D^\mu f(t, x).$$

Уравнения такого типа (без смены знака и произвольного вырождения) систематически изучались в работах Федорова В.Е, Турова М. М, Бойко К. В. [35], [33], [61], [48], [59](см. также [44]).

Итак, в цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial^\nu(k(t, x)u(t, x)) - \Delta u(t, x) + \gamma u(t, x) = f(t, x), \tag{3.9}$$
$$u(t, x)|_S = 0,$$
$$u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0, x) > 0\}, \tag{3.10}$$
$$u(T, x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T, x) < 0\}. \tag{3.11}$$

Прежде всего, дадим определение обобщенного решения. Обозначим

$$\chi_0(x) = k(0, x)u(0, x), \quad \chi_T(x) = k(T, x)u(T, x).$$

Формально применяя оператор J^ν к уравнению (3.9), приходим к равенству ($t \in [0,T]$)

$$k(t,x)u(t,x) - J^\nu \Delta u(t,x) + \gamma J^\nu u(t,x) = J^\nu f(t,x) + \chi_0(x). \tag{3.12}$$

В частности, для $t = T$

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^\nu \Delta u(T,x) + \gamma J^\nu u(T,x) = J^\nu f(T,x). \tag{3.13}$$

Принимая во внимание (3.10) и (3.11), получаем включения

$$\operatorname{supp} \chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp} \chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+, \tag{3.14}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (3.10), (3.11). В соответствии с этим, мы называем функцию $u(t,x) \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))$ обобщенным решением задачи (3.9)-(3.11), если

$$J^\nu u(t,x) \in C([0,T];\mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad k(t,x)u(t,x) \in C([0,T],W_2^{-1}(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_1(\Omega)$ справедливы равенства (3.12), (3.13) и включение (3.14).

Всюду далее, без особых оговорок, используем обозначение $\mu = 1 - \nu$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\gamma > 0$, $k(t,x), k_t(t,x) \in L_\infty(Q)$, $D^{\mu/2} f(t,x) \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и для некоторого $\gamma_0 > 0$ справедливо неравенство*

$$2C(\mu,T)\gamma + k_t(t,x) \geqslant \gamma_0, \quad (t,x) \in Q, \tag{3.15}$$

с константой $C(\mu,T)$ из неравенства (1.14).

Тогда существует обобщенное решение задачи (3.9)-(3.11), для которого справедлива оценка

$$\|\chi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\chi_T\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C\|f\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$$

Доказательство. Как и в [94] мы используем метод регуляризации, предложенный в [1]. Но сначала формально применим оператор D^μ к уравнению (3.9)

$$(k(t,x)u(t,x))_t - D^\mu \Delta u(t,x) + \gamma D^\mu u(t,x) = D^\mu f(t,x).$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Определим семейство гладких функций $f_\varepsilon(t,x)$ так, чтобы

$$f_\varepsilon(0,x) = 0, \tag{3.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon(t,x) - f(t,x)\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} = 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \|f_\varepsilon(t,x)\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))} = 0. \tag{3.18}$$

Отметим, что условие (3.16) совместно с условием (3.17), коль скоро $\mu < 1$. После этого рассмотрим задачу (see [1])

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon u_{tt} + (k(t,x)u(t,x))_t - D^{\mu}\Delta u(t,x) + \gamma D^{\mu}u(t,x) = D^{\mu}f_{\varepsilon}(t,x), && (3.19)\\
&u(t,x)|_S = 0, &&\\
&-\varepsilon u_t(0,x) + k^{+}(0,x)u(0,x) = 0, && (3.20)\\
&-\varepsilon u_t(T,x) + k^{-}(T,x)u(T,x) = 0. && (3.21)
\end{aligned}
$$

Здесь, как обычно,

$$
\eta^{+} = \begin{cases} \eta, & \eta > 0,\\ 0, & \eta \leqslant 0, \end{cases} \qquad \eta^{-} = \begin{cases} \eta, & \eta < 0,\\ 0, & \eta \geqslant 0. \end{cases}
$$

В свою очередь, разрешимость задачи (3.19)-(3.21) будет установлена с помощью метода Галеркина со специальным базисом. Пусть $\{w_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система собственных функций задачи

$$
\begin{aligned}
&-\Delta w_k = \lambda_k w_k,\\
&w_k(x)|_{\Gamma} = 0.
\end{aligned}
$$

Для любого $n > 0$ обозначим как $E_n \subset L_2(\Omega)$ пространство функций, натянутое на вектора $w_k, k = \overline{1,n}$. Обозначим как P_n ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на пространство E_n. Полагая $\theta = \theta(\varepsilon, n)$ (точное значение будет указано позже), в пространстве E_n рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon v_{ntt}(t,x) + P_n(k(t,x)v_n(t,x))_t - K_{\mu,\theta}\Delta v_n(t,x) &&\\
&+\gamma K_{\mu,\theta}v_n(t,x) = K_{\mu,\theta}f_{n\varepsilon}(t,x), && (3.22)\\
&v_n(t,x)|_S = 0, &&\\
&-\varepsilon v_{nt}(x,0) + P_n(k^{+}(0,x)v_n(0,x)) = 0, && (3.23)\\
&-\varepsilon v_{nt}(T,x) + P_n(k^{-}(T,x)v_n(T,x)) = 0. && (3.24)
\end{aligned}
$$

Здесь $K_{\mu,\theta}$ — регуляризованный оператор из раздела 1.3, и

$$
\begin{aligned}
v_n(t,x) &= \sum_{k=1}^{n} V_k(t)w_k(x),\\
f_{n\varepsilon}(t,x) &= P_n f_{\varepsilon}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\varepsilon}(t)w_k(x).
\end{aligned}
$$

В дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумения, индекс n опускаем. Заметим, что ядро оператора $K_{\mu,\theta}$ не имеет особенности и допускает интегрирование по частям. Поэтому задача (3.22)-(3.24) — суть система интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $V_k(t)$. Разрешимость такой системы следует из теоремы единственности решения. Так что для доказательства разрешимости достаточно установить подходящую априорную оценку.

Умножим уравнение (3.22) на $2v(t,x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q

$$\int\limits_{\Omega} \big(k(0,x)v^2(0,x) + k(T,x)v(T,x)\big) + 2\varepsilon \int\limits_{Q} v_t^2\, dQ + \int\limits_{Q} k_t v^2\, dQ$$
$$+ 2\int\limits_{Q} \big((K_{\mu,\theta}\nabla v, \nabla v) + \gamma v K_{\mu,\theta} v\big)\, dQ = 2\int\limits_{Q} v K_{\mu,\theta} f_\varepsilon\, dQ. \tag{3.25}$$

Заметим, что в силу неравенства (1.14) оператор $K_{\mu,\theta}$ положительный, и по условияю теоремы справедливо неравенство (3.15). Поэтому из (3.25) следует неравенство

$$\varepsilon\|v_t\|^2_{L_2(Q)} + \gamma_0\|v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2\int\limits_{Q} v K_{\mu,\theta} f_\varepsilon\, dQ.$$

А значит для некоторой достаточно большой константы C (не зависящей от θ) имеют место неравенства (см. также, (3.16))

$$\varepsilon\|v_t\|^2_{L_2(Q)} + \gamma_0\|v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C\|K_{\mu,\theta} f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C\|f\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))}. \tag{3.26}$$

Далее, с помощью леммы 1.3.2 получаем оценку снизу

$$2\int\limits_{Q} \big((K_{\mu,\theta}\nabla v, \nabla v) + \gamma v K_{\mu,\theta} v\big)\, dQ \geqslant C\|v\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} - C\theta^{(1-\mu)/2}\|v\|^2_{W_2^1(0,T;W_2^1(\Omega))}.$$

Пространство E_n конечномерно, а значит для некоторой константы $C(n)$ имеем неравенство

$$\|h\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(n)\|h\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \forall h \in E_n.$$

Поэтому, в силу оценки (3.26), для достаточно малого θ

$$2\int\limits_{Q} \big((K_{\mu,\theta}\nabla v, \nabla v) + \gamma v K_{\mu,\theta} v\big)\, dQ \geqslant$$
$$C\|v\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} - \varepsilon\|f\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))}. \tag{3.27}$$

Правая часть неравенства (3.25) может быть оценена с помощью леммы 1.1.1 и леммы 1.3.1

$$\int\limits_Q vK_{\mu,\theta}f_\varepsilon\,dQ = \int\limits_Q vD^\mu f_\varepsilon\,dQ + \int\limits_Q v(K_{\mu,\theta}f_\varepsilon - D^\mu f_\varepsilon)\,dQ =$$

$$\int\limits_0^T \sum_k V_k(t)D^\mu F_{k\varepsilon}(t)\,dt + \int\limits_0^T \sum_k V_k(t)(K_{\mu,\theta}F_{k\varepsilon}(t) - D^\mu F_{k\varepsilon}(t))\,dt \leqslant$$

$$C\|f\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\|v\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} + C\theta^{(1-\mu)/2}\|f\|_{W_2^1(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\|v\|_{W_2^1(0,T;W_2^1(\Omega))}.$$

Как и ранее, выбирая θ достаточно малым и принимая во внимание условие (3.18), получаем оценку

$$\int\limits_Q vK_{\mu,\theta}f_\varepsilon\,dQ \leqslant C\|f\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\|v\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} + \varepsilon\|f\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))} \quad (3.28)$$

Собирая оценки (3.25), (3.27) и (3.28) вместе, получаем окончательную оценку

$$\int\limits_\Omega (|k(0,x)|v^2(0,x) + |k(T,x)|v^2(T,x))\,dx + \varepsilon\int\limits_Q v_t^2\,dQ + \int\limits_Q v^2\,dQ + \int\limits_Q |D^{\mu/2}v|^2\,dQ$$

$$+ \int\limits_Q |D^{\mu/2}\nabla v|^2\,dQ \leqslant C\|D^{\mu/2}f_\varepsilon\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} + C\varepsilon\|f\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))}. \quad (3.29)$$

Таким образом, желаемая оценка получена, в силу которой задача (3.22)-(3.24) однозначно разрешима. Отметим, что для п.в. $(t,x) \in Q$ выполняется равенство

$$(-\varepsilon v_{nt} + P_n(kv_n))\big|_0^t = J_{\nu,\theta}(P_nf_\varepsilon + \Delta v_n - \gamma v_n).$$

И, благодаря условиям (3.23), (3.24),

$$P_n(k^+v_n(T,x)) - P_n(k^-v_n(0,x)) = J_{\nu,\theta}(P_nf_\varepsilon(T,x) + \Delta v_n(T,x) - \gamma v_n(T,x)).$$

Теперь можно переходить к пределу при $n \to \infty$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можем считать, что для некоторых функций $z_{\varepsilon 0}(x)$, $z_{\varepsilon T}(x)$, $u_\varepsilon(t,x)$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\sqrt{|k(0,x)|}v_n(0,x) \rightharpoonup z_{\varepsilon 0}(x), \qquad \text{слабо в } L_2(\Omega), \quad (3.30)$$

$$\sqrt{|k(T,x)|}v_n(T,x) \rightharpoonup z_{\varepsilon T}(x), \qquad \text{слабо в } L_2(\Omega), \quad (3.31)$$

$$v_n(t,x) \rightharpoonup u_\varepsilon(t,x), \qquad \text{слабо в } W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega)), \quad (3.32)$$

$$v_{nt}(t,x) \rightharpoonup u_{\varepsilon t}(t,x), \qquad \text{слабо в } L_2(Q). \quad (3.33)$$

В этом случае, благодаря оценке (3.29),

$$\varepsilon\|u_{\varepsilon t}\|^2_{L_2(Q)} + \|J^\nu u_\varepsilon\|_{W_2^{\frac{1+\nu}{2}}(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C. \tag{3.34}$$

В частности, $J^\nu u_\varepsilon(t,x) \in C([0,T];W_2^1(\Omega))$ и $J^\nu u_\varepsilon(0,x) = 0$. Далее, обозначим

$$\chi_{0\varepsilon}(x) = -\sqrt{|k^-(0,x)|}z_{\varepsilon 0}(x), \quad \chi_{T\varepsilon}(x) = \sqrt{|k^+(T,x)|}z_{\varepsilon T}(x).$$

Совершенно очевидно, что эти функции удовлетворяют включениям (3.14), и (в силу условий (3.23), (3.24)) равенствам

$$-\varepsilon u_{\varepsilon t} + k u_\varepsilon - \chi_{0\varepsilon} = J_\nu(f_\varepsilon + \Delta u_\varepsilon - \gamma u_\varepsilon),$$
$$\chi_{T\varepsilon}(x) - \chi_{0\varepsilon}(x) = J_\nu(f_\varepsilon(T,x) + \Delta u_\varepsilon(T,x) - \gamma u_\varepsilon(T,x)).$$

Теперь можно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$. Все действия стандартные и мы их опускаем. Отметим лишь, что в силу оценки (3.34) можно считать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon u_{\varepsilon t}(t,x) \to 0, \quad \text{in } L_2(Q).$$

■

Что касается единственности обобщенных решений, то мы докажем лишь один весьма простой результат. Более общую теорему единственности можно получить с привлечением усреднений. Такая техника будет предъявлена в следующей главе.

Теорема 3.2.2. *Предположим, что $k(0,x) \geqslant 0$ и $k(T,x) \geqslant 0$, а $\gamma > 0$ достаточно велико. Тогда обобщенное решение задачи (3.9)-(3.11) единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (3.9)-(3.11) с $f(t,x) \equiv 0$. Тогда выполнено равенство

$$k(t,x)u(t,x) - J^\nu \Delta u(t,x) + \gamma J^\nu u(t,x) = \chi_0(x).$$

В соответствии с (3.14) и неравенством $k(0,x) \geqslant 0$ имеем

$$\chi_0(x) \equiv 0.$$

Обозначим

$$v(t,x) = \int\limits_0^t u(s,x)\,ds.$$

Тогда (см. (1.2))

$$k(t,x)v_t(t,x) - D^{\mu}\Delta v(t,x) + \gamma D^{\mu} v(t,x) = 0. \tag{3.35}$$

Умножим уравнение (3.35) на $2v(t,x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q

$$\int\limits_{\Omega} k(T,x)v^2(T,x)\,dQ + 2\int\limits_{Q}(D^{\mu}\nabla v(t,x), \nabla v(t,x))\,dQ +$$
$$2\gamma\int\limits_{Q} v(t,x)D^{\mu}v(t,x)dQ - \int\limits_{Q} k_t(t,x)v^2(t,x)dQ = 0.$$

Следовательно, по лемме (1.2.7) $v(t,x) \equiv 0$, если γ достаточно велико. ■

Уравнение дробной диффузии с вырождением и изменяющимся направлением эволюции

Глава 4. Дробно-волновое уравнение с меняющимся направлением эволюции

В цилиндре Q рассматриваем смешанную задачу для модельного уравнения

$$\partial_t^\gamma(k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma u_t(t,x) = f(t,x), \tag{4.1}$$

с коэффициентом $k(t,x) \in C^1(\bar{Q})$ произвольного знака.

Как и в случае уравнения дробной диффузии мы ставим задачу аналогичную задаче для уравнения смешанного типа

$$\begin{aligned}
&(k(t,x)u_t(t,x))_t - \Delta u(t,x) + \gamma u_t(t,x) = f(t,x),\\
&u(t,x)|_S = 0,\\
&u(0,x) = 0,\\
&u_t(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\},\\
&u_t(T,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}.
\end{aligned}$$

Впервые задачи такого типа были поставлены в работах [9], [4]. В дальнейшем данное направление получило развитие в работах различных авторов (см. [8]).

Оказывается, что при определенных условиях аналогичная задача корректна и для уравнения (4.1). В теореме существования обобщенного решения ограничений на поведение функций $k(0,x)$, $k(T,x)$ не потребуется. А вот в теореме единственности мы будем предполагать, что эти функции не меняют знак.

Уравнения такого рода (без изменения знака коэффициента $k(t,x)$) возникают в различных моделях вязкоупругости [86], [36], [34]. Нелинейные уравнения активно изучались в работах G. Gripenberg [64], [65], [66], [67], H. Engler [57], [56], J. Nechas [45] и др.

4.1 Теорема существования обобщенного решения

По некоторым техническим причинам мы рассматриваем несколько более общее уравнение

$$\partial^\nu(k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma_1 u_t(t,x) + \gamma_2\partial^\nu u(t,x) = f(t,x), \tag{4.2}$$

$$u(t,x)|_S = 0, \tag{4.3}$$

$$u(0,x) = 0,$$

$$u_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\}, \tag{4.4}$$

$$u_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}. \tag{4.5}$$

Обобщенное решение определяется вполне аналогично определению для уравнения дробной диффузии. Обозначим

$$\chi_0(x) = k(0,x)u_t(0,x), \quad \chi_T(x) = k(T,x)u_t(T,x).$$

Заметим, что в силу (4.4) и (4.5), справедливы включения

$$\operatorname{supp}\chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp}\chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+,, \tag{4.6}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (4.4), (4.5). Формально применяя оператор J^ν к уравнению (4.2), приходим к равенству ($t \in [0,T]$)

$$k(t,x)u_t(t,x) - J^\nu\Delta u(t,x) + \gamma_1 J^\nu u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x) = J^\nu f(t,x) + \chi_0(x). \tag{4.7}$$

В частности,

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^\nu\Delta u(T,x) + \gamma_1 J^\nu u_t(T,x) + \gamma_2 u(T,x) = J^\nu f(T,x). \tag{4.8}$$

Обобщенным решением задачи (4.2)-(4.5) называем функцию такую функцию $u(t,x) \in L_2(Q)$, что

$$u_t(t,x) \in L_2(Q), \quad u(0,x) = 0,$$
$$\partial^{1-\nu}u(t,x) \in C([0,T];W_2^{-1}(\Omega)), \quad k(t,x)u_t(t,x) \in C([0,T],W_2^{-1}(\Omega)),$$
$$u(t,x) \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad J^\nu u(t,x) \in C([0,T];\mathring{W}_2^1(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_2(\Omega)$ справедливы уравнения (4.7), (4.8) и включения (4.6).

Всюду далее, без особого упоминания, используем обозначение $\mu = 1 - \nu$.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $\gamma_1 \geqslant 0$, $f(t,x) \in W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))$ *и для некоторого* $\gamma_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$2C_K(\mu,T)\gamma_1 + 2\gamma_2 + k_t(t,x) \geqslant \gamma_0, \quad (t,x) \in Q, \tag{4.9}$$

с константой $C_K(\mu,T)$ *из неравенства* (1.14). *Тогда у задачи* (4.2)-(4.5) *существует обобщенное решение, удовлетворяющее оценкам*

$$u(t,x) \in W_2^{\frac{1+\mu}{2}}(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad u_t(t,x) \in W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,T;L_2(\Omega)) \tag{4.10}$$

и

$$\|\chi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\chi_T\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{W_2^{\frac{1+\mu}{2}}(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))} \leqslant C\|f\|^2_{W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Более того, если $D^\mu f(t,x) \in L_2(Q)$, *то*

$$\int_Q (C_K(\mu,T)\gamma_1 + \gamma_2 + k_t(t,x)/2)u_t^2(t,x)\,dQ \leqslant \int_Q D^\mu f(t,x) u_t(t,x)\,dQ. \tag{4.11}$$

Доказательство. Как и для уравнения дробной диффузии используем метод регуляризации, предложенный в [1]. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Определим семейство гладких функций $f_\varepsilon(t,x)$ таким образом, что

$$f_\varepsilon(0,x) = 0, \tag{4.12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon(t,x) - f(t,x)\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))} = 0, \tag{4.13}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|f_\varepsilon(t,x)\|^2_{W_2^1(0,T;L_2(\Omega))} = 0. \tag{4.14}$$

Отметим, что условие (4.12) совместно с условием (4.13), поскольку $\mu < 1$. Далее рассматриваем регуляризованную задачу (см. [1])

$$-\varepsilon u_{ttt} + (k(t,x)u_t(t,x))_t - D^\mu \Delta u(t,x) + \gamma_1 D^\mu u_t(t,x) + \gamma_2 u_t(t,x) = D^\mu f_\varepsilon(t,x),$$

$$u(t,x)|_S = 0,$$

$$u(0,x) = 0,$$

$$-\varepsilon u_{tt}(0,x) + k^+(0,x)u_t(0,x) = 0,$$

$$-\varepsilon u_{tt}(T,x) + k^-(T,x)u_t(T,x) = 0.$$

Здесь, как обычно,

$$\eta^+ = \begin{cases} \eta, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leqslant 0, \end{cases} \qquad \eta^- = \begin{cases} \eta, & \eta < 0, \\ 0, & \eta \geqslant 0. \end{cases}$$

Для доказательства разрешимости этой задачи используем метод Галеркина со специальным базисом. Пусть $\{w_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система собственных функций задачи

$$
\begin{aligned}
-\Delta w_k &= \lambda_k w_k,\\
w_k(x)|_\Gamma &= 0.
\end{aligned}
$$

Для всякого $n > 0$ обозначим как $E_n \subset L_2(\Omega)$ пространство функций, натянутое на вектора w_k, $k = \overline{1,n}$. Отметим, что в силу конечномерности пространства E_n, найдется такая константа $C(n)$, что

$$
\|h\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(n)\|h\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \forall h \in E_n. \tag{4.15}
$$

Обозначим как P_n ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство E_n. Далее полагаем $\theta = \theta(\varepsilon, n)$ (точное значение будет указано позже) и рассматриваем следующую задачу

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon v_{nttt}(t,x) + P_n(k(t,x)v_{nt}(t,x))_t - K_{\mu,\theta}\Delta v_n(t,x)\\
&+\gamma_1 K_{\mu,\theta} v_{nt}(t,x) + \gamma_2 v_{nt} = K_{\mu,\theta} P_n f_\varepsilon(t,x), && (4.16)\\
&v_n(t,x)|_S = 0,\\
&v_n(0,x) = 0, && (4.17)\\
&-\varepsilon v_{ntt}(x,0) + P_n(k^+(0,x)v_{nt}(0,x)) = 0, && (4.18)\\
&-\varepsilon v_{ntt}(T,x) + P_n(k^-(T,x)v_{nt}(T,x)) = 0. && (4.19)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
v_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} V_k(t) w_k(x).
$$

В дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумения, индекс n опускаем. Как обычно, разрешимость задачи (4.16)-(4.19) следует из единственности решения. Так что нам следует получить подходящую оценку для решения.

Умножим уравнение (4.16) на $2v_t(t,x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q

$$
\int\limits_\Omega \left(|k(0,x)|v_t^2(0,x) + |k(T,x)|v_t^2(T,x)\right) + 2\varepsilon \int\limits_Q v_{tt}^2\,dQ + \int\limits_Q (2\gamma_2 + k_t)v_t^2\,dQ
$$
$$
+ 2\int\limits_Q \left((K_{\mu,\theta}\nabla v, \nabla v_t) + \gamma_1 v_t K_{\mu,\theta} v_t\right)\,dQ = 2\int\limits_Q v_t K_{\mu,\theta} f_\varepsilon\,dQ. \tag{4.20}
$$

Пусть $\delta > 0$. С помощью неравенств (1.14), (4.15) и лемм 1.3.2, 1.3.3 и 1.1.1 получаем

$$\int\limits_{\Omega} \big(|k(0,x)|v_t^2(0,x) + |k(T,x)|v_t^2(T,x)\big) + 2\varepsilon \int\limits_{Q} v_{tt}^2\, dQ + 2\delta C_{K1}\|v_t\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))}$$
$$+ \int\limits_{Q} (2C_K(\gamma_1-\delta) + 2\gamma_2 + k_t)v_t^2\, dQ + C_{K3}\|\nabla v\|_{W_2^{(1+\mu)/2}(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant$$
$$2\theta^{(1-\mu)/2}\|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)}(\delta C_{K2} + C(n)C_{K4}) + C\|f\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))}\|u_t\|_{W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Выбирая δ и θ достаточно малыми, получаем требуемую оценку

$$\int\limits_{\Omega} \big(|k(0,x)|v_t^2(0,x) + |k(T,x)|v_t^2(T,x)\big) + \varepsilon \int\limits_{Q} v_{tt}^2\, dQ+$$
$$\|v_t\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega))} + \|\nabla v\|_{W_2^{(1+\mu)/2}(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant C\|f\|^2_{W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,T;L_2(\Omega))}. \tag{4.21}$$

Как уже говорилось, эта оценка гарантирует, что задача (4.16)-(4.19) однозначно разрешима. Отметим, что для $(t,x)\in Q$ имеет место равенство

$$(-\varepsilon v_{ntt} + P_n(kv_{nt}))\big|_0^t = J_{\nu,\theta}(P_nf_\varepsilon + \Delta v_n - \gamma_1 v_{nt}) - \gamma_2 v_n.$$

И, в силу условий (4.17),(4.18) и (4.19),

$$P_n(k^+(T,x)v_{nt}(T,x)) - P_n(k^-(0,x)v_{nt}(0,x)) =$$
$$J_{\nu,\theta}(P_nf_\varepsilon + \Delta v_n - \gamma_1 v_{nt})(T,x) - \gamma_2 v_n(T,x).$$

Теперь можно переходить к пределу при $n\to\infty$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, считаем, что $z_{\varepsilon 0}(x)$, $z_{\varepsilon T}(x)$, $u_\varepsilon(t,x)$ for $n\to\infty$ convergence takes place

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|k(0,x)|}v_{nt}(0,x) \rightharpoonup z_{\varepsilon 0}(x), && \text{weakly in } L_2(\Omega),\\
&\sqrt{|k(T,x)|}v_{nt}(T,x) \rightharpoonup z_{\varepsilon T}(x), && \text{weakly in } L_2(\Omega),\\
&v_n(t,x) \rightharpoonup u_\varepsilon(t,x), && \text{weakly in } W_2^{(1+\mu)/2}(0,T;W_2^1(\Omega)),\\
&v_{nt}(t,x) \rightharpoonup u_{\varepsilon t}(t,x), && \text{weakly in } W_2^{\mu/2}(0,T;L_2(\Omega)).
\end{aligned}$$

При этом, благодаря (4.21), имеет место оценка

$$\varepsilon\|u_{\varepsilon tt}\|^2_{L_2(Q)} + \|J^\nu u_{\varepsilon t}\|_{W_2^{\frac{1+\nu}{2}}(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C. \tag{4.22}$$

В частности, $J^\nu u_{\varepsilon t}(t,x) \in C([0,T]; W_2^1(\Omega))$ и $J^\nu u_{\varepsilon t}(0,x) = 0$. Далее, обозначим

$$\chi_{0\varepsilon}(x) = -\sqrt{|k^-(0,x)|}\, z_{\varepsilon 0}(x), \quad \chi_{T\varepsilon}(x) = \sqrt{|k^+(T,x)|}\, z_{\varepsilon T}(x).$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют включениям (4.6), и, в силу условий (4.18), (4.19), справедливы равенства

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_{\varepsilon tt} + k u_{\varepsilon t} - \chi_{0\varepsilon} &= J_\nu(f_\varepsilon + \Delta u_\varepsilon - \gamma_1 u_{\varepsilon t}) - \gamma_2 u_{\varepsilon t}, \\ \chi_{T\varepsilon}(x) - \chi_{0\varepsilon}(x) &= J_\nu(f_\varepsilon + \Delta u_\varepsilon - \gamma_1 u_{\varepsilon t})(T,x) - \gamma_2 u_{\varepsilon t}(T,x). \end{aligned}$$

Теперь уже можно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$. Все действия стандартные и мы их опускаем.

Предположим, что $D^\mu f(t,x) \in L_2(Q)$. Тогда переходя к пределу при $n \to \infty$, а потом и при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (4.20), получаем (4.11). ■

4.2 Единственность обобщенных решений дробно-волнового уравнения

Как уже упоминалось ранее, случай, когда функции $k(0,x)$ и $k(T,x)$ меняют знак, представляет из себя весьма сложную проблему даже для уравнений с обычной производной. Вообще говоря, единственность обобщенного решения тесно связана с возможностью повышения гладкости решения в случае гладких входных данных. Для уравнения смешанного типа такая возможность была доказана лишь сравнительно недавно (см. [1]) с помощью весьма громоздких оценок. Для уравнения с дробной производной такие выкладки проделать не удалось. Поэтому мы будем предполагать, что функции $k(0,x)$ и $k(T,x)$ не меняют свой знак.

Сначала рассмотрим один простой случай.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что $k(0,x) \geqslant 0$ и $k(T,x) \geqslant 0$, $\gamma_1 > 0$, а $\gamma_2 > 0$ достаточно велико. Тогда обобщенное решение задачи (4.2)-(4.5) единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (4.2)-(4.5) с $f(t,x) \equiv 0$. Тогда выполнено равенство

$$k(t,x)u_t(t,x) - J^\nu \Delta u(t,x) + \gamma_1 \partial^{1-\nu} u(t,x) + \gamma_2 u(t,x) = \chi_0(x). \qquad (4.23)$$

В соответствии с (4.6) и неравенством $k(0,x) \geqslant 0$ имеем

$$\chi_0(x) \equiv 0.$$

Умножим уравнение (4.23) на $2u(t,x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q

$$\int\limits_{\Omega} k(T,x)u^2(T,x)\,dx + 2\int\limits_{Q} (J^{\nu}\nabla u(t,x), \nabla u(t,x))\,dQ +$$
$$2\gamma_1 \int\limits_{Q} u(t,x)\partial^{1-\nu}u(t,x)\,dQ + \int\limits_{Q} (2\gamma_2 - k_t(t,x))u^2(t,x)\,dQ = 0.$$

Следовательно, как и ранее

$$\int\limits_{Q} (2\gamma_2 - k_t(t,x))u^2(t,x)\,dQ \leqslant 0,$$

и $u(t,x) \equiv 0$, при условии $2\gamma_2 - k_t(t,x) \geqslant \bar{\gamma} > 0$. ■

Замечание 4.2.1. *Любопытно отметить, что данное доказательство весьма похоже на доказательство теоремы единственности решений волнового уравнения ([15, теорема 3.1, стр. 210]).*

Следствие 4.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.1. Предположим, что $k(0,x) \geqslant 0$ и $k(T,x) \geqslant 0$. Тогда обобщенное решение задачи (4.2)-(4.5) единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ — обобщенное решение задачи (4.2)-(4.5) с $f(t,x) \equiv 0$. Ясно, что для любого $\lambda > 0$ имеет место формальное равенство

$$\partial^{\nu}(k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma_1 u_t(t,x) + (\gamma_2 + \lambda)\partial^{\nu}u(t,x) = \lambda\partial^{\nu}u(t,x). \quad (4.24)$$

Заметим, что $D^{\mu}\partial^{\nu}u(t,x) = u_t(t,x) \in L_2(Q)$. Считая правую часть в уравнении (4.24) известной, применим теорему (4.2.1) к задаче (4.24), (4.3)-(4.5). Согласно этой теореме, если λ достаточно велико, то обобщенное решение единственно. Тогда по теореме 4.1.1 (см. (4.11))

$$\int\limits_{Q} (C_K(\mu,T)\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda + k_t(t,x)/2)u_t^2(t,x)\,dQ \leqslant \int\limits_{Q} \lambda u_t^2(t,x)\,dQ.$$

Следовательно,

$$\gamma_0 \int\limits_{Q} u_t^2(t,x)\,dQ \leqslant 0,$$

и $u(t,x) \equiv 0$. ■

К сожалению, такие простые рассуждения как в теореме 4.2.1, не применимы, если $k(0,x) \leqslant 0$ или $k(T,x) \leqslant 0$. В этих случаях приходится применять технику с усреднением. В целом, рассуждения не очень сложные, но загромождены громоздкими техническими деталями. Вся проблема в том, что для усреднения нужно "разумным" образом продолжить решение вне интервала $(0,T)$. В тех случаях, когда это не удается, приходится работать на интервале вида $(\delta, T-\delta)$. В результате возникают многочисленные дополнительные слагаемые, которые нуждаются в дополнительных оценках.

Для любых a,b обозначим

$$Q_{a,b} = (a,b) \times \Omega.$$

Прежде всего, продолжим функцию $u(t,x)$ на интервал $Q_{-T,2T}$, по формуле

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ u(2T-t,x), & t > T. \end{cases}$$

А функцию $k(t,x)$ продолжаем таким образом, чтобы $k(t,x) \in C^1(\bar{Q}_{-T,2T})$, и условие (4.9) выполнялось в цилиндре $\bar{Q}_{-T,2T}$. Пусть $\rho(t) \geqslant 0$ гладкая четная функция такая, что $\operatorname{supp}\rho(t) \subset (-1,1)$ и

$$\operatorname{sign}(t)\rho'(t) \leqslant 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} \rho(t)\,dt = 1. \tag{4.25}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{-1}^{1} t\rho'(t)\,dt = -1. \tag{4.26}$$

Для всякого $\delta > 0$ обозначим

$$\rho_\delta(t) = \frac{1}{\delta}\rho\left(t/\delta\right), \quad u_\delta(t,x) = \rho_\delta(t) * u(t,x).$$

Лемма 4.2.1. *Пусть $a < b$, $w(t,x) \in L_2(Q_{a,b})$, $0 < 2\delta < b-a$. Обозначим $\tilde{Q}_\delta = Q_{a+\delta,b-\delta}$ и*

$$F(\delta,t,x) = k(t,x)(\rho_\delta(t) * w(t,x)) - \rho_\delta(t) * (k(t,x)w(t,x)).$$

Тогда $F_t(\delta,t,x) \in L_2(\tilde{Q}_\delta)$ и

$$\|F_t(\delta,t,x)\|_{L_2(\tilde{Q}_\delta)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Доказательство. Пусть $(t,x) \in \tilde{Q}_\delta$. Легко видеть, что

$$F_t(\delta,t,x) = k'(t,x)\int\limits_a^b \rho_\delta(t-s)w(s,x)\,ds + k(t,x)\int\limits_a^b \rho'_\delta(t-s)w(s,x)\,ds -$$

$$-\int\limits_a^b \rho'_\delta(t-s)k(s,x)w(s,x)\,ds =$$

$$\int\limits_a^b (\rho_\delta(t-s)k'(t,x) - \rho'_\delta(t-s)(k(s,x)-k(t,x)))w(s,x)\,ds. \quad (4.27)$$

По формуле Тейлора

$$k(s,x) = k(t,x) + k'(t,x)(s-t) + o(|s-t|).$$

Обозначим

$$\tilde{\rho}(t) = \rho_\delta(t) + t\rho'_\delta(t).$$

Тогда

$$F_t(\delta,t,x)(t,x) = k'(t,x)\,(\tilde{\rho}(t) * w(t,x)) + o(\delta)\int\limits_a^b |\rho'_\delta(t-s)||w(s,x)|\,ds = F_1 + F_2.$$

Из определения функции $\rho_\delta(t)$ легко следует, что

$$\|\rho'_\delta(t)\|_{L_1(-\delta,\delta)} \leqslant \frac{C}{\delta}. \quad (4.28)$$

Тогда с помощью неравенства Хаусдорфа-Юнга получаем

$$\|F_2\|_{L_2(a,b)} \leqslant o(\delta)\frac{C}{\delta} = o(1), \quad \delta \to 0.$$

Принимая во внимание равенства (4.25), (4.26), получаем требуемые утверждения. ■

Лемма 4.2.2. *Пусть* $a < b$, $0 < \alpha < 1/2$, $w(t,x) \in W_2^\alpha(a,b;L_2(\Omega))$, $0 < 2\delta < b-a$. *Тогда для некоторого* $\beta = \beta(\alpha,a,b) > 0$ *и любого* $t_0 \in [a+\delta, b-\delta]$ *справедливо неравенство*

$$\|w_\delta(t_0,x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\delta^{\beta-1}\|w(t,x)\|^2_{W_2^\alpha(a,b;L_2(\Omega))}.$$

Доказательство. Пусть

$$1/q = 1/2 - \alpha, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

По теореме Харди-Литтлвуда для п.в $x \in \Omega$ имеем неравенство

$$\|w(t,x)\|_{L_q(a,b)} \leqslant C\|w(t,x)\|_{W_2^\alpha(a,b)}.$$

Следовательно,

$$|w_\delta(t_0,x)| \leqslant C\|\rho_\delta(t)\|_{L_p(-\delta,\delta)}\|w(t,x)\|_{W_2^\alpha(a,b)} \leqslant C\delta^{(1-p)/p}\|w(t,x)\|_{W_2^\alpha(a,b)}.$$

Заметим, что $1 < p < 2$. Так что полагаем $\beta = (2-p)/p$ и получаем

$$\|w_\delta(t_0,x)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\delta^{\beta-1}\|w(t,x)\|^2_{W_2^\alpha(a,b;L_2(\Omega))}.$$

■

Лемма 4.2.3. *Пусть* $a < b$, $w(t,x) \in L_2(Q_{a,b})$, $\tilde{k}(t,x) \in C^1(Q_{a,b})$, $\tilde{k}(a,x) = 0$, $0 < 2\delta < b-a$. *Продолжим нулем функции* $\tilde{k}(t,x)$, $w(t,x)$ *для* $t < a$ *и рассмотрим функцию* $(\tilde{k}w)_\delta(t,x)$. *Тогда*

$$\|(\tilde{k}w)_{\delta t}(t,x)\|_{L_2(Q_{a-\delta,a})} \leqslant C\|w(t,x)\|_{L_2(Q_{a,a+\delta})}.$$

Доказательство. Очевидным образом, для $t < a$

$$(\tilde{k}w)_{\delta t}(t,x) = \tilde{k}(t,x)\rho'_\delta * w(t,x) + \int\limits_a^{a+\delta} \rho'_\delta(t-s)(\tilde{k}(s,x) - \tilde{k}(t,x))w(s,x)\,ds.$$

Осталось заметить, что $\tilde{k}(s,x) - \tilde{k}(t,x) = O(|s - t|)$ и использовать неравенство (4.28). ■

Лемма 4.2.4. *Let* $a < b$, $0 < \alpha < 1$, $w(t) \in W_2^\alpha(a,b)$. *Положим (четное продолжение)*

$$w(t) = w(2b-t), \quad t > b.$$

Тогда $w(t) \in W_2^\alpha(a, 2b-a)$.

Доказательство. Без потери общности считаем, что $a = 0$, $b = 1$. В соответствии с определением рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^2 dt \int\limits_0^2 \frac{(w(t) - w(\tau))^2}{|t-\tau|^{1+2\alpha}}\,d\tau.$$

После элементарных преобразований легко получаем

$$J = 2\int_0^1 dt\int_0^1 \frac{(w(t)-w(\tau))^2}{|t-\tau|^{1+2\alpha}}\,d\tau + 2\int_0^1 dt\int_0^1 \frac{(w(\tau)-w(t))^2}{|2-\tau-t|^{1+2\alpha}}\,d\tau.$$

Остается заметить, что $2-\tau-t \geqslant |t-\tau|$ для любых $0 < t,\tau < 1$. ■

Лемма 4.2.5. *Пусть $a < b$, $1/2 < \alpha < 1$, $w(t) \in W_2^\alpha(a,b)$, $w(a) = 0$. Положим*

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ w(t) - w(a), & t \in (a,b). \end{cases}$$

Тогда $z(t) \in W_2^\alpha(2a-b,b)$.

Доказательство. Без потери общности считаем, что $a = 0$, $b = 1$. Тогда

$$\int_{-1}^1 dt\int_{-1}^1 \frac{(z(t)-z(\tau))^2}{|t-\tau|^{1+2\alpha}}\,d\tau \leqslant \int_{-1}^1 dt\int_0^1 \frac{(w(t)-w(\tau))^2}{|t-\tau|^{1+2\alpha}}\,d\tau + C\int_0^1 \frac{(w(t)-w(a))^2}{t^{2\alpha}}\,dt.$$

Заметим, что согласно (1.4) $\partial_a^\alpha w(t) \in L_2(a,b)$. При этом

$$w(t) - w(a) = J_a^\alpha \partial_a^\alpha w(t).$$

Так что требуемое утверждение следует из неравенства ([31, inequality (3.17), p. 73])

$$\int_0^1 \frac{(w(t)-w(a))^2}{t^{2\alpha}}\,dt \leqslant C\|w(t)\|^2_{W_2^\alpha(a,b)}.$$

■

Теорема 4.2.2. *Пусть выполнено условие (4.9). У задачи (4.2)-(4.5) может существовать не более одного обобщенного решения, удовлетворяющего включениям (4.10), при условии, что функции $k(0,x)$ и $k(T,x)$ не меняют знак.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для дробных производных имеет место равенство (1.4). Причем в нашем случае $p = 2$. А значит пространство $H_2^\gamma(0,T)$ совпадается с пространством Соболева-Слободецкого $W_2^\gamma(0,T)$. Далее будем пользоваться этим фактом без особого упоминания.

Пусть $f(t,x) \equiv 0$, и $u(t,x)$ — решение задачи (4.2)-(4.5), удовлетворяющее включениям (4.10). Пусть $0 < \delta < T/2$. Всюду далее, если не оговорено противное, будем использовать обозначение $v(t,x) = u_\delta(t,x)$.

Нам предстоит разобрать четыре случая.

Случай (**C1**). Предположим, что $k(0,x) \geqslant 0$ и $k(T,x) \geqslant 0$. В этом случае требуемое утверждение следует из следствия 4.2.1.

Случай (**C2**). Предположим, что $k(0,x) \leqslant 0$ and $k(T,x) \geqslant 0$.

$$F(\delta,t,x) = k(t,x)v_t(t,x) - \rho_\delta(t) * (k(t,x)u_t(t,x)).$$

Тогда для $(t,x) \in Q_{\delta,T-\delta}$

$$k(t,x)v_t(t,x) - J^\nu \Delta v(t,x) + \gamma_1 J^\nu v_t(t,x) + \gamma_2 v(t,x) = \chi_0 + F(\delta,t,x),$$

и

$$(k(t,x)v_t(t,x))_t - D^\mu \Delta v(t,x) + \gamma_1 D^\mu v_t(t,x) + \gamma_2 v_t(t,x) = F_t(\delta,t,x).$$

Как и ранее, умножая это уравнение на $2v_t(t,x)$ и интегрируя по цилиндру $Q_{\delta,T-\delta}$, получаем

$$\int\limits_\Omega \left(k(T,x)v_t^2(T-\delta,x) - k(0,x)v_t^2(\delta,x)\right) d\Omega + \gamma_0 \int\limits_{Q_{0,T-\delta}} v_t^2\, dQ \leqslant$$
$$\int\limits_\Omega (k(T,x) - k(T-\delta,x))v_t^2(T-\delta,x)\, d\Omega - \int\limits_\Omega (k(0,x) - k(\delta,x))v_t^2(\delta,x)\, d\Omega +$$
$$2\int\limits_{Q_{0,\delta}} v_t(-D^\mu \Delta v(t,x) + \gamma_1 D^\mu v_t(t,x) + \gamma_2 v_t(t,x))\, dQ +$$
$$\int\limits_{Q_{\delta,T-\delta}} |F_t(\delta,t,x)v_t(t,x)|\, dQ = J_1 + J_2 + J_3.$$

Применяя лемму 4.2.1 и лемму 4.2.2, получаем асимптотические оценки (при $\delta \to 0$)

$$|J_1| = O(\delta^\beta), \quad |J_3| = o(1).$$

А с помощью (1.1.1)

$$|J_2| \leqslant C\left(\|v_t\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,\delta;L_2(\Omega))} + \|v\|^2_{W_2^{(1+\mu)/2}(0,\delta;\mathring{W}_2^1(\Omega))}\right).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем $u(t,x) \equiv 0$.

Случай (**C3**). Предположим, что $k(0,x) \leqslant 0$ and $k(T,x) \leqslant 0$. Прежде всего, мы собираемся продолжить равенство (4.7) на цилиндр $Q_{0,2T}$. По лемме 4.2.4

$$u(t,x) \in W_2^{\frac{1+\mu}{2}}(0,2T;\mathring{W}_2^1(\Omega)),$$

В силу четного продолжения функции $u(t,x)$ производная $u_t(t,x)$ продолжается нечетным образом, и по теореме [31, p.211, theorem 11.6]

$$u_t(t,x) \in W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,2T;L_2(\Omega)),$$

коль скоро $\mu < 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} H(t,x) &= -J^{\nu}\Delta u(t,x) + \gamma_1 J^{\nu} u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x), \\ \tilde{H}(t,x) &= H(t,x) + H(2T-t,x). \end{aligned}$$

Важно отметить, что согласно условиям (4.6) и (4.8)

$$\chi_1(x) \equiv 0, \quad H(T,x) = \chi_0.$$

Далее, пусть $T < t < 2T$. По определению нашего продолжения функции $k(t,x)$

$$k(t,x)u_t(t,x) = -k(2T-t,x)u_t(2T-t,x) + \tilde{k}(t,x)u_t(2T-t,x),$$

где

$$\tilde{k}(t,x) = k(2T-t,x) - k(t,x).$$

Таким образом, если $T < t < 2T$, то

$$k(t,x)u_t(t,x) + H(t,x) = \tilde{k}(t,x)u_t(2T-t,x) + \tilde{H}(t,x) - \chi_0(x).$$

В конечном итоге получаем

$$k(t,x)u_t(t,x) - J^{\nu}\Delta u(t,x) + \gamma_1 J^{\nu} u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x) - \chi_0(x) = G(t,x),$$

где

$$G(t,x) = \begin{cases} 0, & t < T, \\ \tilde{k}(t,x)u_t(2T-t,x) + \tilde{H}(t,x) - 2H(T,x), & t > T. \end{cases}$$

Пусть $0 < \delta < T/2$, $v(t,x) = u_\delta(t,x)$. Тогда для $(t,x) \in Q_{\delta,T}$

$$(k(t,x)v_t(t,x))_t - D^{\mu}\Delta v(t,x) + \gamma_1 D^{\mu} v_t(t,x) + \gamma_2 v_t(t,x) = F_t(\delta,t,x) + G_{\delta t}(t,x).$$

Как и раньше, умножаем это уравнение на $2v_t(t,x)$ и интегрируем по цилиндру $Q_{\delta,T}$. Замечая, что $v_t(T,x)=0$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} -k(0,x)v_t^2(\delta,x)\,d\Omega + \gamma_0 \int\limits_{Q_{0,T}} v_t^2\,dQ \leqslant \int\limits_{\Omega} (k(\delta,x)-k(0,x))v_t^2(\delta,x)\,d\Omega +$$
$$2\int\limits_{Q_{0,\delta}} v_t(-D^{\mu}\Delta v(t,x) + \gamma_1 D^{\mu} v_t(t,x) + \gamma_2 v_t(t,x))\,dQ +$$
$$\int\limits_{Q_{\delta,T}} |F_t(\delta,t,x)v_t(t,x)|\,dQ + \int\limits_{Q_{T-\delta,T}} |G_{\delta t}(t,x)v_t(t,x)|\,dQ.$$

По сравнению со случаем (**C2**) нам требуется оценка для слагаемого

$$J = \int\limits_{Q_{T-\delta,T}} |G_{\delta t}(t,x)v_t(t,x)|\,dQ,$$

Обозначим

$$H_1(t,x) = J^{\nu}\Delta u(t,x) - J^{\nu}\Delta u(T,x),$$
$$H_2(t,x) = J^{\nu}u_t(t,x) - J^{\nu}u_t(T,x),$$
$$H_3(t,x) = u_t(t,x) - u_t(T,x),$$

,

$$G_0(t,x) = \begin{cases} 0, & t<T, \\ \tilde{k}(t,x)u_t(2T-t,x), & t>T, \end{cases}$$

и для $k=1,2,3$

$$G_k(t,x) = \begin{cases} 0, & t<T, \\ H_k(t,x)+H_k(2T-t,x), & t>T. \end{cases}$$

Согласно этим обозначениям

$$|J| \leqslant \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{Q_{T-\delta,T}} |G_{k\delta t}(t,x)v_t(t,x)|\,dQ = J_0+J_1+J_2+J_3.$$

Очевидно, что

$$|J_3| \leqslant C\|u_t\|^2_{L_2(Q_{T-2\delta,T})},$$

и по лемме 4.2.3

$$|J_0| \leqslant C\|u_t\|_{L_2(Q_{T-\delta,T})}\|u_t\|_{L_2(Q_{T-2\delta,T})}.$$

Рассмотрим слагаемое $G_2(t,x)$. По леммам 4.2.4, 4.2.5

$$G_2(t,x) \in W_2^{\nu+\mu/2}(T-\delta,T;L_2(\Omega)),$$

и по лемме 1.1.1

$$|J_2| \leqslant C\|v_t\|_{W_2^{\mu/2}(T-\delta,T;L_2(\Omega))}\|J_{T-\delta}^{\mu/2}G_{2\delta t}(t,x)\|_{L_2(Q_{T-2\delta,T})} \leqslant C\|u_t\|_{W_2^{\mu/2}(T-\delta,T;L_2(\Omega))}.$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $G_1(t,x)$. По леммам 4.2.4, 4.2.5

$$G_{1\delta t}(t,x) \in W_2^{\nu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega)),$$

и $G_{1\delta t}(t,x)=0$, если $t<T-\delta$. Снова используем лемму (1.1.1), и получаем

$$|J_1| \leqslant C\|J_T^{\nu/2}v\|_{L_2(T-\delta,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))}\|G_{1\delta t}(t,x)\|_{W_2^{\nu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \leqslant C\|v\|^2_{W_2^{(1+\mu/2)}(T-\delta,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))}.$$

Все требуемые оценки получены, так что можно переходить к пределу при $\delta\to 0$.

Случай (**C4**). Предположим, что $k(0,x)\geqslant 0$ и $k(T,x)\leqslant 0$. Согласно включениям (4.6)

$$\chi_0 \equiv 0,$$

и

$$k(t,x)u_t(t,x) - J_{-T/2}^{\nu}\Delta u(t,x) + \gamma_1 J_{-T/2}^{\nu}u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x) = G(t,x).$$

Умножаем это уравнение на $2u_t(t,x)$ и интегрируем по цилиндру $Q_{-T/2,T}$. Дальнейшие рассуждения проводятся совершенно аналогично случаю (**C3**). ■

Глава 5. Обратная задача определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии

5.1 Постановка задачи

Пусть $T > 0, \Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Далее через ∂^{μ} обозначаем оператор дробной производной Герасимова-Капуто по переменной t с $0 < \mu < 1$.

В цилиндре Q рассматриваем краевую задачу

$$\partial^{\mu(x)} u(t,x) + L(x, D_x) u(t,x) = f(t,x), \tag{5.1}$$

$$u_n(t,x)\big|_S = 0, \tag{5.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{5.3}$$

Здесь $L(x, D_x)$ — оператор второго порядка

$$L(x, D_x) u(t,x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}(t,x)) + c(x) u(t,x)$$

с симметричной матрицей $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $u_n(t,x)$ — конормальная производная

$$u_n(t,x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) u_{x_j}(t,x) n_i(x),$$

где $\bar{n}(x) = (n_1(x), n_2(x) \dots)$ — вектор внешней нормали в точке $x \in \Gamma$. При этом, для некоторой константы $\gamma_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \gamma_0 |\xi|^2, \quad (t,x) \in \bar{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Функция $\mu(x)$ предполагается измеримой, причем для некоторого $\lambda < 1$ и п.в. $x \in \Omega$

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \lambda. \tag{5.4}$$

В дальнейшем, всякую такую функцию $\mu(x)$ будем называть допустимым показателем. Всюду далее, если не оговорено противное, всегда предполагаем, что функция $\mu(x)$ допустима.

Обратная задача заключается в одновременном определении пары функций $(u(t,x), \mu(x))$ с помощью дополнительного условия

$$u(t,x) = \varphi(x). \tag{5.5}$$

Как уже отмечалось выше, в случае $\mu(x) \equiv \mathrm{const}$ задача (5.1)-(5.3) рассматривалась в огромном количестве работ с разными краевыми условиями и в разных пространствах. Для переменного показателя работ существенно меньше. В работе [72] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения. Кроме этого, доказана единственность решения обратной задачи с некоторыми специфическими условиями переопределения. В основе всех рассуждений лежит преобразование Лапласа. В частности, по этой причине коэффициенты не могут зависеть от t. В работе [46] методом априорных оценок доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенных и регулярных решений задачи (5.1)-(5.3). При этом коэффициенты в операторе L могут зависеть от t. Коэффициент $\mu(x)$ предполагается непрерывным. Линейная обратная задача определения источника с финальным переопределением также изучалась в ряде работ. Мы отметим лишь некоторые из них [23], [87], [47], [76], [69]. В последних двух изучались и нелинейные коэффициентные задачи. В работах [75], [39], [40], [2], [42], [41] определяется порядок дробной производной. Любопытно отметить, что в этих работах предполагается, что T достаточно велико. Напротив, в наших построениях требуется некая малость T. К этому вопросу мы еще вернемся позже.

В основе наших рассуждений лежит подход, предложенный в [28] (см. также [85, стр. 54]), использующий теорему Биркгофа-Тарского ([18, стр. 266]. Мы строим решение, как неподвижную точку специального изотонного оператора. Замечательным образом эта же теорема позволяет доказать единственность решения. В конечном итоге при некоторых условиях на величину T и входные данные удается указать необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи. Возможным недостатком такого подхода можно считать требование $u_0(x) \equiv 0$. Более того, в нашем случае придется потребовать еще и некоторые дополнительные свойства от правой части $f(t,x)$. Однако, на наш взгляд, такие ограничения не являются чрезмерными с практической точки зрения.

Всюду далее считаем, что $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $c(x) \in C(\bar{\Omega})$ и $c(x) \geqslant 0$.

5.2 Прямая задача.

В этом разделе будут установлены некоторые результаты относительно однозначной разрешимости задачи (5.1)-(5.3) в некоторых функциональных пространствах, достаточные для дальнейших рассуждений. Мы не претендуем на какую-то особую новизну и не стремимся к максимальной общности. Отметим, что аналогичные методы использовались в [46], [91], [94].

Прежде всего, введем обозначение (см. условие (5.4))

$$M(t,z) = \frac{1}{\Gamma(1-z)t^z}, \quad z \in [0,\lambda]. \tag{5.6}$$

Функцию $u(t,x) \in L_1(Q)$ назовем обобщенным решением задачи (5.1)-(5.3), если для любой гладкой пробной функции $\psi(t,x)$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \psi(t,x)\big|_{t=T} &= 0, \\ \psi_n(t,x)\big|_S &= 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

выполняется тождество

$$\int\limits_Q u(t,x)(D_T^{\mu(x)}\psi(t,x) + L(x,D_x)\psi(t,x))\,dQ =$$
$$\int\limits_Q (f(t,x) + M(t,\mu(x))u_0(x))\psi(t,x)\,dQ. \tag{5.8}$$

Здесь $D_T^{\mu(x)}$ — оператор дробной производной Римана-Лиувилля на отрезке $(0,T)$ с началом в точке T. Из тождества (5.8), между прочим, следует, что решение задачи (5.1)-(5.3) с данными $(u_0(x), f(t,x))$ совпадает с решением задачи с данными $(0, f(t,x) + M(t,\mu(x))u_0(x))$.

Теорема 5.2.1. *Обобщенное решение задачи* (5.1)-(5.3) *единственно.*

Доказательство. Можно считать, что $u(t,x) \in C^1([0,T]; L_1(\Omega))$. Действительно, пусть $0 < \delta < T$ и $\rho(t)$ — гладкое ядро усреднения с носителем в интервале $(-\delta,\delta)$. Продолжим функцию $u(t,x)$ нулем вне интервала $(0,T)$ и обозначим $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) * \rho(t)$ при $-\delta < t < T-\delta$. Учитывая условие (5.7), для пробных функций вида $\tilde{\psi}(t,x) = \psi(t,x) * \rho(t)$ имеем равенство

$$D_T^{\mu(x)}\tilde{\psi}(t,x) = \rho(t) * D_T^{\mu(x)}\psi(t,x).$$

Отсюда уже легко следует, что $\tilde{u}(t-\delta,x)$ — гладкое по переменной t решение однородной задачи (1)-(3) в цилиндре Q. Если всякая такая функция $\tilde{u}(t,x)\equiv 0$, то и $u(t,x)\equiv 0$ в цилиндре Q.

Итак, считаем, что $u(t,x)\in C^1([0,T];L_1(\Omega))$. Легко видеть, что теперь от условия (5.7) для пробных функций можно отказаться. Продолжим функцию $u(t,x)$ нулем при $t>T$ и обозначим ее преобразование Лапласа как $\hat{u}(s,x)$. Пусть $0<t<T$ и $0\leqslant\mu\leqslant\lambda$, $s=\sigma+i\tau$. Из определения дробной производной следует неравенство

$$|D_T^{\mu}e^{-st}-s^{\mu}e^{-st}|\leqslant C(\lambda)e^{-\sigma T}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\sigma\xi}\,d\xi}{(T-t+\xi)^{\mu+1}}.$$

А значит

$$D_T^{\mu}e^{-st}=s^{\mu}e^{-st}+O\left(\frac{e^{-\sigma T})}{(T-t)^{\mu}}\right). \tag{5.9}$$

Рассматривая пробные функции вида $e^{-st}\psi(x)$, легко получаем, что $\hat{u}(s,x)$ — обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned}&s^{\mu(x)}\hat{u}(s,x)+L(x,D_x)\hat{u}(s,x)=F(s,x),\\&\hat{u}_n(s,x)\big|_{\Gamma}=0,\end{aligned}$$

где

$$F(s,x)=\int\limits_0^t u(t,x)(s^{\mu(x)}e^{-st}-D_T^{\mu(x)}e^{-st})\,dt.$$

В силу оценки (5.9)

$$\|F(s,x)\|_{L_1(\Omega)}=O(e^{-T\operatorname{Re}s}),\quad \operatorname{Re}s>1.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\hat{u}(s,x)\|_{L_1(\Omega)}=O(e^{-T\operatorname{Re}s}),\quad \operatorname{Re}s>1.$$

Положим

$$v(t,x)=\int\limits_0^t(t-\tau)u(\tau,x)\,d\tau$$

и обозначим ее преобразование Лапласа как $\hat{v}(s,x)$. Тогда $\hat{u}(s,x)=s^2\hat{v}(s,x)$ и имеет место оценка

$$\|\hat{v}(s,x)\|_{L_1(\Omega)}=O(e^{-T\operatorname{Re}s})/|s|^2,\quad \operatorname{Re}s>1.$$

Значит $v(t,x)\equiv 0$ и $u(t,x)\equiv 0$ в цилиндре Q. ∎

Теорема 5.2.2. *Пусть* $u_0(x) \in L_2(\Omega)$, $f(t,x) \in L_2(Q)$. *Тогда у задачи* (5.1)-(5.3) *существует (и единственно) такое решение, что*

$$u(t,x) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)), \quad \partial^{\mu(x)/2}u(t,x) \in L_2(Q).$$

Причем, если $u_0(x) \geqslant 0$ *и* $f(t,x) \geqslant 0$, *то* $u(t,x) \geqslant 0$.

Если $f_t(t,x) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \equiv 0$, $f(0,x) \equiv 0$, *то*

$$\partial^{\mu(x)}u(t,x) \in C(0,T;L_2(\Omega)), \tag{5.10}$$

$$u(t,x) \in C(0,T;W_2^2(\Omega)). \tag{5.11}$$

Доказательство. Пусть $\theta > 0$, $\tilde{J}_\theta = J_{1-\mu(x),\theta}$ — регуляризированный оператор, определенный в разделе 1.3. Хорошо известно, что $\tilde{J}_\theta$ — положительный оператор в $L_2(Q)$ (см. например[21, стр. 38]).

Для всякого $0 < \varepsilon < 1$ рассматриваем семейство гладких функций $f_\varepsilon(t,x)$, $v_{0\varepsilon}(x)$ таких, что для некоторой константы $C_0 > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon(t,x) - f(t,x)\|_{L_2(Q)} = 0, \tag{5.12}$$

$$\varepsilon\|v_{0\varepsilon}(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|v_{0\varepsilon}(x) - u_0(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{5.13}$$

Далее, полагаем $\theta = \theta(\varepsilon)$ (точное значение будет указано позже) и рассматриваем задачу

$$\varepsilon v_t(t,x) + \tilde{J}_\theta v_t(t,x) + L(x,D_x)v(t,x) = f_\varepsilon(t,x), \tag{5.14}$$

$$v_n(t,x)\big|_S = 0, \tag{5.15}$$

$$v(0,x) = v_{0\varepsilon}(x). \tag{5.16}$$

Заметим, что ядро в операторе $\tilde{J}_\theta$ не имеет особенностей и допускает интегрирование по частям. Поэтому задача (5.14)-(5.16) однозначно разрешима, при этом

$$v_t(t,x) \in L_2(Q), \quad v(t,x) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)).$$

Сейчас будут получены равномерные по ε оценки, которые позволят перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Прежде всего, умножим уравнение (5.14) на $\varepsilon v_t(t,x)$ и проинтегрируем по Q. С учетом положительности оператора v и условий (5.12), (5.13), получаем

$$\varepsilon\|v_t(t,x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C. \tag{5.17}$$

Обозначим $w(t,x) = \partial^{\mu(x)} v(t,x) - \tilde{J}_\theta v_t(t,x)$. Далее действуем как и в лемме 1.3.1. По неравенству Хаусдорфа-Юнга

$$\|w(t,x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C\|v_t(t,x)\|_{L_2(Q)} \sup_{x\in\Omega} \int\limits_0^T \left(\frac{1}{t^{\mu(x)}} - \frac{1}{(t+\theta)^{\mu(x)}}\right) dt.$$

В силу условия (5.4) можно выбрать $\theta(\varepsilon)$ настолько малым, чтобы

$$\sup_{x\in\Omega} \int\limits_0^T \left(\frac{1}{t^{\mu(x)}} - \frac{1}{(t+\theta)^{\mu(x)}}\right) dt \leqslant C\varepsilon\|v_t(t,x)\|_{L_2(Q)}.$$

Тогда в силу (5.17)

$$\|w(t,x)\|_{L_2(Q)} \leqslant C.$$

Обозначим $V(t,x) = v(t,x) - v_{0\varepsilon}(x)$. Заметим, что $\partial^{\mu(x)} v(t,x) = D^{\mu(x)} V(t,x)$. Пусть $\delta > 0$. По лемме 1.2.7

$$\|\partial^{\mu(x)/2} v(t,x)\|^2_{L_2(Q)} = \|D^{\mu(x)/2} V(t,x)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C \int\limits_Q V(t,x) D^{\mu(x)} V(t,x)\, dQ \leqslant$$

$$C\|V(t,x)\|_{L_2(Q)}\|w(t,x)\|_{L_2(Q)} - C\int\limits_Q v_{0\varepsilon}(x)\tilde{J}_\theta v_t(t,x)\, dQ + C\int\limits_Q v(t,x)\tilde{J}_\theta v_t(t,x)\, dQ \leqslant$$

$$C + C(\delta) + \delta\|v(t,x)\|^2_{L_2(Q)} + C\int\limits_Q v(t,x)\tilde{J}_\theta v_t(t,x)\, dQ. \quad (5.18)$$

Умножая уравнение (5.14) на $v(t,x)$ и интегрируя по Q, легко получаем

$$\int\limits_Q v(t,x)\tilde{J}_\theta v_t(t,x)\, dQ + \gamma_0 \int\limits_Q |\nabla v(t,x)|^2\, dQ \leqslant C(\delta) + \delta\|v(t,x)\|^2_{L_2(Q)}.$$

Отметим, что

$$\|v(t,x)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C\|v_{0\varepsilon}(x)\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|\partial^{\mu(x)/2} v(t,x)\|^2_{L_2(Q)}.$$

Вместе с оценкой (5.18) это дает

$$\|\partial^{\mu(x)/2} v(t,x)\|^2_{L_2(Q)} + \|v(t,x)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C.$$

Предположим, что $v_{0\varepsilon}(x) \geqslant 0$ и $f_\varepsilon(t,x) \geqslant 0$. Аналогично (1.2)

$$\tilde{J}_\theta v_t(t,x) = \frac{d}{dt} J_{1-\mu(x),\theta} v(t,x) - \frac{v_{0\varepsilon}(x)}{\Gamma(1-\mu(x))(t+\theta)^{\mu(x)}} \leqslant \frac{d}{dt} J_{1-\mu(x),\theta} v(t,x).$$

Пусть $v^-(t,x)$ — отрицательная срезка функции $v(t,x)$, где

$$\eta^- = \begin{cases} \eta, & \eta < 0, \\ 0, & \eta \geqslant 0. \end{cases}$$

Умножая уравнение (5.14) на $v^-(t,x)$ и интегрируя по Q, получаем

$$\int\limits_Q v^-(t,x)\frac{d}{dt}J_{1-\mu(x),\theta}v(t,x)\,dQ + \gamma_0\int\limits_Q |\nabla v^-(t,x)|^2\,dQ \leqslant 0.$$

Отметим, что η^- — монотонная функция аргумента η. По лемме 1.2.2

$$\int\limits_Q \left((v^-(t,x))^2 + |\nabla v^-(t,x)|^2\right)\,dQ \leqslant 0.$$

Значит $v^-(t,x) \equiv 0$ и $v(t,x) \geqslant 0$. Теперь можно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получаем решение задачи (5.1)-(5.3). Все рассуждения стандартные и мы их опускаем.

Предположим, что $f_t(t,x) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \equiv 0$, $f(0,x) \equiv 0$. В этом случае полагаем $v_{0\varepsilon}(x) \equiv 0$ и дополнительно требуем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_{\varepsilon t}(t,x) - f_t(t,x)\|_{L_2(Q)} = 0.$$

Из уравнения (5.14) следует, что $v_t(0,x) \equiv 0$. С учетом этого дифференцируем уравнение (5.14) и аналогично предыдущему получаем оценку

$$\|\partial^{\mu(x)/2}v_t(t,x)\|^2_{L_2(Q)} + \|v_t(t,x)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C.$$

Пусть $V(t,x) = \partial^{\mu(x)}v(t,x)$. Тогда из последней оценки в силу (5.4) следует

$$\|\partial^{1-\lambda/2}V(t,x)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C.$$

Отметим, что $1 - \lambda/2 > 1/2$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем оценку (5.10). После этого оценка (5.11) следует из уравнения (5.1). ■

5.3 Обратная задача.

В дальнейших рассуждениях (если не оговорено противное) все равенства и неравенства для различных функций понимаются в том смысле, что множества исключительных значений аргументов имеет меру 0. Кроме этого, договоримся называть некую функцию тривиальной, если она равна 0 для п.в. значений своих аргументов. В противном случае функцию называем нетривиальной.

Как уже говорилось выше, мы строим решение с помощью теоремы Биркгофа-Тарского. А для этого сначала следует построить специальный изотонный оператор A. Для дальнейших построений удобно ввести обозначение

$$G(x) = f(t,x) - L(x, D_x)\varphi(x).$$

Пусть $u_0(x) \equiv 0$, $(u(t,x), \bar{\mu}(x))$ — решение обратной задачи (5.1)-(5.3), (5.5). Интегрируя по частям, получаем формальное равенство

$$\frac{u(t,x)(x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))T^{\bar{\mu}(x)}} + \bar{\mu}(x)\int\limits_0^T \frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))(T-\tau)^{1+\bar{\mu}(x)}}\,d\tau = f(t,x) - L(x,D_x)u(t,x). \quad (5.19)$$

Заменим $u(t,x)$ на $\varphi(x)$

$$\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))T^{\bar{\mu}(x)}} + \bar{\mu}(x)\int\limits_0^T \frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))(T-\tau)^{1+\bar{\mu}(x)}}\,d\tau = G(x). \quad (5.20)$$

Отметим, что для произвольной функции $u(t,x)$ данное равенство можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции $\bar{\mu}(x)$. Таким образом для допустимых показателей неявным образом (формально) определен оператор A. А именно, для любого допустимого показателя $\mu(x)$ решаем задачу (5.1)-(5.3). После этого рассматриваем (5.20) как уравнение относительно $\bar{\mu}(x)$. Если это уравнение однозначно разрешимо для п.в. $x \in \Omega$ и $\bar{\mu}(x)$ удовлетворяет условию (5.4), то полагаем

$$\bar{\mu}(x) = A\mu(x).$$

В связи с разрешимостью уравнения (5.20) естественным образом возникает вопрос о свойствах функции $M(t,z)$, определенной согласно (5.6). Пусть

$$a(\lambda) = \min_{z\in[0,\lambda]} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-z), \quad T(\lambda) = e^{a(\lambda)}.$$

Лемма 5.3.1. *Пусть* $0 < t \leqslant T(\lambda)$. *Тогда функции* $M(t,z)$ *и* $zM(t,z)$ *монотонно возрастают по* z *на отрезке* $[0,\lambda]$.

Доказательство. Легко проверить, что для всех $z \in [0, \lambda)$ справедливо неравенство $M_z(t, z) > 0$. Отсюда следует утверждение леммы (см. также [75, lemma4]). ■

Лемма 5.3.2. *Пусть* $u_0(x) \equiv 0$, $T \leqslant T(\lambda)$, $f(t, x), f_t(t, x) \in L_2(Q)$. *Причем* $f(0, x) = 0$ *и* $f_t(t, x) \geqslant 0$. *Пусть, далее,* $\mu_1(x), \mu_2(x)$ *— допустимые показатели, причем* $\mu_1(x) \leqslant \mu_2(x)$. *Обозначим через* $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ *соответствующие решения задачи* (5.1)-(5.3). *Тогда для п.в.* $(t, x) \in Q$

$$u_2(t, x) \leqslant u_1(t, x). \tag{5.21}$$

Если дополнительно функция $f_t(t, x)$ *неубывает по переменной* t, *то для всех* $t \in [0, T]$ *справедливы неравенства*

$$0 \leqslant u_2(t, x) - u_2(t, x) \leqslant u_1(t, x) - u_1(t, x). \tag{5.22}$$

В частности (при $t = 0$*)*

$$u_2(t, x) \leqslant u_1(t, x).$$

Доказательство. Прежде всего, по теореме 5.2.2 имеет место включение $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C([0,T]; W_2^2(\Omega))$. Так что неравенство (5.22) имеет смысл. Кроме этого $u_1(t, x) \geqslant 0$ и $u_2(t, x) \geqslant 0$. Далее, продолжим функции $f(t, x)$, $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ нулем в область $t < 0$. Пусть $\delta > 0$. Для всякой функции $h(t, x)$ обозначим $h^\delta(t, x) = h(t, x) - h(t - \delta, x)$. Тогда для $w(t, x) = u_2^\delta(t, x)$ имеем систему

$$\begin{aligned}
&\partial^{\mu_2(x)} w(t, x) + L(x, D_x) w(t, x) = f^\delta(t, x),\\
&w_n(t, x)\big|_S = 0,\\
&w(0, x) = 0.
\end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что $f^\delta(t, x) \geqslant 0$. Значит по теореме 5.2.2 $w(x,t) \geqslant 0$. Теперь обозначим $\theta(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\partial^{\mu_1(x)} \theta(t, x) + L(x, D_x)\theta(t, x) = \partial^{\mu_2(x)} u_2(t, x) - \partial^{\mu_1(x)} u_2(t, x) = F(t, x),\\
&\theta_n(t, x)\big|_S = 0,\\
&\theta(0, x) = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что по теореме 5.2.2 $F(t,x) \in C([0,T];L_2(\Omega))$. Аналогично (5.19), интегрируя по частям, получаем

$$F(t,x) = (M(t,\mu_2(x)) - M(t,\mu_1(x))u_2(t,x)+ \int\limits_0^t (\mu_2(x)M(t-\tau,\mu_2(x)) - \mu_1(x)M(t-\tau,\mu_1(x))\frac{u_2(t,x)-u_2(\tau,x)}{t-\tau}\,d\tau.$$

Согласно предыдущим рассуждениям $u_2(t,x)-u_2(\tau,x) \geqslant 0$. Тогда в силу леммы 5.3.1 справедливо неравенство $F(t,x) \geqslant 0$, и по теореме 5.2.2 $\theta(t,x) \geqslant 0$. Тем самым доказано неравенство (5.21).

Далее, аналогично предыдущему для произвольного $\delta > 0$ рассматриваем функции $u_1^\delta(t,x)$ и $u_2^\delta(t,x)$, $f^\delta(t,x)$. Тогда для всех $t \in [0,T]$

$$0 \leqslant u_2^\delta(t,x) \leqslant u_1^\delta(t,x).$$

Отсюда уже тривиально следует (5.22). ■

Следующее утверждение, по-видимому, известно. Тем не менее, мы приводим здесь очень простое доказательство.

Лемма 5.3.3. *Пусть $D \subset R^k$ — область с кусочно-гладкой границей. Пусть $u(x) \in W^1_{1,loc}(D)$, $c \in R$ и $D_c = \{x \in D \big| u(x) = c\}$. Тогда $\nabla u(x) = 0$ для п.в. $x \in D_c$.*

Доказательство. Исключительно ради простоты считаем, что $k = 1$, $D = (0,1)$ и $u(x) \in W_1^1(D)$. Кроме этого, без потери общности считаем, что $c = 0$. Идея доказательства заключается в использовании тождества

$$u(x) = u(x)\operatorname{sign}^2 u(x).$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ положим

$$u_\varepsilon(x) = \frac{4}{\pi^2}u(x)\operatorname{arctg}^2(u(x)/\varepsilon).$$

Легко убедиться, что $u_\varepsilon(x) \in W_1^1(D)$ и

$$u_\varepsilon'(x) = \frac{4}{\pi^2}u'(x)\left(\operatorname{arctg}^2(u(x)/\varepsilon) + \operatorname{arctg}(u(x)/\varepsilon)\frac{2\varepsilon u(x)}{\varepsilon^2+u^2(x)}\right).$$

Пусть $\psi(x)$ — пробная функция. Тогда по определению обобщенной производной

$$\int\limits_D \psi'(x)\frac{4}{\pi^2}u(x)\operatorname{arctg}^2(u(x)/\varepsilon)\,dx =$$
$$-\int\limits_D \psi(x)\frac{4}{\pi^2}u'(x)\left(\operatorname{arctg}^2(u(x)/\varepsilon)+\operatorname{arctg}(u(x)/\varepsilon)\frac{2\varepsilon u(x)}{\varepsilon^2+u^2(x)}\right)dx.$$

По теореме Лебега можно поточечно переходить к пределу при $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_D \psi'(x)u(x)\,dx = -\int\limits_D \psi(x)u'(x)\operatorname{sign}^2 u(x)\,dx.$$

Следовательно, $u'(x)=u'(x)\operatorname{sign}^2 u(x)$ для п.в. $x\in D$. Поэтому $u'(x)=0$ для п.в. $x\in D_0$. ■

Лемма 5.3.4. *Пусть выполнены все условия леммы 5.3.2 и $u(t,x)$ — решение задачи (5.1)-(5.3). Если $f(t,x)$ нетривиальна, то для п.в. $x\in\Omega$*

$$u(t,x)\neq 0. \tag{5.23}$$

Доказательство. Пусть $D_0=\{x\in\Omega\,|\,u(t,x)=0\}$, $Q_0=(0,T)\times D_0$. Рассмотрим функцию $v(t,x)$ — решение задачи (5.1)-(5.3) с показателем $\mu(x)\equiv\lambda$. По лемме 5.3.2

$$0\leqslant v(t,x)|_{D_0}\leqslant u(T,x)|_{D_0}=0.$$

Отметим, что по теореме 5.2.2 справедливо включение $v(t,x)\in C([0,T];W_2^2(\Omega))$. Применяя лемму 5.3.3 на множестве D_0 последовательно для функций $v(t,x)$ и $\nabla v(t,x)$, аналогично (5.19) для п.в. $x\in D_0$ получаем

$$\int\limits_0^T \frac{-v(\tau,x)}{(T-\tau)^{1+\lambda}}\,d\tau\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $v(t,x)\big|_{Q_0}=0$. Если $\operatorname{mes}(D_0)>0$, то в силу сильного принципа максимума [93, theorem5.1] получаем $v(t,x)\equiv 0$. Но тогда и $f\equiv 0$, что противоречит условию леммы. ■

Теорема 5.3.1. *Пусть выполнены условия леммы 5.3.2, $\varphi(x)\in W_2^2(\Omega)$ и*

$$\varphi_n(x)=0 \text{ для п.в. } x\in\Gamma.$$

Предположим, что функция $f(t,x)$ *нетривиальна, и для некоторых* $K>0$ *и* $\lambda_1>\lambda$ *справедливо неравенство*

$$\|f(t,x)-f(t,x)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant K(T-t)^{\lambda_1},\quad t\in(0,T). \tag{5.24}$$

Тогда справедливы следующие утверждения

(P1) Для разрешимости обратной задачи (5.1)-(5.3), (5.5) необходимо, чтобы

$$0<\varphi(x)\leqslant G(x),\qquad \text{для п.в. } x\in\Omega. \tag{5.25}$$

(P2) Пара функций $(u(t,x),\bar{\mu}(x))$ *является решением задачи (5.1)-(5.3), (5.5) если и только если* $\bar{\mu}(x)$ *— неподвижная точка оператора* A.

(P3) Обратная задача (5.1)-(5.3), (5.5) разрешима если и только если выполнено неравенство (5.25), и для некоторого допустимого показателя $\mu(x)$ *справедливо неравенство*

$$A\mu(x)\leqslant\mu(x),\qquad \text{для п.в. } x\in\Omega. \tag{5.26}$$

(P4) Решение обратной задачи (5.1)-(5.3), (5.5) единственно.

Доказательство. Прежде всего отметим, что при условиях леммы 5.3.2 справедливы включения (5.10), (5.11). В дальнейшем мы пользуемся этим фактом, особо не оговаривая.

Пусть $(u(t,x),\bar{\mu}(x))$ — решение обратной задачи (5.1)-(5.3), (5.5). Первое из неравенств (5.25) вытекает из леммы 5.3.4. По лемме 5.3.2 для п.в. $(\tau,x)\in Q$ справедливо неравенство

$$u(T,x)-u(\tau,x)\geqslant 0.$$

Тогда из равенства (5.20) для п.в. $x\in\Omega$ легко получаем

$$\varphi(x)M(T,\bar{\mu}(x))\leqslant G(x).$$

Теперь второе неравенство в (5.25) следует из того, что $M(T,z)$ монотонно возрастает по z и $M(T,0)=1$. Далее, из равенства (5.20) и леммы 5.3.1 следует, что для $\bar{\mu}(x)$ корректно определен оператор A, при этом $\bar{\mu}(x)=A\bar{\mu}(x)$.

Пусть $\bar{\mu}(x)$ неподвижная точка оператора A и $u(t,x)$ — решение соответствующей задачи (5.1)-(5.3). Тогда из (5.19) и(5.20) следует, что функция $w(x)=\varphi(x)-u(t,x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&M(T,\bar{\mu}(x))w(x)+L(x,D_x)w(x)=0,\\&w_n(x)\big|_{\Gamma}=0.\end{aligned}$$

При этом $M(T,\bar{\mu}(x)) \geqslant 1$. Следовательно $w(x)=0$ для п.в. $x\in\Omega$.

Докажем утверждение (Р3). Если пара функций $(u(t,x),\bar{\mu}(x))$ является решением задачи (5.1)-(5.3), (5.5), то в силу $(P1)$ выполнено неравенство (5.25), а в силу $(P2)$ для $\mu(x)=\bar{\mu}(x)$ выполнено неравенство (5.26).

Докажем обратное. Пусть $v_0(t,x)$ — решение задачи (5.1)-(5.3) с $\mu(x)\equiv 0$. Легко убедиться, что для всех $t\in[0{,}T]$

$$\begin{aligned} &v_0(t,x)+L(x,D_x)v_0(t,x)=f(t,x),\\ &v_{0n}|_\Gamma=0. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (5.24) для некоторой константы $C_0>0$ выводим неравенство

$$\|v_0(t,x)-v_0(t,x)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_0(T-t)^{\lambda_1},\quad t\in(0,T).$$

А значит для п.в. $x\in\Omega$

$$\int\limits_0^T \frac{v_0(T,x)-v_0(\tau,x)}{(T-\tau)^{1+\lambda}}\,d\tau<\infty. \tag{5.27}$$

Пусть $\tilde{\mu}(x)$ — функция, удовлетворяющая неравенству (5.26) и $\tilde{u}(t,x)$ — решение соответствующей задачи (5.1)-(5.3). Обозначим

$$E=\{\mu(x)\in L_\infty(\Omega)\,\big|\,0\leqslant\mu(x)\leqslant\tilde{\mu}(x)\}.$$

Как известно, это множество представляет собой полную решетку (см., например, [81, лемма 2.6.1, стр. 115]).

Покажем, что на множестве E оператор A корректно определен, является изотонным и $A(E)\subset E$. Действительно, пусть $\mu(x)\in E$ и $u(t,x)$ — решение соответствующей задачи (5.1)-(5.3). По лемме 5.3.2 для п.в. $(\tau,x)\in Q$ справедливы неравенства

$$v_0(T,x)-v_0(\tau,x)\geqslant u(T,x)-u(\tau,x)\geqslant\tilde{u}(T,x)-\tilde{u}(\tau,x).$$

Обозначим

$$R(x,z)=\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-z)T^z}+z\int\limits_0^T\frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-z)(T-\tau)^{1+z}}\,d\tau.$$

Тогда по теореме Лебега и в силу (5.27) для п.в. $x\in\Omega$ справедливо включение $R(x{,}z)\in C[0,\lambda]$. В частности,

$$R(x,0)=\varphi(x).$$

С другой стороны, для $\gamma(x) = A\tilde{\mu}(x)$ легко получаем

$$R(x, \gamma(x)) \geqslant G(x). \tag{5.28}$$

По лемме 5.3.1 функция $R(x,z)$ монотонно возрастает по переменной z. Учитывая неравенства (5.25) и (5.28), получаем однозначную разрешимость уравнения (5.20). Таким образом корректно определена функция $A\mu(x) \in E$. Совершенно аналогично доказывается неравенство $A\mu_0(x) \leqslant A\mu_1(x)$, если $\mu_0(x), \mu_1(x) \in E$ и $\mu_0(x) \leqslant \mu_1(x)$.

Итак, оператор A — изотонный и по теореме Биркгофа-Тарского у него существует неподвижная точка. А значит в силу $(P2)$ обратная задача (5.1)-(5.3), (5.5) разрешима.

Осталось доказать единственность решения обратной задачи. Пусть существует две пары решений $(u_1(t,x), \mu_1(x))$, $(u_2(t,x), \mu_2(x))$. Обозначим

$$\mu(x) = \min(\mu_1(x), \mu_2(x)).$$

Как и раньше, легко показать, что $A\mu(x) \leqslant A\mu_j(x)$ для $j = 1{,}2$. Значит $A\mu(x) \leqslant \mu(x)$. Тогда на порядковом интервале $[0, \mu(x)]$ найдется неподвижная точка оператора A и соответствующее решение обратной задачи, которое мы обозначим как $(u_3(t,x), \mu_3(x))$. Разность функций $\theta(t,x) = u_3(t,x) - u_1(t,x)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}
&\partial^{\mu_3(x)}\theta(t,x) + L(x, D_x)\theta(t,x) = \partial^{\mu_1(x)}u_1(t,x) - \partial^{\mu_3(x)}u_1(t,x) = F(t,x),\\
&\theta_n(t,x)\big|_S = 0,\\
&\theta(0,x) = 0,\\
&\theta(T,x) = 0.
\end{aligned}$$

По построению $\mu_3(x) \leqslant \mu_1(x)$, и по лемме 5.3.2 $u_1(t,x)$ неубывает по t. Значит по лемме 5.3.1 $F(t,x) \geqslant 0$, и по теореме 5.2.2 $\theta(t,x) \geqslant 0$. Из равенства $\theta(T,x) = 0$ легко следует

$$\mu_3(x) \int\limits_0^T \frac{-\theta(\tau,x)}{\Gamma(1-\mu_3(x))(T-\tau)^{1+\mu_3(x)}}\, d\tau = F(t,x).$$

Сравнивая знаки левой и правой частей этого равенства, получаем $F(t,x) \equiv 0$. С другой стороны

$$F(T,x) \geqslant (M(T, \mu_1(x)) - M(T, \mu_3(x)))\varphi(x).$$

Тогда из (5.25) и леммы 5.3.1 следует $\mu_1(x) = \mu_3(x)$. Аналогично этому $\mu_2(x) = \mu_3(x)$. А значит $u_1(t,x) = u_2(t,x)$. ■

Следствие 5.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.3.1, справедливы неравенства (5.25) и, дополнительно,*

$$\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\lambda)T^{\lambda}} \geqslant G(x).$$

Тогда обратная задача (5.1)-(5.3), (5.5) однозначно разрешима.

Доказательство. Легко видеть, что для $\mu(x) \equiv \lambda$ выполнено неравенство (5.26). Тогда требуемая разрешимость вытекает из утверждений $(P3)$, $(P4)$ теоремы 5.3.1. ■

Замечание 5.3.1. *С практической точки зрения поиск начальной функции $\mu(x)$, удовлетворяющей условию (5.26), является трудной и малоконструктивной задачей. А достаточное условие из следствия 5.3.1 может оказаться слишком грубым. В этом случае непонятно, как проверить: разрешима обратная задача или нет? На самом деле на практике следует начинать с функции $\mu(x) \equiv 0$. Тогда последовательные приближения будут возрастать. А значит либо на некотором шаге уравнение (5.20) окажется неразрешимым, либо будет нарушено условие (5.4), либо будет получена монотонно возрастающая последовательность приближений, сходящаяся к решению обратной задачи $\bar{\mu}(x)$.*

Замечание 5.3.2. *Как уже упоминалось ранее, в работах [75], [40] требуется, чтобы величина T была достаточно велика. Напротив, лемма 5.3.1 и следствие 5.3.1 указывают на то, что для корректности обратной задачи величина T должна быть достаточно мала. Это связано с условием (5.4) и тем фактом, что мы используем участок возрастания по переменной z функции $M(t,z)$, а в упомянутых работах используется участок убывания(см. [75, lemma4], [40, lemma1.4]). Наш выбор продиктован леммой 5.3.2. Для доказательства этой леммы необходимо иметь одинаковое поведение по переменной z функции $M(t,z)$ для всех $t \in (0,T)$.*

Замечание 5.3.3. *Может показаться, что в уравнении (5.20) было бы естественным использовать слагаемое*

$$\frac{u(T,x)}{\Gamma(1-\bar{\mu}(x))T^{\bar{\mu}(x)}}.$$

Однако в этом случае для показателя $\mu(x) \equiv 0$ *соответствующий оператор* $\tilde{A}$ *может быть не определен. После этого возникают проблемы с применением теоремы Биркгофа-Тарского. Действительно, если* $v_0(t,x)$ *— решение задачи* (5.1)-(5.3) *с* $\mu(x) \equiv 0$, *то*

$$v_0(t,x) + L(x, D_x)v_0(t,x) = f(t,x).$$

И, в силу (5.25),

$$v_0(t,x) \geqslant \varphi(x).$$

Поэтому функция $\tilde{A}(0)$ *может быть определена только в том тривиальном случае, когда* $v_0(t,x) \equiv \varphi(x)$.

Замечание 5.3.4. *Вместо условий Неймана* (5.2) *можно использовать более общие*

$$u_n(t,x) + \sigma(x)u(t,x)\big|_S = h(t,x)$$

или условия Дирихле

$$u(t,x)\big|_S = h(t,x).$$

Разумеется, при этом надо будет наложить некоторые условия на функции $h(t,x)$ *и* $\sigma(x)$. *Мы рассмотрели более простой случай с тем, чтобы не загромождать изложение непринципиальными деталями.*

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стало доказательство теорем существования и единственности для ряда задач с вырождением и нелинейностью с помощью метода априорных оценок. В известном смысле можно утверждать, что этот метод не имеет альтернативы в случае произвольного вырождения и смены направления эволюции. Кроме того, для задач с монотонной нелинейностью, данный метод позволяет доказывать существование глобальных решений без ограничений роста и требования липшицевости. С его помощью можно сравнительно легко получать и такие качественные результаты, как принцип максимума и принцип сравнения решений.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях.

1. Можно ли в задаче для нелинейного ОДУ применить метод монотонности?
2. Для задач с меняющимся направлением времени остался открытым вопрос единственности обобщенного решения в случае произвольного поведения вырождающегося коэффициента на торцах цилиндра. Эта задача тесно связана с возможностью повышения гладкости решения, при условии повышенной гладкости входных данных.
3. По-видимому, во все рассмотренные уравнения можно добавлять монотонные нелинейности.
4. В обратной задаче нет никаких оценок гладкости полученного решения $\mu(x)$. Можно ли при каких-то условиях получить оценки гладкости, устойчивости и, кроме этого, оценить скорость сходимости?

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Кожанову А. И. за многолетнюю поддержку, помощь и научное руководство. Также автор благодарит Ситника С. М. и Федорова В. Е. за неоценимую помощь и поддержку.

Список литературы

1. *Артюшин, А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 274—289.
2. *Ашуров, Р. Р.* Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении / Р. Р. Ашуров, Ю. Э. Файзиев // Математические заметки. — 2021. — Т. 110, вып. 6. — С. 824—836.
3. *Бесов, О. В.* Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильлин, С. М. Никольский. — Москва : Наука, 1975. — 480 с.
4. *Врагов, В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве / В. Н. Врагов // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. XII, № 6. — С. 1098—1105.
5. *Гадзова, Л. Х.* Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / Л. Х. Гадзова // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, вып. 2. — С. 195—202.
6. *Гомоюнов, М. И.* Об оценке сверху дробной производной композиции двух функций / М. И. Гомоюнов // Вестник Тамбовского уиниверситета. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 261—267.
7. *Егоров, И. Е.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск : Наука, 2000. — 335 с.
8. *Егоров, И. Е.* Неклассические уравнения высокого порядка математической физики / И. Е. Егоров, В. Е. Федоров. — Новосибирск : Вычислетельный Центр СО РАН, 1995. — 133 с.
9. *Каратопраклиев, Г. Д.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях / Г. Д. Каратопраклиев // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. XII, № 2. — С. 64—75.
10. *Кислов, Н. В.* Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа / Н. В. Кислов // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. — С. 1427—1436.

11. *Кислов, Н. В.* Неоднородные краевые задачи для дифференциально- операторного уравнения смешанного типа и их приложения / Н. В. Кислов // Математический сборник. — 1984. — Т. 125, № 1. — С. 19—37.

12. *Кочубей, А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А. Н. Кочубей // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 8. — С. 1359—1368.

13. *Кочубей, А. Н.* Диффузия дробного порядка / А. Н. Кочубей // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, № 4. — С. 660—670.

14. *Кукушкин, М. В.* О весовых пространставх дробно-дифференцируемых функций / М. В. Кукушкин // Научные ведомости БелГУ. — 2016. — Т. 227, вып. 42, № 6. — (Серия мат. физ.)

15. *Ладыженская, О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — Москва : Наука, 1973. — 403 с.

16. *Лопушанская, Г. П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространствеообщенных функций / Г. П. Лопушанская, А. О. Лопушанский, Е. В. Пасичник // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, № 6. — С. 1288—1299.

17. *Лопушанский, А. О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселвых потенциалов / А. О. Лопушанский // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 6. — С. 1334—1344.

18. *Люстерник, Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — Москва : Высшая школа, 1982. — 271 с.

19. *Мажгихова, М. Г.* Краевые задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом [Электронный ресурс] / М. Г. Мажгихова // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 685—695.

20. *Мажгихова, М. Г.* Начальная и краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом / М. Г. Мажгихова // Челябинский физ.-мат. журнал. — 2018. — Т. 3, вып. 1. — С. 27—37.

21. *Нахушев, А. М.* Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — Москва : Физматлит, 2003. — 272 с.

22. *Олейник, О. А.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки. — 1971. — С. 7—252. — (Серия математика, Математический анализ).

23. *Орловский, Д. Г.* Определение параметра дифференциального урав- нения дробного порядка с производной Римана–Лиувилля в гиль- бертовом пространстве / Д. Г. Орловский // Журнал Сибирского федерального университета. Серия "Математика и физика". — 2015. — Т. 8, вып. 1. — С. 55—63.

24. *Плеханова, М. В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челябинский физ.-мат. журнал. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 15—36.

25. *Плеханова, М. В.* Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челябинский физ.-мат. журнал. — 2017. — Т. 2, вып. 1. — С. 53—65.

26. *Попов, С. В.* Гельдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания / С. В. Попов // Матеатические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 3—12.

27. *Попов, С. В.* Краевая задача Жевре для уравнения третьего порядка / С. В. Попов // Матеатические заметки СВФУ. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 43—56.

28. *Прилепко, А. И.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1992. — Т. 34, № 2. — С. 146—155.

29. *Псху, А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Известия Российской академии наук. — 2009. — Т. 73, вып. 2. — С. 141—182. — (Серия математическая).

30. *Пятков, С. Г.* Краевые задачи для некоторых классов сингулярных параболических уравнений / С. Г. Пятков // Математические труды. — 2004. — Т. 14, № 3. — С. 63—125.

31. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

32. *Терсенов, С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С. А. Терсенов. — Новосибирск : Наука, 1985. — 105 с.

33. *Туров, М. М.* Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана-Лиувилля произвольного порядка / М. М. Туров // Челябинский физ.-мат. журнал. — 2022. — Т. 7, вып. 4. — С. 434—446.

34. *Учайкин, В. В.* Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Артишок, 2008. — 512 с.

35. *Федоров, В. Е.* Дефект в задаче Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана-Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сибирский математический журнал. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143—1162.

36. *Шитикова, М. В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела / М. В. Шитикова // Известия Российской академии наук. — 2022. — № 1. — С. 3—40.

37. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations / A. A. Alikhanov // Differrential Equaitons. — 2010. — Vol. 46, no. 5. — P. 660—666.

38. *Alikhanov, A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation / A. A. Alikhanov // Journal of Computational Physics. — 2015. — Vol. 280. — P. 424—438.

39. *Alimov, S.* Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation / S. Alimov, R. Ashurov // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2020. — Vol. 28, issue 5. — P. 651—658.

40. *Alimov, S.* Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative / S. Alimov, R. Ashurov // Progress in Fractional Differentiation and Applications. — 2022. — Vol. 8, issue 4. — P. 467—474.

41. *Alimov, S.* On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation / S. Alimov, R. Ashurov //. — 2024. — URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:274423112.

42. *Ashurov, R.* Identification of the order of the fractional derivative for the fractional wave equation / R. Ashurov, S. Sitnik // Fractal and Fractional. — 2023. — Vol. 7, issue 1.

43. *Bazhlekova, E.* Fractional evolution equations in Banach spaces : PhD thesis / Bazhlekova E. — 2001.

44. *Bazhlekova, E.* Completely monotone multinomial Mittag-Leffler type functions and diffusion equations with multiple time-derivatives / E. Bazhlekova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2021. — Vol. 24. — P. 88—111.

45. *Bellout, H.* existence of global weak solutions for a class of quasilinear hyperbolic integro-differential equations descibing vescoelastic materials / H. Bellout, J. Necas // Mathematische Annalen. — 1994. — Vol. 299. — P. 275—291.

46. *Bockstal, K. V.* Existence of a unique weak solution to a nonautonomous time-fractional diffusion equation with space-dependent variable order / K. V. Bockstal // Advances in Difference Equations. — 2021. — Vol. 314.

47. *Bockstal, K. V.* Uniqueness for inverse source problems of determining a space dependent source in time-fractional equations with non-smooth solutions / K. V. Bockstal // Fractal and Fractional. — 2021. — Vol. 4, issue 5. — P. 169.

48. *Boyko, K. V.* The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov-Caputo derivatives / K. V. Boyko, V. E. Fedorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 46, no. 6. — P. 1293—1302.

49. *Christ, F. M.* Dispersion of small aplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation / F. M. Christ, M. I. Weinstein // Journal of Functional Analysis. — 1991. — Vol. 100. — P. 87—109.

50. Convex Lyapunov functions for stability analysis of frational order systems / W. Chen [et al.] // IET Control THeory and Applications. — 2017. — Vol. 11, no. 7. — P. 1070—1074.

51. Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in R^d / J. Kemppainen [et al.] // Mathematische Annalen. — 2016. — Vol. 366. — P. 941—979.

52. *Diethelm, K.* On the separation of solutions of fracitonal differential equations / K. Diethelm // Fractional calculus and applied analysis. — 2008. — Vol. 11, no. 3. — P. 259—268.

53. *Diethelm, K.* Analysis of fracitonal differential equations / K. Diethelm, N. J. Ford // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2002. — Vol. 265. — P. 229—248.

54. *Eidelman, S. D.* Cauchy problem for fractional diffusion equations / S. D. Eidelman, A. N. Kochubei // Journal of Differential Equations. — 2004. — Vol. 199. — P. 211—255.

55. *Engler, H.* On the stability of a Volterra integral euation with monotone nonlinearity / H. Engler // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1982. — Vol. 14, no. 5. — P. 801—810.

56. *Engler, H.* Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integro-differential equations descibing vescoelastic materials / H. Engler // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1991. — Vol. 113. — P. 1—38.

57. *Engler, H.* Strong solutions of quasilinear integro-differential equations with singular kernels in several space dimensions / H. Engler // Electronic Journal of Differential Equations. — 1996. — Vol. 1995, no. 2. — P. 1—16.

58. *Fedorov, V. E.* Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations / V. E. Fedorov // Mathematics. — 2020. — Vol. 8.

59. *Fedorov, V. E.* Degenerate multi-term equations with Gerasimov-Caputo derivatives in the sectorial case / V. E. Fedorov, K. V. Boyko // Mathematics. — 2022. — Vol. 10.

60. *Fedorov, V. E.* On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces / V. E. Fedorov, M. Kostic // Eurasian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 9, no. 3. — P. 33—57.

61. *Fedorov, V. E.* Sectorial tuples of operators and quasilinear frational equations whth multi-term linear part / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1502—1512.

62. *Fujiwara, K.* Remark on the chain rule of fractional derivative in the Sobolev Space / K. Fujiwara // Mathematical Inequalities and Applications. — 2021. — Vol. 24, no. 4. — P. 1113—1124.

63. *Gomoyunov, M. I.* Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in frational order systems / M. I. Gomoyunov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2018. — Vol. 21. — P. 1238—1261.

64. *Gripenberg, G.* Global existence of solutions of Volterra integrodifferential equations of parabolic type / G. Gripenberg // Journal of Differential Equations. — 1993. — Vol. 102. — P. 382—390.

65. *Gripenberg, G.* Nonlinear Volterra equations of parabolic type due to singular kernels / G. Gripenberg // Journal of Differential Equations. — 1994. — Vol. 112. — P. 154—169.

66. *Gripenberg, G.* On the uniqueness and nonuniqueness of weak solutions of hyperbolic-parabolic Volterra equations / G. Gripenberg // Differential and Integral Equations. — 1994. — Vol. 7, no. 2. — P. 509—522.

67. *Gripenberg, G.* Weak solutions of hyperbolic-parabolic Volterra equations / G. Gripenberg // Transactions of the American Mathematical Society. — 1994. — Vol. 343, no. 2. — P. 675—694.

68. *Gripenberg, G.* Volterra Integral and Functional Equations : Cambridge Ocean Technology Series / G. Gripenberg, S.-0. Londen, O. Staffans. — Cambrige : Cambrige University Press, 1990. — 701 p.

69. *Janno, J.* Inverse problem to identify a spacedependent diffusivity coefficient in a generalized subdiffusion equation from final data / J. Janno, K. Kasemets, N. Kinash // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Vol. 71. Issue 1. — 2022. — P. 3—15.

70. *Kemppainen, J.* Existence and uniqueness of the solution for a time-Fractional diffusion equation with robin boundary condition / J. Kemppainen // Abstract and Applied Analysis. — 2011. — P. 1—11.

71. *Kemppainen, J.* Representation of solutions and large-time behavior for fully nonlocal diffusion equations / J. Kemppainen, J. Siljander, R. Zacher // Journal of Differential Equations. — 2017. — Vol. 263. — P. 149—201.

72. *Kian, Y.* On time-fractional diffusion equations with space-dependent variable order / Y. Kian, E. Soccorsi, M. Yamamoto // Annales Henri Poincare. — 2018. — Vol. 12, issue 19. — P. 3855—3881.

73. *Kian, Y.* Well-posedness for weak and strong solutions of non-homogeneous initial bounary value problems for fracitonal diffusion equations / Y. Kian, M. Yamamoto // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2021. — Vol. 24, no. 1. — P. 168—201.

74. *Kilbas, A. A.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo ; ed. by J. van Mill. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 523 p. — (North-Holland Mathematics Studies).

75. *Kinash, N.* Reconstruction of an order of derivative and a source term in a fractional diffusion equation from final measurements / N. Kinash, J. Janno // Inverse Problems. — 2018. — Vol. 34, no. 2. — P. 25.

76. *Kinash, N.* Inverse problems for a generalized subdiffusion equation with final overdetermination / N. Kinash, J. Janno // Mathematical Modelling and Analysis. — 2019. — Vol. 24, issue 2. — P. 236—262.

77. *Kochubei, A.* Handbook of fractional calculus with applications. Volume 2: Fractional differential equations / A. Kochubei, Y. Luchko. — 2019.

78. *Lakshmihantham, V.* General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations / V. Lakshmihantham, A. S. Vatsala // Applied Mathematics Letters. — 2008. — Vol. 21. — P. 828—834.

79. *Londen, S.-O.* Some existence results for a nonlinear hyperbolic integro-differential equation with singular kernel / S.-O. Londen // Journal of Integral Equations and Applications. — 1991. — Vol. 3, no. 1. — P. 3—30.

80. *Mainardi, F.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation / F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2001. — Vol. 4, issue 2. — P. 153—192.

81. *Meyer-Nieberg, P.* Banach Lattices / P. Meyer-Nieberg. — Berlin : Springer-Verlag, 1991. — 395 p.

82. *Nohel, J. A.* Weak solutions for a nonlinear system in viscoelasticity / J. A. Nohel, R. C. Rogers, A. E. Tzavaras // Communications in Partial Differential Equations. — 1988. — Vol. 13, no. 1. — P. 97—127.

83. On the existence of a unique solution for a class of fractional differential inclusions in a Hilbert space / M. Kamenskii [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, issue 2. — P. 828—834.

84. *Podlubny, I.* Fractional differential equations. Vol. 198 / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 523 p. — (Mathematics in Science and Engineering).

85. *Prilepko, A. I.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — New York : MarcelDekker, 2000. — 709 p.

86. *Rossikhin, Y. A.* Reflections on two parallel ways in progress of fractional calculus in mechanics of solids / Y. A. Rossikhin // Applied Mechanics Reviews. — 2010. — Vol. 63, no. 1. — P. 3—40.

87. *Sakamoto, K.* On time-fractional diffusion equations with space-dependent variable order / K. Sakamoto, M. Yamamoto // Annales Henri Poincare. — 2018. — Vol. 12, issue 19. — P. 3855—3881.

88. *Staffams, O. J.* On the stability of a Volterra integral euation with monotone nonlinearity / O. J. Staffams // Journal of Integral Equaions. — 1984. — Vol. 7. — P. 239—248.

89. *Wittbold, P.* Bounded weak solutions of time-fractional porous medium type and more general nonlinear and degenerate evolutionary integrodifferential equations / P. Wittbold, P. Wolejko, R. Zacher // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2021. — Vol. 499, issue 1. — P. 20.

90. *Yamamoto, M.* Weak solutions to non-homogeneous boundary value problems for time-fractional diffusion equations / M. Yamamoto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 460. — P. 365—381.

91. *Zacher, R.* Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients / R. Zacher // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 348. — P. 137—149.

92. *Zacher, R.* Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert Spaces / R. Zacher // Funkcialaj Ekvacioj. — 2009. — Vol. 52. — P. 1—18.

93. *Zacher, R.* A weak Harnack inequality for fractional evolution equations with discontinuous coefficients / R. Zacher // Annali della Scuola normale superiore di Pisa. — 2013. — Vol. XII. — P. 903—940.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях из списка ВАК РФ

94. *Артюшин, А. Н.* Интегральные неравенства с дробной производной и их приложение к вырождающимся дифференциальным уравнениям с дробной производной Капуто / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. — 2020. — Т. 61, № 2. — С. 266—282.

95. *Артюшин, А. Н.* Обратная задача определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. — 2023. — Т. 64, № 4. — С. 675—686.

96. *Artyushin, A. N.* Differential equations with fractional derivatives and changing direction of evolution / A. N. Artyushin, S. Z. Dzhamalov // Journal of Mathematical Sciencies. — 2023. — Vol. 277, no. 3. — P. 366—374.

97. *Artyushin, A. N.* Fractional wave equation with changing direction of evolution / A. N. Artyushin, S. Z. Dzhamalov // Journal of Mathematical Sciencies. — 2024. — Vol. 284, no. 2. — P. 166—178.