Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Гальт Алексей Альбертович

СВОЙСТВО РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор
В. Д. Мазуров

Новосибирск – 2024

Оглавление

Введение

Постановка задачи и актуальность темы исследований.

Диссертационная работа посвящена классическому направлению теории групп — изучению их подгруппового строения. Одним из центральных объектов при изучении подгруппового строения являются простые группы. Любая конечная группа может быть построена из конечных простых групп с помощью конечного числа расширений, поэтому наиболее естественным представляется изучение подгруппового строения конечных простых групп. Конечные простые группы можно разделить на три семейства: спорадические группы, знакопеременные группы и конечные группы лиева типа. Основной массив составляют конечные группы лиева типа, которые делятся на 16 классов. Шесть классов составляют, так называемые, классические группы, которые имеют естественное матричное представление, и десять — исключительные.

Конечные группы лиева типа G имеют тесную связь с простыми связными линейными алгебраическими группами $\overline{G}$, определенными над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики p. Они возникают из линейных алгебраических групп как множество неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга σ. Важную роль как в линейных алгебраических группах, так и в конечных группах лиева типа играют максимальные торы (см. раздел 1.2). В частности, они фигурируют в теории представлений групп лиева типа и занимают центральное место в теории Каждана-Люстига (см. [20]). Кроме того, они возникают при исследовании различных задач, связанных с подгрупповым строением, поскольку каждый полупростой элемент группы лиева типа содержится в некотором максимальном торе.

Изучению максимальных торов посвящено большое количество работ различных авторов. Основополагающие результаты о строении максимальных торов были получены Р. Картером в работах [23] и [24]. А. Бутурлакин и М. Гречкосеева описали циклическое строение максимальных торов во всех простых классических группах [2]. В случае исключительных групп лиева типа необходимо выделить работы Д. Деризиотиса с А. Факиоласом и с Г. Михлером о строении максимальных торов в группах лиева типа E_6, E_7, E_8 [29] и группах ${}^3D_4(q)$ [30] соответственно. Максимальные торы в исключительных группах лиева типа F_4 обсуждаются в работах К. Шиноды [42], Т. Шоджи [43] и Р. Лоутера [37]. Также отметим работы П. Флейшмана и И. Янушчака [31, 32] и диссертацию П. Гагера [33].

Напомним определение одного из основных понятий, используемых в диссертации. Пусть A — нормальная подгруппа в группе G. Подгруппа B группы G называется *дополнением* к A в G, если $G = AB$ и $A \cap B = 1$. В этом случае мы также говорим, что группа G *расщепляется над* A.

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [45] (автор диссертации благодарен В. Л. Попову, указавшему на этот факт). Хорошо известно, что все максимальные торы $\overline{T}$ группы $\overline{G}$ сопряжены в ней [40, следствие 6.5] и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$.

Проблема 1 (Ж. Титс). *Описать группы $\overline{G}$, в которых $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$.*

Отметим, что в случае простых групп Ли сформулированная проблема была решена в работе [28]. При переходе к конечным группам G лиева типа возникает аналогичный вопрос. А именно, пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы G и $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ — алгебраический нормализатор. Известно, что в случае конечных групп максимальные торы не обязаны быть сопряженными в группе G.

Проблема 2. *Описать группы G и их максимальные торы T, в которых $N(G,T)$ расщепляется над T.*

Следуя за работой [9], прообраз элемента группы Вейля W в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ будем называть *поднятием.* Для данной группы $\overline{G}$ положительный ответ на проблему 1, в частности означает, что любой элемент из W имеет поднятие в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ такого же порядка. Естественно рассмотреть вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ в нерасщепляемом случае. Дж. Адамс и Х. Хе в работе [9] заметили, что если порядок элемента w из группы Вейля равен d, то минимальный порядок поднятия для w равен либо d, либо $2d$. В работе [47] были рассмотрены эллиптические элементы группы Вейля, то есть элементы, не имеющие собственных значений 1 в естественном представлении. В частности, было доказано, что минимальный порядок поднятий для таких элементов равен d, за исключением простых алгебраических групп типа C_n или F_4. Результаты для так называемых регулярных элементов группы Вейля можно найти в работах [9] и [41]. Отметим, что Дж. Люстиг в работе [39] изучал поднятия инволюций группы Вейля в нормализаторе максимального тора.

Вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля может быть задан и для конечных групп лиева типа G. Если порядок элемента w из группы Вейля равен d и минимальный порядок его поднятия в G равен d, то он равен d и в группе $\overline{G}$.

При изучении строения групп одной из ключевых задач является описание и исследование максимальных подгрупп. В случае конечных простых групп описание максимальных подгрупп продолжается до сих пор. Стоит отметить недавние работы Д. Крэйвена [26, 27], посвященные описанию максимальных подгрупп в исключительных группах лиева типа F_4, E_6 и E_7.

Подгруппы в классических группах в значительной степени описывает теорема М. Ашбахера [16].

Теорема (Ашбахер). *Пусть G — классическая группа, $H \leqslant G$. Тогда либо образ H в $G/Z(G)$ является почти простой группой, либо H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$.*

Здесь $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ — естественные классы подгрупп в классических группах, выделенные М. Ашбахером.

Точное описание элементов в классах $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ получено в монографиях [19, 36]. Следует отметить, что в определении классов $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ в [16] и [19, 36] имеются незначительные расхождения и в дальнейшем классы Ашбахера мы будем понимать в смысле [19, 36]. В таблице 4.1 раздела 4.1 приведено примерное описание (тип) подгрупп, составляющих тот или иной класс Ашбахера в общих линейных группах (см. [36, Таблица 1.2.A]). Строгое описание классов $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ для классических групп, у которых размерность естественного модуля не меньше 13, см. в [36, Глава 4], и для оставшихся классических групп см. [19, таблицы 8.1–8.85], куда включено также для групп малых размерностей полное описание подгрупп, не содержащихся в элементах из классов Ашбахера, то есть являющихся почти простыми. М. Либек и Г. Зейтс в работе [38] получили новое доказательство теоремы Ашбахера с помощью теории алгебраических групп и элементарной линейной алгебры.

Отметим, что теорема Ашбахера не дает полного описания подгруппового строения соответствующих групп хотя бы по той причине, что нет описания почти простых подгрупп в классических группах. И даже в ситуации, когда подгруппа заведомо не является почти простой (скажем, имеет нетривиальный разрешимый радикал и содержится в некоторой локальной подгруппе), использование теоремы Ашбахера в качестве инструмента индуктивных рассуждений может быть сопряжено со значительными трудностями. Например, если подгруппа H классической группы попадает в класс $\mathscr{C}_6$ (нормализаторы подгрупп симплектического типа), то контролировать выполнение предположения индукции бывает зачастую невозможно, поскольку меняется характеристика основного поля. При этом подгруппа H вовсе не обязана содержаться в локальной максимальной подгруппе, которые полностью описаны (см. [36, следствие 1.2.4]).

Такого рода трудности возникали, например, в работах [4, 5, 6] при получении описания простых групп, обладающих холловым свойством D_π. Там эти трудности удалось преодолеть за счет использования описания нормализаторов так называемых радикальных подгрупп в классических группах. Это описание было получено Дж. Альперином и П. Фонгом в [10] и Дж. Аном в [11, 12, 13, 14] как побочный результат изучения в случае классических групп известной гипотезы Альперина о весах, имеющей большое значение для теории представлений. В частности, оказалось, что если H — подгруппа в классической простой группе G над полем характеристики p

и H имеет нетривиальную нормальную r-подгруппу для некоторого простого числа r, то H содержится в собственной подгруппе C группы G такой, что любой неабелев композиционный фактор группы C изоморфен либо знакопеременной группе, либо классической группе характеристики p или r.

Однако точная формулировка результатов Альперина, Фонга и Ана в той части, которая характеризует радикальные подгруппы и их нормализаторы, достаточно громоздка, и хотелось бы иметь эквивалентный данному описанию инструмент индуктивных рассуждений, с одной стороны напоминающий привычные результаты Ашбахера, а с другой, позволяющий обходить трудности с возникновением «чужой» характеристики.

Цель и основные результаты диссертации.

Целью диссертации является полное решение проблем 1 и 2, а также уточнение теоремы Ашбахера о подгруппах классических групп в локальном случае. Основными результатами диссертации являются следующие:

1. Найдены все простые связные линейные алгебраические группы, определенные над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики, в которых нормализатор максимального тора расщепляется над этим тором. Тем самым, проблема 1 полностью решена. Результат опубликован в статьях [54, 55, 56, 57].

2. Для всех конечных простых классических групп найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. Результат опубликован в статьях [54, 55, 56].

3. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. Тем самым, проблема 2 полностью решена. Результат опубликован в статьях [58, 59, 60, 61].

4. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора. Результат опубликован в статьях [58, 59, 60, 61].

5. Для линейных и унитарных групп получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой. Результат опубликован в статьях [63, 64].

6. Для симплектических и ортогональных групп над полем нечетной характеристики получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой нечетного порядка. Результат опубликован в статье [65].

Личный вклад автора диссертации.

Результаты диссертации опубликованы в работах [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результат 1, дающий ответ на проблему Ж. Титса, получен автором лично [54, 55, 56, 57]. Результат 2, отвечающий на проблему 2 для классических групп, получен автором лично [54, 55, 56]. При исследовании проблемы 2 в исключительных группах лиева типа потребовались вычисления в системах компьютерной алгебры MAGMA и GAP. В связи с этим результаты 3 и 4 получены в соавторстве с А. М. Старолетовым, отвечавшим за компьютерные вычисления, а методы решения проблемы для рассматриваемых групп и доказательства основных результатов принадлежат автору диссертации [58, 59, 60, 61]. В личной работе автора [62] приводится обзор результатов о строении нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа. Результат 5 получен в соавторстве с Е. М. Аверкиным, В. Го (Китай), Д. О. Ревиным в работе [63] и с Д. О. Ревиным в работе [64]. Д. О. Ревин отвечал за постановку задачи и возможные подходы к ее решению. Разработка методов решения поставленной задачи и доказательство основных результатов в статьях [63] и [64] принадлежат А. А. Гальту. В. Го (Китай) и Е. М. Аверкин участвовали в обсуждении полученных в [63] результатов и внесли полезные замечания, позволившие улучшить финальную версию работы. Результат 6 получен в соавторстве с Н. Яном в работе [65]. Методы решения поставленной задачи и доказательство основной теоремы статьи [65] принадлежат А. А. Гальту. Н. Ян участвовал в обсуждении итоговых результатов и внес ценные замечания, которые улучшили финальную версию работы. Решающий вклад автора диссертации в получении результатов 5 и 6 не вызывает сомнений.

Новизна, теоретическая и практическая значимость результатов.

С одной стороны, любая конечная группа может быть построена из конечных простых групп с помощью конечного числа расширений. С другой стороны, многие задачи, поставленные для произвольных конечных групп, удается свести к конечным простым группам. Поэтому изучение подгруппового строения конечных простых групп представляется естественным и важным направлением в теории конечных групп. Данная диссертация посвящена группам лиева типа, которые составляют основной массив конечных простых групп, и наибольшие сложности при решении большинства задач возникают именно в этом классе.

Основным направлением исследований диссертации является вопрос о расщепляемости нормализатора максимального тора в алгебраических группах и конечных группах лиева типа. В случае алгебраических групп данная проблема была поставлена одним из ведущих математиков Ж. Титсом еще в 1966 году. Полученные результаты дают исчерпывающий ответ на проблему как для алгебраических групп, что решает проблему Ж. Титса, так и для конечных групп лиева типа, причем в случае расщепляемости нормализатора, соответствующее дополнение построено конструктивно. Отметим, что аналогичные результаты для алгебраических групп были получены другими методами Дж. Адамсом и Х. Хе в работе [9], вышедшей в то же время, что и [57]. Часто возникает ситуация, когда достаточно знаний о некоторых элементах в рассматриваемой группе. В этом случае полученные результаты о минимальных порядках поднятий элементов группы Вейля в соответствующих нормализаторах представляют несомненный интерес.

При проведении индуктивных рассуждений в конечных группах одним из главных инструментов является теорема Ашбахера. Полученные результаты уточняют теорему Ашбахера в локальном случае и позволяют избегать трудностей с возникновением «чужой» характеристики поля.

Все основные результаты диссертации являются новыми, что подтверждается публикациями автора в рецензируемых научных журналах, а также докладами на конференциях и специализированных семинарах. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть полезны в первую очередь специалистам по теории групп. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, теория линейных алгебраических групп, теория групп лиева типа, методы линейной алгебры. Автором диссертации разработаны новые методы, позволившие при исследовании расщепляемости, рассматривать многие классы максимальных торов одновременно. Кроме этого, для вычислений в исключительных группах лиева типа привлекаются компьютерные программы GAP и Magma.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В. Д. Мазурова (г. Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), школа-конференция «Теория групп и узлы» (г. Натал, Бразилия, 17–28 ноября 2014 г.), международная научная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань, 2–6 июня, 2014 г.), международная молодежная школа-конференция «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (г. Новосибирск, 28 июля – 8 августа, 2014 г.), международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (г. Минск, Республика Беларусь, 14–18 сентября 2015 г.), международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (п. Эльбрус, Кабардино-Балкарская Республика, 17–22 мая 2017 г.), 12-ая международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Эрлагол, Республика Алтай, 23–29 июня, 2017 г.), международная конференция «Groups St Andrews» (г. Бирмингем, Великобритания, 5–13 августа, 2017 г.), международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (г. Москва, 28–31 мая 2019 г.), международная конференция «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвященная 70-летию А.Х. Журтова (г. Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г.), международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (г. Казань, 23–27 августа, 2021 г.), международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова (г. Нальчик, 28 июня – 3 июля 2022 г.), вторая конференция Математических центров России (г. Москва, 7–11 ноября 2022 г.), международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В.Д. Мазурова (г. Новосибирск, 2–8 июля 2023 г.).

Отдельно отметим, что по результатам диссертации были сделаны пленарные доклады на следующих конференциях: российско-индийская школа-конференция «Группы и смежные структуры» (г. Мохали, Индия, 7–8 декабря, 2017 г.), международная конференция «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 14–18 ноября 2022 г.), международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 70-летию А.А. Махнева (г. Нальчик, 9–15 июля 2023 г.), II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д.А. Граве (г. Вологда, 19–23 сентября, 2023 г.).

Результаты исследований неоднократно докладывались на семинарах «Теория групп», «Алгебра и логика» в Новосибирске, а также на Общеинститутском математическом семинаре ИМ СО РАН, Уральском семинаре по теории групп и комбинаторике (г. Екатеринбург), математическом семинаре в Цзяннаньском университете (г. Уси, Китай).

Структура и объем диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь состоят из разделов. Основные результаты диссертации называются теоремами. Все утверждения — предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер раздела, третье — номер утверждения. Рисунки и формулы имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер рисунка или формулы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 248 страницах, библиография содержит 65 наименований.

Содержание диссертации

Глава 1 носит вводный характер. В ней собраны основные определения, обозначения и предварительные результаты. Приведены необходимые сведения о линейных алгебраических группах, группах лиева типа и связь между ними.

Глава 2 посвящена решению вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора в классических группах, то есть решению проблем 1 и 2 для классических групп. В разделах главы последовательно рассматриваются симплектические группы (раздел 2.2), линейные и унитарные группы (раздел 2.3), а затем ортогональные группы (раздел 2.4). В каждом из разделов сначала разбираются соответствующие группы над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, а затем над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Глава 3 посвящена решению вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных группах лиева типа (односвязных и присоединенного типа), то есть решению проблем 1 и 2 для этих групп. Более того, в этой главе найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора.

Глава 4 посвящена уточнению теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной r-подгруппой. Основными результатами главы являются теорема 4.1.1 и теорема 4.1.2.

Благодарности. Я выражаю искреннюю благодарность своему научному консультанту и первому научному руководителю чл.-корр. РАН Виктору Даниловичу Мазурову за интерес к полученным результатам и поддержку на протяжении всей научной деятельности. Я особо благодарен своему научному руководителю по кандидатской диссертации Евгению Петровичу Вдовину, инициировавшему мою работу над проблемой расщепляемости нормализатора максимального тора в группах лиева типа. Я признателен своим соавторам Алексею Михайловичу Старолетову и Даниле Олеговичу Ревину, а также Андрею Викторовичу Васильеву и Александру Александровичу Бутурлакину за плодотворные научные обсуждения и ценные замечания.

Я хотел бы почтить светлую память моей мамы, Валентины Андриановны Марковой, поддерживавшей и помогавшей мне на протяжении всей моей жизни.

Глава 1

Обозначения и предварительные результаты

1.1 Обозначения и соглашения

В тексте используются следующие обозначения:

p — некоторое простое число;

q — некоторая степень простого числа p;

$(n)_2$ — 2-часть натурального числа n, то есть наибольшая степень числа 2, делящая n;

$\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q;

$\overline{\mathbb{F}}_p$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$;

$\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n (для краткости записи в таблицах может использоваться запись n);

D_{2n} — диэдральная группа порядка $2n$;

$Z(G)$ — центр группы G;

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$O^p(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой является p-группой;

$H \leqslant G$ — H является подгруппой группы G;

$H \trianglelefteq G$ — H является нормальной подгруппой группы G;

G/H — факторгруппа группы G по нормальной подгруппе H;

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

$G \times H$ — прямое произведение групп G и H;

$G \rtimes H$ — полупрямое произведение групп G и H с нормальной подгруппой G;

$G \circ H$ — центральное произведение групп G и H;

$G \wr H$ — подстановочное сплетение группы G и группы подстановок H;

Sym_n или S_n — группа всех подстановок на n элементах;

$N_A(B)$ — нормализатор в (под)группе A подгруппы B (предполагается, что $A, B \leqslant G$ для некоторой группы G);

$\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ — разбиение натурального числа n;

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали;

$\mathrm{bd}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ — блочно-диагональная матрица с квадратными блоками T_1, $T_2, \dots, T_n$;

$N(G, T)$ — алгебраический нормализатор тора T.

В главах 2 и 3 для краткости изложения мы часто будем использовать следующие сокращения. Для произвольного корня r_i корневой системы Φ будем писать w_i, h_i и n_i вместо w_{r_i}, $h_{r_i}(-1)$ и n_{r_i} соответственно. Любой элемент H максимального тора $\overline{T}$ может быть представлен в виде $H = h_{r_1}(\lambda_1)h_{r_2}(\lambda_2)\dots h_{r_l}(\lambda_l)$, который для краткости будет также записываться через $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$.

1.2 Линейные алгебраические группы

Необходимую информацию о строении и свойствах линейных алгебраических групп можно найти в [8], о группах лиева типа — в [3, 22], о связи между группами лиева типа и линейными алгебраическими группами — в [3, 21, 40]. В этом параграфе, если не оговорено особо, подразумевается, что алгебраические группы определены над некоторым алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$.

Тором алгебраической группы называется связная диагонализируемая (d-) группа (эквивалентно, подгруппа, изоморфная группе диагональных матриц $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$). Все максимальные торы алгебраической группы сопряжены [40, Следствие 6.5].

Если $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, то пусть $\overline{T}$ — некоторый ее максимальный тор. *Рангом* связной алгебраической группы называется размерность ее максимального тора. Через $\Phi(\overline{G})$ обозначается корневая система группы $\overline{G}$ относительно максимального тора $\overline{T}$ (она не зависит от выбора максимального тора) и $W(\overline{G}) \simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ — *группа Вейля* группы $\overline{G}$.

Напомним, что для любой корневой системы Φ существует такой набор корней $r_1, \ldots, r_n$, что каждый корень из Φ единственным образом представляется в виде $\Sigma_{i=1}^n \alpha_i r_i$, где все коэффициенты α_i целочисленные и одновременно либо неотрицательные, либо неположительные. Такой набор корней называется *фундаментальной системой* корневой системы Φ, а элементы из фундаментальной системы — *фундаментальными корнями.* При этом фундаментальная система является базисом пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Размерность пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ называется *рангом* корневой системы Φ. Отметим, что ранги группы $\overline{G}$ и ее корневой системы $\Phi(G)$ совпадают. Далее будем считать, что все фундаментальные корни положительны. Тогда корень r является *положительным* в том и только в том случае, когда он представим в виде линейной комбинации фундаментальных корней с неотрицательными коэффициентами. Аналогичная ситуация с отрицательными корнями. Для корневой системы Φ через Φ^+ (Φ^-) обозначается множество положительных (отрицательных) корней. *Высотой* корня $r = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i r_i$ называется число $h(r) = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i$. В любой неприводимой корневой системе Φ существует единственный корень максимальной высоты, который в дальнейшем будет обозначаться r_0.

На $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ естественным образом определена структура евклидова пространства. Через w_r обозначается отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню r. *Группой Вейля* W корневой системы Φ называется группа, порожденная отражениями w_r по всем r из Φ. Известно, что группа Вейля корневой системы Φ порождается отражениями в фундаментальных корнях — *фундаментальными отражениями.* Через $l(w)$ обозначается длина элемента w, то есть минимальное количество множителей в разложении элемента w в произведение фундаментальных отражений. В группе Вейля существует единственный элемент максимальной длины, обозначаемый в дальнейшем w_0, причем w_0 переводит все положительные корни в отрицательные. В общем случае $l(w)$ равно $|\Phi^- \cap (\Phi^+)^w|$, то есть количеству положительных корней, которые элемент w переводит в отрицательные.

Если $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, $\overline{T}$ — ее максимальный тор и Φ — корневая система группы $\overline{G}$ относительно максимального тора $\overline{T}$, то $W(\overline{G}) \simeq W(\Phi)$ и мы будем отождествлять эти две группы.

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа, π — ее некоторое точное рациональное представление, Γ_π — решетка, порожденная весами представления π. Через Γ_{ad} обозначается решетка, порожденная корнями системы Φ, через Γ_{sc} — решетка, порожденная фундаментальными весами. Решетки Γ_{sc}, Γ_π и Γ_{ad} не зависят от конкретного представления группы $\overline{G}$, и справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leqslant \Gamma_\pi \leqslant \Gamma_{sc}$ (см. [8, 31.1]). Для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются *изогениями.* Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. Если решетка Γ_π совпадает с решеткой Γ_{sc}, то говорят, что группа $\overline{G}$ *односвязна* и обозначают ее $\overline{G}_{sc}$. Если же Γ_π совпадает с Γ_{ad}, то говорят, что группа $\overline{G}$ имеет *присоединенный тип* и обозначают ее $\overline{G}_{ad}$. Любая простая связная линейная алгебраическая группа с корневой системой Φ может быть получена как факторгруппа группы $\overline{G}_{sc}$ по подгруппе из ее центра. Центр группы $\overline{G}_{ad}$ тривиален, и она проста как абстрактная группа. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_π называется *фундаментальной группой* группы $\overline{G}$ и обозначается через $\Delta(\overline{G})$. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_{ad} зависит только от корневой системы Φ и обозначается через $\Delta(\Phi)$. Хорошо известно, что $\Delta(\Phi)$ является циклической, за исключением корневой системы $\Phi = D_{2n}$, когда $\Delta(D_{2n}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ является элементарной абелевой группой порядка 4 (см. [40, таблица 9.2]).

Пусть $\overline{B}$ — подгруппа Бореля группы $\overline{G}$, то есть максимальная связная разрешимая подгруппа. Пусть $\overline{T} \leqslant \overline{B}$ — максимальный тор группы $\overline{G}$ и $\overline{U} = R_u(\overline{B})$ — унипотентный радикал группы $\overline{G}$, то есть максимальная связная унипотентная подгруппа. Тогда $\overline{B} = \overline{TU}$. Существует единственная подгруппа Бореля $\overline{B}^-$ такая, что $\overline{B} \cap \overline{B}^- = \overline{T}$. Обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$ и рассмотрим множество минимальных подгрупп в группах $\overline{U}$ и $\overline{U}^-$, инвариантных относительно $\overline{T}$. Это множество находится во взаимно-однозначном соответствии с корнями корневой системы Φ. Элементы этого множества обозначаются через $X_r, r \in \Phi$ и называются *корневыми подгруппами.* Каждая группа X_r является связной унипотентной группой размерности 1, то есть изоморфна аддитивной группе поля $\mathbb{F}$. Элементы группы X_r записываются в виде $x_r(t), t \in \mathbb{F}$. При этом $\overline{G} = \langle x_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F}\rangle$. Определим элементы

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t), \quad h_r(t) = n_r(t)n_r(1)^{-1}, r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^*.$$

Тогда

$$\overline{T} = \langle h_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^*\rangle, \quad N_{\overline{G}}(\overline{T}) = \langle n_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^*\rangle.$$

Согласно [22, теорема 7.2.2] мы имеем следующие соотношения:

$$n_s n_r n_s^{-1} = n_{w_s(r)}(\eta_{s,r}), \quad \eta_{s,r} = \pm 1,$$

$$n_s h_r(\lambda) n_s^{-1} = h_{w_s(r)}(\lambda).$$

Для дальнейших вычислений нам будут необходимы конкретные значения констант $\eta_{r,s}$. Мы выберем их значения следующим образом. Пусть $r \in \Phi$ и $r = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i r_i$. Напомним, что $h(r) = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i$. В соответствии с [46], зафиксируем следующий полный порядок на множестве положительных корней: положим $r \prec s$, если либо $h(r) < h(s)$, либо $h(r) = h(s)$ и первая ненулевая координата вектора $s - r$ является положительной. Таблица положительных корней в соответствии с этим порядком может быть найдена в [46].

Напомним, что пара положительных корней (r, s) называется *специальной*, если $r + s \in \Phi$ и $r \prec s$. Пара (r, s) называется *экстраспециальной*, если она специальная и для любой специальной пары (r_1, s_1) такой, что $r + s = r_1 + s_1$, выполнено $r \preccurlyeq r_1$. Пусть $N_{r,s}$ – это структурные константы соответствующей алгебры Ли [22, раздел 4.1]. Тогда значения $N_{r,s}$ можно выбрать произвольным образом на множестве экстраспециальных пар, после чего все остальные структурные константы определены единственным образом в силу [22, предложение 4.2.2]. В нашем случае, мы выбираем $\mathrm{sgn}(N_{r,s}) = +$ для всех экстраспециальных пар (r, s). Значения всех структурных констант на всех парах может быть найдено в [46]. Числа $\eta_{r,s}$ однозначно определены по структурным константам в силу [22, предложение 6.4.3].

Числом Картана A_{rs} двух корней r и s называется целое число $\frac{2(r,s)}{(r,r)}$. Число $A_{r_ir_j}$ для краткости обозначается через A_{ij}.

Диаграммой Дынкина корневой системы Φ называется граф с n вершинами, ассоциированными с фундаментальными корнями $r_1, r_2, \ldots, r_n$, в котором вершины r_i и r_j соединены ребром кратности $A_{ij}A_{ji}$. При этом если корень r_i длиннее, чем корень r_j, то ребро направлено от r_i к r_j. Диаграмма Дынкина однозначно определяет корневую систему Φ. *Расширенной диаграммой Дынкина* называется граф, получаемый из диагаммы Дынкина добавлением корня $-r_0$ и соединением его с фундаментальнымми корнями по обыкновенному правилу.

Для дальнейшего использования приведем в таблице 1.1 расширенные диаграммы Дынкина для всех неприводимых корневых систем.

1.3 Конечные группы лиева типа

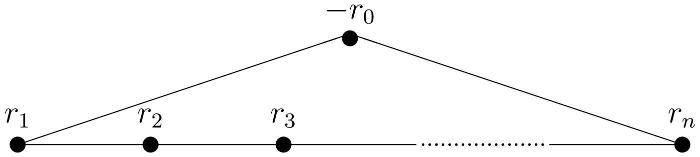
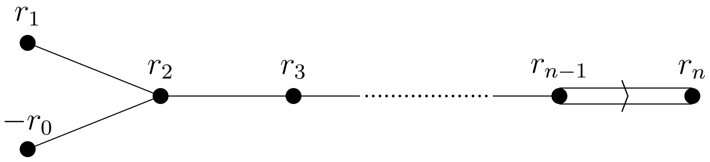
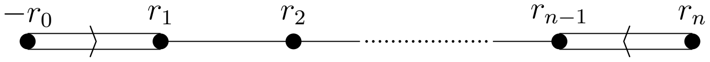
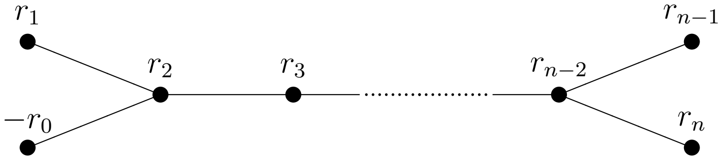
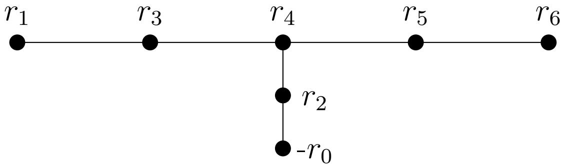
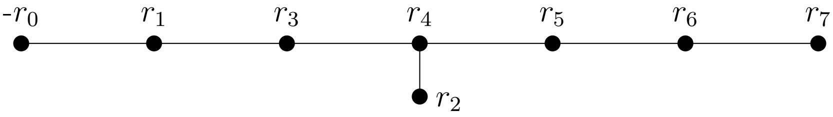
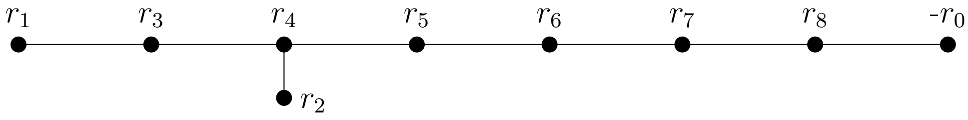
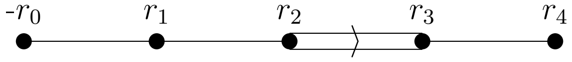
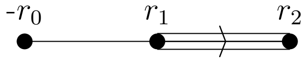
Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного поля $\mathbb{F}_p$. Отметим, что $Z(G)$ может быть нетривиальным. Сюръективный эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ называется *эндоморфизмом Стейнберга* (см. [34, определение 1.15.1]), если множество его неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ конечно. Любую группу, удовлетворяющую условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leqslant G \leqslant \overline{G}_\sigma$, будем называть *конечной группой лиева типа.* Если $\overline{G}$ является простой алгебраической группой присоединенного типа, то G также имеет *присоединенный тип.*

Если $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2D_n(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2E_6(q)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то группа G называется *скрученной*, в остальных случаях группа G называется *расщепленной.*

Группы ${}^2B_2(2^{2n+1})$ называются группами Сузуки, группы ${}^2F_4(2^{2n+1})$ – группами Ри характеристики 2, а ${}^2G_2(3^{2n+1})$ – группами Ри характеристики 3.

Иногда мы будем использовать обозначение $\Phi^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и $\Phi^+(q) = \Phi(q)$ является расщепленной группой лиева типа, $\Phi^-(q) = {}^2\Phi(q)$ является скрученной группой лиева типа.

Таблица 1.1: Корневые системы и расширенные диаграммы Дынкина

Тип Φ	Расширенная диаграмма Дынкина
A_n	
B_n	
C_n	
D_n	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

Если $\overline{T}$ — σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}$, то $T = \overline{T} \cap G$ называется *максимальным тором* группы G лиева типа. Группу $N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ будем называть *алгебраическим нормализатором* тора T и обозначать через $N(G,T)$. Отметим, что справедливо включение $N(G,T) \leqslant N_G(T)$, но равенство, вообще говоря, может не достигаться. Например, если мы рассмотрим $G = \mathrm{SL}_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц T группы G тривиальна, значит, $N_G(T) = G$. С другой стороны, $G = (\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, где σ — эндоморфизм Стейнберга ($\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$). Тогда $T = \overline{T}_\sigma$, где $\overline{T}$ является подгруппой диагональных матриц в $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_2)$. Таким образом, $N(G,T)$ является группой мономиальных матриц в G и $N(G,T) < N_G(T)$. В недавно вышедшей работе [17] найдены все конечные простые группы G лиева типа, для которых $N(G,T) < N_G(T)$.

В группе $\overline{G}$ всегда есть σ-инвариантный максимальный тор, который будем обозначать через $\overline{T}$, причем все максимальные торы сопряжены с $\overline{T}$ в $\overline{G}$ (см., [40, Следствие 6.5]). Для краткости мы будем часто писать $\overline{N}$ вместо $N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Через W обозначается группу Вейля $W(\overline{G}) \simeq \overline{N}/\overline{T}$, а через π — естественный гомоморфизм из $\overline{N}$ в W. Действие σ на W определяется естественным образом. Элементы $w_1, w_2 \in W$ называются *σ-сопряженными*, если $w_1 = (w^{-1})^\sigma w_2 w$ для некоторого элемента w из W.

Предложение 1.3.1. [20, предложения 3.3.1, 3.3.3]. *Тор $\overline{T}^g$ является σ-инвариантным тогда и только тогда, когда $g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$. Отображение $\overline{T}^g \mapsto \pi(g^\sigma g^{-1})$ задает биекцию между G-классами σ-инвариантных максимальных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы W.*

Как следует, из предложения 1.3.1 строение тора $(\overline{T}^g)_\sigma$ группы G определяется только классом σ-сопряженности элемента $\pi(g^\sigma g^{-1})$. Будем говорить, что тор T группы G *соответствует элементу* w, если $T = (\overline{T}^g)_\sigma$ для некоторого $g \in \overline{G}$ такого, что $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$.

Предложение 1.3.2. [2, лемма 1.2]. *Пусть $n = g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Тогда $(\overline{T}^g)_\sigma = (\overline{T}_{\sigma n})^g$, где n действует на $\overline{T}$ сопряжением.*

Предложение 1.3.3. [20, предложение 3.3.6]. *Пусть $n = g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$.*

Тогда

$$(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma/(\overline{T}^g)_\sigma \simeq C_{W,\sigma}(w) = \{x \in W \mid x^{-1}wx^\sigma = w\}.$$

Согласно предложению 1.3.2, получаем, что $(\overline{T}^g)_\sigma = (\overline{T}_{\sigma n})^g$ и $(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma = (\overline{N}^g)_\sigma = (\overline{N}_{\sigma n})^g$. Следовательно, $(\overline{T}^g)_\sigma$ имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе тогда и только тогда, когда существует дополнение к группе $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Следующее замечание показывает, что расщепляемость алгебраического нормализатора не зависит от выбора тора, соответствующего элементу w.

Замечание 1.3.4. *Пусть n и w — элементы из предложения 1.3.3. Предположим, что $n_1 = g_1^\sigma g_1^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(n_1) = w$. Рассмотрим два максимальных тора $(\overline{T}^g)_\sigma$ и $(\overline{T}^{g_1})_\sigma$ группы G, соответствующие элементу w. Согласно предложению 1.3.1 существует элемент $x \in G$ такой, что $(\overline{T}^g)^x = \overline{T}^{g_1}$. Тогда*

$$(N_{\overline{G}}(\overline{T}^{g_1}))_\sigma = (N_{\overline{G}}(\overline{T}^{gx}))_\sigma = ((N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))^x)_\sigma = ((N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma)^x,$$

где последнее равенство следует из того, что $x \in G = \overline{G}_\sigma$.

Таким образом, G-сопряженным максимальным торам соответствуют G-сопряженные алгебраические нормализаторы. Следовательно, при доказательстве результатов мы можем выбирать удобного для вычислений представителя n_1 с условием $\pi(n_1) = w$.

1.4 Предварительные результаты

Определим группы $\mathcal{T} = \langle n_r \mid r \in \Delta\rangle$ и $\mathcal{H} = \overline{T} \cap \mathcal{T}$. Согласно [45, §4.6] имеем $\mathcal{H} = \langle h_r \mid r \in \Delta\rangle$ и $\mathcal{T}/\mathcal{H} \simeq W$. В частности, в случае нечетного q группа $\mathcal{H}$ — элементарная абелева 2-группа.

Замечание 1.4.1. *Заметим, что, если $p = 2$, то $h_r = 1$ для всех $r \in \Delta$, в частности, $\mathcal{H} = 1$ и $\mathcal{T} \simeq W$. Более того, сужение $\tilde{\pi}$ гомоморфизма π на $\mathcal{T}$ — это изоморфизм между $\mathcal{T}$ и W. Пусть T — максимальный тор, соответствующий $w \in W$. Тогда $n = \tilde{\pi}^{-1}(w)$ – поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma n}$ такого же порядка, и $\tilde{\pi}^{-1}(C_W(w))$ — дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.*

Для нескрученных групп лиева типа имеет место следующая лемма.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $g \in \overline{G}$ *и* $n = g^{\sigma}g^{-1} \in \overline{N}$. *Предположим, что* $H \in \overline{T}$ *и* $u \in \mathcal{T}$. *Тогда*

(i) $Hu \in \overline{N}_{\sigma n}$, *если и только если* $H = H^{\sigma n}[n, u]$;

(ii) Если $H \in \mathcal{H}$, *то* $Hu \in \overline{N}_{\sigma n}$, *если и только если* $[n, Hu] = 1$.

Доказательство. (i) Поскольку σ действует тривиально на $\mathcal{T}$, то $Hu = (Hu)^{\sigma n} = H^{\sigma n}u^{\sigma n} = H^{\sigma n}u^{n}$ и $H = H^{\sigma n}[n, u]$.

(ii) Поскольку σ действует тривиально на $\mathcal{H}$, то $Hu = (Hu)^{\sigma n} = (Hu)^{n}$. □

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 1.4.3. *Пусть* T, N *— подгруппы в некоторой группе* G *такие, что* T *абелева и* $N \leqslant N_G(T)$. *Пусть* $a = H_1u_1, b = H_2u_2$, *где* $H_1, H_2 \in T$ *и* $u_1, u_2 \in N$. *Тогда*

$$ab = ba \Leftrightarrow H_1^{-1}H_1^{u_2} \cdot u_2u_1u_2^{-1}u_1^{-1} = H_2^{-1}H_2^{u_1}.$$

В частности, если $[u_1, u_2] = 1$, *то* $ab = ba \Leftrightarrow H_1^{-1}H_1^{u_2} = H_2^{-1}H_2^{u_1}$.

В нескрученном случае эндоморфизм Стейнберга σ является автоморфизмом Фробениуса, который задается на порождающих следующим образом:

$$x_r(t) \mapsto x_r(t^q), r \in \Phi, t \in \overline{\mathbb{F}}_p^*.$$

В частности, мы будем использовать, что $n_r^{\sigma} = n_r$ и $(h_r(\lambda))^{\sigma} = h_r(\lambda^q)$.

Лемма 1.4.4. *Пусть* G *— конечная расщепленная группа лиева типа с группой Вейля* W. *Пусть* $w \in W$ *и* $w_0 \in Z(W)$. *Рассмотрим максимальные торы* T *и* T_0, *соответствующие* w *и* ww_0, *соответственно. Тогда* T *имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе тогда и только тогда, когда* T_0 *имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе.*

Доказательство. Предположим, что $T = \overline{T}_{\sigma n}$ имеет дополнение K в $\overline{N}_{\sigma n}$. Тогда $K \simeq C_{W,\sigma}(w)$ и $w_0 \in C_{W,\sigma}(w)$. Пусть n, n_0 – прообразы элементов w и w_0 в K, соответственно. Для любого $n_1 \in K \leqslant \overline{N}_{\sigma n}$ верно, что $[n_0, n_1] = 1$. Значит $(n_1)^{\sigma n n_0} = n_1^{n_0} = n_1$

и $n_1 \in \overline{N}_{\sigma n n_0}$. Следовательно, $K \leqslant \overline{N}_{\sigma n n_0}$. Поскольку $\pi(n) = w$, то $\pi(K) = \pi(\overline{T}_{\sigma n} {\cdot} K) = \pi(\overline{N}_{\sigma n}) = C_{W,\sigma}(w)$. Получаем, что $\pi|_K : K \to W$ — вложение и $K \cap \overline{T} = 1$. В частности, $K \cap \overline{T}_{\sigma n n_0} = 1$. Поскольку $\overline{N}_{\sigma n n_0}/\overline{T}_{\sigma n n_0} \simeq C_{W,\sigma}(ww_0) = C_{W,\sigma}(w)$, получаем, что группа K – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n n_0}$ в $\overline{N}_{\sigma n n_0}$. □

Отметим, что при доказательстве результатов мы можем сослаться на лемму 1.4.4. Тем не менее, доказывая существование дополнения для максимального тора, мы строим его конструктивно и поэтому почти всегда рассматриваем оба случая w и ww_0.

Для вычислений в группе ${}^2G_2(q)$ нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.4.5. [34, теорема 1.12.1(e)] *Пусть* $\Delta = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — *фундаментальная система корней корневой системы* Φ. *Для корня* $r \in \Phi$ *определим* $\check{r} = 2r/(r,r)$ *и запишем* $\check{r} = \Sigma c_i \check{r}_i$. *Тогда* $h_r(t) = \Pi_{i=1}^{l} h_{r_i}(t^{c_i})$.

Глава 2

Нормализаторы максимальных торов в классических группах

2.1 Краткий обзор результатов главы

Вторая глава посвящена решению проблем 1 и 2 (см. введение) для классических групп. В последующих разделах последовательно рассматриваются симплектические группы (раздел 2.2), линейные и унитарные группы (раздел 2.3), ортогональные группы (раздел 2.4). В каждом из разделов сначала рассматриваются соответствующие группы над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, а затем над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Ответ на проблему 1 для симплектических групп получен в теореме 2.2.1, для линейных групп — в теореме 2.3.1, для ортогональных групп — в теореме 2.4.1 и замечании 2.4.27.

Проблема 2 для симплектических групп решена в теореме 2.2.3, для линейных и унитарных групп — в теореме 2.3.3, для ортогональных групп нечетной размерности — в теореме 2.4.2, для ортогональных групп четной размерности — в теоремах 2.4.3 и 2.4.4. Данные теоремы дают ответ на проблему 2 для всех классических простых групп. В процессе доказательства этих теорем получен ответ на проблему 2 для некоторых классических групп, факторгруппы по центру которых изоморфны рассмотренным простым группам (см. 2.2.4, 2.3.2).

2.2 Симплектические группы

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа C_n. В этом случае группа $\overline{G}$ либо односвязна и $\overline{G} \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, либо имеет присоединенный тип и $\overline{G} \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Ответ на проблему 1 дают следующие два утверждения:

Теорема 2.2.1. *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор в группе $\overline{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Тогда тор $\overline{T}$ имеет дополнение в $\overline{N}$ в том и только в том случае, если $p = 2$ или $n \leqslant 2$.*

Следствие 2.2.2. *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор в группе $\overline{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Тогда тор $\overline{T}$ имеет дополнение в $\overline{N}$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

Согласно предложению 1.3.1 при переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. В случае симплектических групп классы σ-сопряженности группы W совпадают с обычными классами сопряженности и каждому такому классу соответствует циклический тип $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Ответ на проблему 2 в случае симплектических групп содержится в следующих двух утверждениях:

Теорема 2.2.3. *Пусть T — максимальный тор в группе $G = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $p = 2$;

(2) $m = 1$;

(3) $m = 2, k = 2$, *числа* n_1, n_2 *нечетны,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(4) $m = 2, k = 1$, n_1 *нечетно,* n_2 *четно,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(5) $m = 2, k = 0$, *числа* n_1, n_2 *четны,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(6) $m = 2, k = 0$, $q \equiv 1 \pmod 4$.

Следствие 2.2.4. *Пусть* T *— максимальный тор в группе* $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, *соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом* $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. *Тогда* T *имеет дополнение в* $N(G,T)$ *в том и только в том случае, если* $p = 2$.

Напомним некоторые сведения о симплектических группах. В данном разделе рассматриваются симплектические группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, ассоциированные с билинейной формой $x_1y_{-1} - x_{-1}y_1 + \ldots + x_ny_{-n} - x_{-n}y_n$. Через $\mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ обозначается фактор-группа группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ по ее центру. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа типа C_n. В этом случае группа $\overline{G}$ либо односвязна и мы будем обозначать ее через $\overline{G}_{sc}$, либо имеет присоединенный тип и будет обозначаться через $\overline{G}_{ad}$. При этом $\overline{G}_{sc} \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{G}_{ad} \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Строки и столбцы симплектических матриц размерности $2n$ нумеруются в порядке $1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n$. В качестве максимального σ-инвариантного тора $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{G}_{sc}$ возьмем группу всех матриц вида $\mathrm{bd}(D, D^{-1})$, где D — невырожденная диагональная матрица размерности n. Через $\overline{N}_{sc}$ будем обозначать нормализатор тора $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{G}_{sc}$, а через $\overline{T}_{ad}$ и $\overline{N}_{ad}$ будем обозначать образ группы $\overline{T}_{sc}$ и $\overline{N}_{sc}$ в $\overline{G}_{ad}$ соответственно.

Действие группы Вейля W на $\overline{T}_{sc}$ реализуется перестановкой элементов на главной диагонали матрицы. Группа $\overline{N}_{sc}$ является подгруппой мономиальных матриц и существует вложение группы W в группу подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}$. Образ группы W при этом вложении совпадает с группой Sl_n тех подстановок φ этого множества, для которых справедливо равенство $\varphi(-i) = -\varphi(i)$. Определим следующие элементы из Sl_n:

$$\varphi_1 = (1,2)(-1,-2), \varphi_2 = (2,3)(-2,-3), \ldots, \varphi_{n-1} = (n-1,n)(-(n-1),-n), \tau = (n,-n).$$

Тогда $\mathrm{Sl}_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \tau \rangle$. Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \tau$ соответствуют графу Кокстера типа C_n:

В частности, элемент $\tau\varphi_{n-1}$ имеет порядок 4 и $\tau\varphi_i = \varphi_i\tau$ для всех $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Для порождающих элементов группы Sl_n выберем соответствующих представителей из $\overline{N}_{sc}$. Пусть I_n — единичная матрица размерности n,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) | A^{tr}QA = Q\}$. Поскольку симметрическая группа Sym_{2n} каноническим образом изоморфна группе подстановочных матриц размерности $2n$, мы будем отождествлять элементы этих групп. Тогда элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ лежат в $\overline{N}_{sc}$, а в качестве представителя смежного класса, соответствующего элементу τ, возьмем следующий:

$$\tau_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.2.1

Замечание 2.2.5. *В случае четной характеристики поля* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *выполняется равенство* $\tau = \tau_0$ *и группа* $\overline{H}_{sc} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \tau_0 \rangle$ *является дополнением для тора* $\overline{T}_{sc}$ *в* $\overline{N}_{sc}$. *Поскольку центр* $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *тривиален, то* $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *и группа* $\overline{H}_{sc}$ *также является дополнением для* $\overline{T}_{ad}$ *в* $\overline{N}_{ad}$.

Лемма 2.2.6. *Пусть* $\overline{T}_{sc}$ *— максимальный* σ*-инвариантный тор в группе* $\overline{G}_{sc} = \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. *Если* $n \in \{1, 2\}$, *то тор* $\overline{T}_{ad}$ *имеет дополнение в* $\overline{N}_{ad}$.

Доказательство. Если $n = 1$, то положим $\overline{H}_{sc} = \langle \tau_0 \rangle$, $\overline{H}_{ad}$ — образ группы $\overline{H}_{sc}$ в $\mathrm{PSp}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\tau_0^2 = -I$ лежит в центре $\mathrm{Sp}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{H}_{ad}$ является дополнением для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$. В случае $n = 2$ группа W равна $\langle \varphi_1, \tau \rangle, \varphi_1^2 = \tau^2 = (\varphi_1\tau)^4 = e$. Положим

$\overline{H}_{sc} = \langle s_1, t \rangle$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p, \alpha^2 = -1$. Тогда $s_1, t \in \mathrm{Sp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p), s_1^2 = I, t^2 = (s_1 t)^4 = -I$. Пусть $\overline{H}_{ad}$ — образ группы $\overline{H}_{sc}$ в $\mathrm{PSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$, тогда $\overline{H}_{ad}$ является дополнением для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$. □

Лемма 2.2.7. *Пусть $\overline{T}_{sc}$ — максимальный σ-инвариантный тор в группе $\overline{G}_{sc} = \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда*

(1) *Если характеристика поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ нечетна, то тор $\overline{T}_{sc}$ не имеет дополнения в $\overline{G}_{sc}$;*

(2) *Если $n \geqslant 3$ и характеристика поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ нечетна, то тор $\overline{T}_{ad}$ не имеет дополнения в $\overline{N}_{ad}$.*

Доказательство. (1) Предположим противное. Пусть $\overline{H}_{sc}$ — дополнение для $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{N}_{sc}$ и t — прообраз элемента τ в $\overline{H}_{sc}$. Тогда $t^2 = I$. С другой стороны, элемент t имеет вид

$$t = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n, \nu_1^{-1}, \ldots, \nu_{n-1}^{-1}, \nu_n^{-1})\tau_0,$$

для некоторых ненулевых диагональных элементов ν_i. Следовательно,

$$t^2 \;=\; \mathrm{diag}(\nu_1^2, \ldots, \nu_{n-1}^2, -1, \nu_1^{-2}, \ldots, \nu_{n-1}^{-2}, -1).$$

Противоречие с тем, что t^2 — единичная матрица.

(2) Предположим противное. Пусть $\overline{H}_{ad}$ — дополнение для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$ и $\overline{s}_{n-1}, \overline{t}$ — прообразы элементов φ_{n-1}, τ в $\overline{H}_{ad}$. Тогда $(\overline{s}_{n-1})^2 = \overline{t}^2 = \overline{I}$ и $(\overline{s}_{n-1}\overline{t})^4 = \overline{I}$, где $\overline{I}$ — единичный элемент в $\mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Пусть $\overline{H}_{sc}$ — прообраз $\overline{H}_{ad}$ в $\overline{N}_{sc}$ и s_{n-1}, t — прообразы элементов $\overline{s}_{n-1}, \overline{t}$ в $\overline{H}_{sc}$. Тогда

$$s_{n-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1})\varphi_{n-1},$$
$$t = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}, \ldots, \nu_n^{-1})\tau_0,$$

для некоторых ненулевых диагональных элементов μ_i, ν_i, а матрицы $(s_{n-1})^2, t^2, (s_{n-1}t)^4$ лежат в центре группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и, в частности, являются скалярными. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}(s_{n-1})^2 &= \mathrm{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_{n-2}^2, \mu_{n-1}\mu_n, \mu_{n-1}\mu_n, \mu_1^{-2}, \ldots, \mu_{n-2}^{-2}, (\mu_{n-1}\mu_n)^{-1}, (\mu_{n-1}\mu_n)^{-1}),\\ t^2 &= \mathrm{diag}(\nu_1^2, \ldots, \nu_{n-2}^2, \nu_{n-1}^2, -1, \nu_1^{-2}, \ldots, \nu_{n-2}^{-2}, \nu_{n-1}^{-2}, -1),\end{aligned}$$

откуда, в частности, $\mu_1^2 = \mu_1^{-2}$ и $\nu_1^2 = \nu_1^{-2}$. Далее,

$$(s_{n-1}t)^4 = \mathrm{diag}((\mu_1\nu_1)^4, \ldots, (\mu_{n-2}\nu_{n-2})^4, -1, -1, (\mu_1\nu_1)^{-4}, \ldots, (\mu_{n-2}\nu_{n-2})^{-4}, -1, -1),$$

откуда $(\mu_1\nu_1)^4 = -1$. Противоречие с равенствами $\mu_1^4 = \nu_1^4 = 1$. □

Теорема 2.2.1 следует из замечания 2.2.5, леммы 2.2.6 и пункта (2) леммы 2.2.7. Следствие 2.2.2 вытекает из замечания 2.2.5 и пункта (1) леммы 2.2.7.

Перейдем к рассмотрению симплектических групп над конечным полем. Пусть σ отображает $\mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ в себя по правилу $(a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^q)$, где q — степень простого числа p. Тогда $G = \overline{G}_\sigma = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ и $\widetilde{G} = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Отметим, что такие обозначения будут удобны при дальнейшем изложении, несмотря на то, что в теореме 2.2.4 группа $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ обозначена через G. Отображение σ действует на $W \simeq \mathrm{Sl}_n$ тривиально, поэтому классы σ-сопряженности совпадают с обычными классами сопряженности. Опустив знаки перед элементами из $\{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}$, получим гомоморфизм из группы Sl_n на группу Sym_n. Пусть $\varphi \in \mathrm{Sl}_n$ отображается в цикл $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ и оставляет на месте все элементы, отличные от $\pm i_1, \pm i_2, \ldots, \pm i_k$. Если $\varphi(i_k) = i_1$, то назовем φ *положительным циклом длины* k; если $\varphi(i_k) = -i_1$, то назовем φ *отрицательным циклом длины* k. Образ произвольного элемента φ из Sl_n единственным образом раскладывается в произведение независимых циклов, и в соответствии с этим разложением φ единственным образом представим в виде произведения независимых положительных и отрицательных циклов. Длины этих циклов вместе с их знаками задают множество целых чисел, которое называется *циклическим типом* элемента φ.

Два элемента из Sl_n сопряжены тогда и только тогда, когда их циклические типы совпадают. Пусть $n = n' + n''$, а $\{n_1, \ldots, n_k\}$ и $\{n_{k+1}, \ldots, n_m\}$ — разбиения чисел n' и

n'', соответственно. Циклический тип $\{-n_1, \ldots, -n_k, n_{k+1}, \ldots, n_m\}$ будет обозначаться через $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$. Для описания $C_W(w)$ нам потребуются следующие элементы:

$\sigma_1 = (1, 2, \ldots, n_1)$,

$\omega_1 = (1, 2, \ldots, n_1)(-1, -2, \ldots, -n_1)$;

$\varpi_1 = (1, 2, \ldots, n_1, -1, -2, \ldots, -n_1)$;

$\tau_1 = (1, -1)(2, -2) \ldots (n_1, -n_1)$.

Пусть $t = n_1 + \ldots + n_i$. Тогда аналогично определяются элементы

$\sigma_{i+1} = (t + 1, t + 2, \ldots, t + n_{i+1})$;

$\omega_{i+1} = (t + 1, \ldots, t + n_{i+1})(-(t + 1), \ldots, -(t + n_{i+1}))$;

$\varpi_{i+1} = (t + 1, \ldots, t + n_{i+1}, -(t + 1), \ldots, -(t + n_{i+1}))$;

$\tau_{i+1} = (t + 1, -(t + 1)) \ldots (t + n_{i+1}, -(t + n_{i+1}))$.

В качестве стандартного представителя с циклическим типом $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$ будем использовать подстановку $\varpi_1 \ldots \varpi_k \omega_{k+1} \ldots \omega_m$. Строение максимальных торов в группах $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ хорошо известно. Воспользуемся этим описанием из работы [2, Предлолжение 3.1].

Предложение 2.2.8. *Пусть w — стандартный представитель типа $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$. Положим $\varepsilon_i = -$, если $i \leqslant k$, и $\varepsilon_i = +$ в противном случае. Пусть T — подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, состоящая из всех диагональных матриц вида*

$$\mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m, D_1^{-1}, D_2^{-1}, \ldots, D_m^{-1}),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $\lambda_i^{q^{n_i}-\varepsilon_i 1} = 1$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда $\overline{T}_{\sigma n} = U$.

Напомним, что согласно предложению 1.3.2 верно $(\overline{T}^g)_\sigma = (\overline{T}_{\sigma n})^g$ и $(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma = (\overline{N}^g)_\sigma = (\overline{N}_{\sigma n})^g$. Следовательно, $(\overline{T}^g)_\sigma$ имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе тогда и только тогда, когда существует дополнение к группе $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Поскольку w имеет вид $w = \varpi_1 \ldots \varpi_k \omega_{k+1} \ldots \omega_m$, то элементы $\varpi_1, \ldots, \varpi_k$, $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_m$, $\tau_{k+1}, \ldots, \tau_m$ лежат в $C_W(w)$. Выберем представителей для этих элементов в алгебраическом нормализаторе $N = N(G, T)$. Элементы $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_m$ принадлежат $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, а значит и N. Через $I_j = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 1)$ и $C_j = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ будут обозначаться единичная и диагональная матрицы размерности n_j соответственно, а через I — единичная матрица всей группы. В качестве представителей элементов $\varpi_1,\dots,\varpi_k$ и $\tau_{k+1},\dots,\tau_m$ в группе N возьмем следующие:

$$\mathrm{bd}(I_1,\dots,I_{j-1},I_j,I_{j+1},\dots,I_m,I_1,\dots,I_{j-1},C_j,I_{j+1},\dots,I_m)\varpi_j \qquad \text{для } 1\leqslant j\leqslant k;$$
$$\mathrm{bd}(I_1,\dots,I_{j-1},I_j,I_{j+1},\dots,I_m,I_1,\dots,I_{j-1},-I_j,I_{j+1},\dots,I_m)\tau_j \qquad \text{для } k+1\leqslant j\leqslant m.$$

Напомним, что мы отождествляем соответствующие элементы группы подстановочных матриц размерности $2n$ и группы подстановок Sym_{2n}. Более того, существует естественное вложение группы $\mathrm{GL}_{n_i}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (соответственно, $\mathrm{GL}_{2n_i}(\overline{\mathbb{F}}_p)$) в группу $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (соответственно, $\mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$) и мы будем отождествлять соответствующие элементы, используя те же обозначения σ_i (соответственно, ω_i,ϖ_i,τ_i).

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения 2.2.9–2.2.16.

Лемма 2.2.9. *Пусть* $\{n_1,n_2\}$ *— разбиение натурального числа* n. *Пусть* $s_1=\mathrm{bd}(T_1,T_2)\sigma_1$, $s_2=\mathrm{bd}(T_1',T_2')\sigma_2$, *где* $T_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n_1})$, $T_2=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{n_2})$, $T_1'=\mathrm{diag}(\lambda_1',\lambda_2',\dots,\lambda_{n_1}')$, $T_2'=\mathrm{diag}(\mu_1',\mu_2',\dots,\mu_{n_2}')$. *Тогда если* $s_1s_2=s_2s_1(zI)$ *для некоторого* $z\in\overline{\mathbb{F}}_p$, *то* $\lambda_{i+1}'=\lambda_i'z$, $\mu_j=\mu_{j+1}z$, $\lambda_1'=\lambda_{n_1}'z$, $\mu_{n_2}=\mu_1z$, *где* $i\in\{1,2,\dots,n_1-1\}$, $j\in\{1,2,\dots,n_2-1\}$, *а также* $z^{n_1}=z^{n_2}=1$.

Доказательство. В силу равенства $s_1s_2=s_2s_1(zI)$ имеем $T_1\sigma_1T_1'=T_1'T_1\sigma_1zI_1$ и $T_2T_2'\sigma_2=T_2'\sigma_2T_2zI_2$. Следовательно,

$$T_1(T_1')^{\sigma_1^{-1}}=T_1'T_1zI_1=T_1T_1'zI_1 \text{ и } T_1'=(T_1')^{\sigma_1}zI_1.$$

Отсюда получаем, что $\lambda_{i+1}'=\lambda_i'z$ для всех $i\in\{1,2,\dots,n_1-1\}$ и $\lambda_1'=\lambda_{n_1}'z$. Из полученных равенств имеем $\lambda_1'=\lambda_{n_1}'z=\lambda_{n_1-1}'z^2=\ldots=\lambda_1'z^{n_1}$ и $z^{n_1}=1$. Аналогично получаем

$$T_2T_2'\sigma_2=T_2'\sigma_2T_2zI_2,\ T_2T_2'=T_2'(T_2zI_2)^{\sigma_2^{-1}} \text{ и } (T_2)^{\sigma_2}=(T_2)zI_2.$$

Таким образом, $\mu_j=\mu_{j+1}z$ для всех $j\in\{1,2,\dots,n_2-1\}$, $\mu_{n_2}=\mu_1z$ и как следствие полученных равенств имеем $z^{n_2}=1$. ☐

Лемма 2.2.10. *Пусть* $\{n_1,n_2\}$ *— разбиение натурального числа* n, q *нечетно. Пусть* $t_1=\mathrm{bd}(T_1,D_2,T_3,D_2^{-1})\varpi_1$, $t_2=\mathrm{bd}(D_1',T_2',(D_1')^{-1},T_4')\varpi_2$, *где* T_1,T_2',T_3,T_4' —

произвольные невырожденные матрицы, $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \ldots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \ldots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. *Тогда*

(1) *Если* $t_1t_2 = t_2t_1$, *то* $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$;

(2) *Если* $t_1t_2 = -t_2t_1$, *то* $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$ *и* n_1, n_2 *нечетны. Более того,* $\mu_1^{q-1} = -1$, *если* $n_2 > 1$ *и* $\lambda_2^{q-1} = -1$, *если* $n_1 > 1$.

Доказательство. Пусть $D = \mathrm{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \mathrm{bd}(D_1', (D_1')^{-1})$.

(1) Аналогично доказательству леммы 2.2.9 равенство $t_1t_2 = t_2t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\varpi_2} = D$ и $(D')^{\varpi_1} = D'$. Из первого равенства следует, что все диагональные элементы матриц D_2 и D_2^{-1} совпадают. В частности, $\mu_1 = \mu_1^{-1}$, откуда $\mu_1^2 = 1$. Аналогично из второго равенства получаем $\lambda_2^2 = 1$.

(2) В данном случае равенство $t_1t_2 = -t_2t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\varpi_2} = -D$ и $(D')^{\varpi_1} = -D'$. Из первого равенства следует:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu_1 & = & -\mu_1^{-q^{n_2-1}} \\ \mu_1^q & = & -\mu_1 \\ & \vdots & \\ \mu_1^{q^{n_2-1}} & = & -\mu_1^{q^{n_2-2}} \\ \mu_1^{-1} & = & -\mu_1^{q^{n_2-1}} \\ \mu_1^{-q} & = & -\mu_1^{-1} \\ & \vdots & \\ \mu_1^{-q^{n_2-1}} & = & -\mu_1^{-q^{n_2-2}} \end{array}\right.$$

Следовательно, при $n_2 > 1$ имеем $\mu_1^{q-1} = -1$ и $\mu_1^{-1} = -\mu_1^{q^{n_2-1}} = (-1)^2\mu_1^{q^{n_2-2}} = \ldots = (-1)^{n_2}\mu_1$, откуда $\mu_1^2 = (-1)^{n_2}$. Так как $(q-1)$ четно, то n_2 должно быть нечетным и $\mu_1^2 = -1$. В случае $n_2 = 1$ получаем, что $\mu_1^{-1} = -\mu_1$, откуда $\mu_1^2 = -1$. Аналогично из второго равенства получаем, что n_1 также должно быть нечетным, $\lambda_2^2 = -1$ и если $n_1 > 1$, то $\lambda_2^{q-1} = -1$. □

Замечание 2.2.11. *Заключение леммы 2.2.10 также справедливо для блочно-диагональных матриц с количеством блоков больше двух.*

Следствие 2.2.12. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение натурального числа* n. *Пусть* $u_1 = \mathrm{bd}(T_1, D_2, T_3, D_2^{-1})\tau_1$, $u_2 = \mathrm{bd}(D_1', T_2', (D_1')^{-1}, T_4')\tau_2$, *где* T_1, T_2', T_3, T_4' *— произвольные невырожденные матрицы,* $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. *Если* $u_1u_2 = u_2u_1$, *то* $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$.

Доказательство. Пусть $D = \mathrm{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \mathrm{bd}(D_1', (D_1')^{-1})$. Аналогично доказательству леммы 2.2.10 равенство $t_1t_2 = t_2t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\tau_2} = D$ и $(D')^{\tau_1} = D'$, что в свою очередь равносильно равенствам $D_2^{-1} = D_2$ и $(D_1')^{-1} = D_1'$. Следовательно, $\mu_1 = \mu_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \lambda_2^{-1}$, откуда $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$. □

Замечание 2.2.13. *Заключение следствия 2.2.12 также справедливо для блочно-диагональных матриц с количеством блоков больше двух.*

Лемма 2.2.14. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение натурального числа* n, q *нечетно. Пусть* $t_1 = \mathrm{bd}(T_1, D_2, T_3, D_2^{-1})\varpi_1$, $u_2 = \mathrm{bd}(D_1', T_2', (D_1')^{-1}, T_4')\tau_2$, *где* T_1, T_2', T_3, T_4' *— произвольные невырожденные матрицы,* $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. *Тогда*

(1) *Если* $t_1u_2 = u_2t_1$, *то* $\mu_1^2 = 1$;

(2) *Если* $t_1u_2 = -u_2t_1$, *то* $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$, n_1 *нечетно. Более того, если* $n_1 > 1$, *то* $\lambda_2^{q-1} = -1$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 2.2.10.

(1) Пусть $D = \mathrm{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \mathrm{bd}(D_1', (D_1')^{-1})$. Равенство $t_1u_2 = u_2t_1$ влечет $D^{\tau_2} = D$. Следовательно, D_2 и D_2^{-1} совпадают, откуда $\mu_1 = \mu_1^{-1}$ и $\mu_1^2 = 1$.

(2) В данном случае равенство $t_1u_2 = -u_2t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\tau_2} = -D$ и $(D')^{\varpi_1} = -D'$. Из первого равенства следует, что $D_2^{-1} = -D_2$ и $\mu_1^2 = -1$. Расписывая второе равенство поэлементно, получаем:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & -\lambda_2^{-q^{n_1-1}} \\ \lambda_2^q & = & -\lambda_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{q^{n_1-1}} & = & -\lambda_2^{q^{n_1-2}} \\ \lambda_2^{-1} & = & -\lambda_2^{q^{n_1-1}} \\ \lambda_2^{-q} & = & -\lambda_2^{-1} \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{-q^{n_1-1}} & = & -\lambda_2^{-q^{n_1-2}} \end{array}\right.$$

Следовательно, при $n_1 > 1$ имеем $\lambda_2^{q-1} = -1$ и $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2^{q^{n_1-1}} = (-1)^2\lambda_2^{q^{n_1-2}} = \ldots = (-1)^{n_1}\lambda_2$, откуда $\lambda_2^2 = (-1)^{n_1}$. Так как $(q-1)$ четно, то n_1 должно быть нечетным и $\lambda_2^2 = -1$. В случае $n_1 = 1$ получаем, что $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2$, откуда $\lambda_2^2 = -1$. $\square$

Лемма 2.2.15. *Пусть* $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ *— разбиение натурального числа* n*, где* $m \geqslant 3$*. Пусть* $s_1 = \mathrm{bd}(T_1, T_2, \ldots, T_m)\sigma_1$*,* $s_2 = \mathrm{bd}(T_1', T_2', \ldots, T_m')\sigma_2$*, где* $T_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_2})$*,* $T_1' = \mathrm{diag}(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_{n_1}')$*. Тогда если* $s_1s_2 = s_2s_1(zI)$*, то* $z = 1$*,* $\lambda_1' = \lambda_2' = \ldots = \lambda_{n_1}'$*,* $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n_2}$*.*

Доказательство. В силу равенства $s_1s_2 = s_2s_1(zI)$ имеем $T_mT_m' = T_m'T_mzI_m$, откуда следует, что $z = 1$. Остальные равенства доказываются аналогично рассуждениям в лемме 2.2.9. $\square$

Лемма 2.2.16. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение натурального числа* n*. Пусть* $s = \mathrm{bd}(T_1, T_2)\sigma_1$*, где* $T_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1})$*,* $T_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_2})$*. Тогда* $s^{n_1} = zI$ *в том и только в том случае, если* $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n_1} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \ldots = \mu_{n_2}^{n_1} = z$*.*

Доказательство. Поскольку $\sigma_1^{n_1} = I_1$ получаем, что

$$(T_1\sigma_1)^{n_1} = T_1T_1^{\sigma_1^{-1}}T_1^{\sigma_1^{-2}}\ldots T_1^{\sigma_1^{-(n_1-1)}}\sigma^{n_1} = T_1T_1^{\sigma_1^{n_1-1}}T_1^{\sigma_1^{n_2-2}}\ldots T_1^{\sigma_1} = T_1T_1^{\sigma_1}T_1^{\sigma_1^2}\ldots T_1^{\sigma_1^{n_1-1}}.$$

Полученная матрица будет скалярной поскольку любой ее диагональный элемент будет равен произведению всех диагональных элементов матрицы T_1, то есть $(T_1\sigma_1)^{n_1} = \alpha I_1$, где $\alpha = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n_1}$. Остальные равенства очевидны. $\square$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.2.3.

В случае четной характеристики результаты следуют из замечания 1.4.1, поэтому далее в этом разделе рассматривается случай нечетной характеристики поля и тогда центр группы $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ состоит из матриц $\pm I$. Максимальный тор из предложения 2.2.8 будем называть *максимальным тором, соответствующим элементу w, с циклическим типом* $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Следующая лемма ограничивает рассмотрение случаев, в которых нормализатор тора может быть расщепляем.

Лемма 2.2.17. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N = N(G,T)$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда*

(1) *Тор T не имеет дополнения в N;*

(2) *Если $m \geqslant 3$, то тор $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. (1) Предположим противное. Пусть H — дополнение для T в N. Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то элемент τ_1 лежит в $C_W(w)$. Пусть u_1 — прообраз элемента τ_1 в группе H. Тогда элемент u_1 имеет вид

$$u_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}(-I_1), D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1})\tau_1,$$

для некоторых диагональных матриц $D_1, \dots, D_m$. Тогда

$$u_1^2 = \mathrm{bd}(-I_1, D_2^2, \dots, D_m^2, -I_1, D_2^{-2}, \dots, D_m^{-2}).$$

С другой стороны, если H — дополнение для T в N, то $u_1^2 = I$. Противоречие.

(2) Предположим противное. Пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, H — прообраз $\widetilde{H}$ в N. Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то элементы τ_1, τ_2 лежат в $C_W(w)$. Пусть u_1, u_2 — прообразы элементов τ_1, τ_2 в H. Тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathrm{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}(-I_1), D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1})\tau_1, \\ u_2 &= \mathrm{bd}(D_1', D_2', \dots, D_m', (D_1')^{-1}, (D_2')^{-1}(-I_2), \dots, (D_m')^{-1})\tau_2, \end{aligned}$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $u_1u_2 = \varepsilon u_2u_1$ $u_1^2 = \varepsilon_1 I, u_2^2 = \varepsilon_2 I$. По условию $m \geqslant 3$, поэтому по лемме 2.2.15 получаем $u_1u_2 = u_2u_1$, и далее в силу замечания 2.2.13 и следствия 2.2.12

имеем $\mu_1^2 = 1$. Так как $u_1^2 = \varepsilon_1 I$, то по лемме 2.2.16 получаем $-1 = \mu_1^2$. Противоречие с $\mu_1^2 = 1$. □

Лемма 2.2.18. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу w с циклическим типом (n) или $(\overline{n})$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N = N(G,T)$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда тор $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Определим $t_1 = \mathrm{bd}(I_1, C_1)\varpi_1$, $s_1 = \omega_1$, $u_1 = \mathrm{bd}(I_1, -I_1)\tau_1$. Тогда t_1, s_1, u_1 принадлежат $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $t_1^{2n} = -I$, $s_1^n = I$, $u_1^2 = -I$, $s_1u_1 = u_1s_1$. Для тора с циклическим типом $(\overline{n})$ положим $H = \langle t_1 \rangle$, а для тора с циклическим типом (n) положим $H = \langle s_1 \rangle \times \langle u_1 \rangle$. Пусть $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.2.19. *Пусть T — максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и N в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_4(q)$. Тогда*

(1) *Если тор T имеет циклический тип $(\overline{1})(1)$, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$;*

(2) *Если тор T имеет циклический тип $(1)(1)$, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 1 \pmod 4$;*

(3) *Если тор T имеет циклический тип $(\overline{1})(\overline{1})$, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 3 \pmod 4$;*

Доказательство. (1) Предположим противное. Пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, H — прообраз $\widetilde{H}$ в N. Пусть t_1, u_2 — прообразы элементов ϖ_1, τ_2 в H. Тогда

$$t_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \mu_1, -\lambda_1^{-1}, \mu_1^{-1})\varpi_1, \qquad u_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \mu_2, \lambda_2^{-1}, -\mu_2^{-1})\tau_2,$$

где $\lambda_1^{q+1} = \lambda_2^{q+1} = 1$, $\mu_1^{q-1} = \mu_2^{q-1} = 1$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $t_1^2 = \varepsilon_1 I, u_2^2 = \varepsilon_2 I$. С другой стороны, $t_1^2 = \mathrm{bd}(-1, \mu_1^2, -1, \mu_1^{-2})$ и $u_2^2 = \mathrm{bd}(\lambda_2^2, -1, \lambda_2^{-2}, -1)$. Следовательно, $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$. Таким образом, $\mu_1^2 = -1$ и $\mu_1^{q-1} = 1$, что возможно только при $q \equiv 1 \pmod 4$, а также $\lambda_2^2 = -1$ и $\lambda_2^{q+1} = 1$, что возможно только при $q \equiv 3 \pmod 4$. Противоречие.

(2),(3) Необходимость условий в пунктах (2) и (3) доказывается аналогично пункту (1). Докажем достаточность. Положим

$$s_1 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, s_2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае (2) возьмем элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1$ и $\lambda^{q-1} = 1$, а в случае (3) возьмем элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1$ и $\lambda^{q+1} = 1$. Тогда $s_1, s_2, w \in N, s_1^2 = s_2^2 = -I, w^2 = I$. Кроме того, $s_1 s_2 = -s_2 s_1, s_1^w = s_2$. Пусть $H = \langle s_1, s_2, w\rangle$, $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.2.20. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})(\overline{n_2})$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и N в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod 4$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, H — прообраз $\widetilde{H}$ в N. Пусть t_1, t_2 — прообразы элементов ϖ_1, ϖ_2 в H. Тогда

$$t_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}C_1, D_2^{-1})\varpi_1,\ t_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2', (D_1')^{-1}, (D_2')^{-1}C_2)\varpi_2,$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \ldots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \ldots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $t_1t_2 = \varepsilon t_2 t_1$, $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I, (t_2)^{2n_2} = \varepsilon_2 I$. Тогда из равенств $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$ и $(t_2)^{2n_2} = \varepsilon_2 I$ в силу леммы 2.2.16 имеем $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^{2n_2} = -1$ соответственно. Случай $t_1t_2 = t_2t_1$ невозможен в силу пункта (1) леммы 2.2.10, поэтому применяя пункт (2) леммы 2.2.10 получаем, что n_1, n_2 нечетны. Более того, $\mu_1^{q-1} = -1$, если $n_2 > 1$ и $\lambda_2^{q-1} = -1$, если $n_1 > 1$. Случай $n_1 = n_2 = 1$ разобран в лемме 2.2.19, поэтому $\mu_1^{q-1} = -1$ или $\lambda_2^{q-1} = -1$. Поскольку $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^{2n_2} = -1$, то $q \equiv 3 \pmod 4$. Необходимость доказана, покажем достаточность.

Пусть n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod 4$. Возьмем элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1$, тогда $\lambda^q = -\lambda$. Положим

$$t_1 = \mathrm{bd}(I_1, D_2, C_1, D_2^{-1})\varpi_1, t_2 = \mathrm{bd}(D_1', I_2, (D_1')^{-1}, C_2)\varpi_2,$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \ldots, \lambda, -\lambda, \lambda)$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \ldots, \lambda, -\lambda, \lambda)$. Тогда t_1, t_2 лежат в $\mathrm{Sp}_{2n}(q), t_1^{2n_1} = -I, t_2^{2n_2} = -I$ (см. лемму 2.2.16) и $t_1t_2 = -t_2t_1$. Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) = \langle \varpi_1, \varpi_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \times \mathbb{Z}_{2n_2}$ и в качестве H можно взять $H = \langle t_1, t_2 \rangle$. Пусть $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Если $n_1 = n_2$, то $C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$. В этом случае пусть

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\omega \in \mathrm{Sp}_{2n}(q), \omega^2 = I, t_1^\omega = t_2$. Положим $H = \langle t_1, t_2, \omega \rangle$, $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.2.21. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и N в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod 4$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $q \equiv 1 \pmod 4$. Пусть $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1, \lambda^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы

$$s_1 = \omega_1, s_2 = \omega_2,\ u_1 = \mathrm{bd}(I_1, \lambda I_2, -I_1, \lambda^{-1} I_2)\tau_1, u_2 = \mathrm{bd}(\lambda I_1, I_2, \lambda^{-1} I_1, -I_2)\tau_2.$$

Тогда $s_i, u_i \in \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $s_i^{n_i} = I, u_i^2 = -I, s_i^{u_i} = s_i, s_1s_2 = s_2s_1, u_1u_2 = -u_2u_1, s_1u_2 = u_2s_1, s_2u_1 = u_1s_2$, где $i = 1, 2$. Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) = \langle \omega_1, \tau_1, \omega_2, \tau_2 \rangle \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$ и положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2 \rangle$. Тогда образ $\widetilde{H}$ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ будет дополнением для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Если $n_1 = n_2$, то $C_W(w) \simeq ((\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Пусть ω — элемент, определенный в доказательстве леммы 2.2.20, тогда $\omega \in \mathrm{Sp}_{2n}(q), \omega^2 = I, s_1^\omega = s_2, u_1^\omega = u_2$. Положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2, \omega \rangle$, $\widetilde{H}$ — образ H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

Перейдем к рассмотрению случая $q \equiv 3 \pmod 4$. Пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, H — прообраз $\widetilde{H}$ в N. Покажем, что в этом случае n_1, n_2 обязаны быть четными. Пусть s_1, u_1, s_2, u_2 — прообразы элементов $\omega_1, \tau_1, \omega_2, \tau_2$ в H. Тогда

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, \quad D_2^{-1})\omega_1,\ u_1 = \mathrm{bd}(B_1, B_2, -B_1^{-1}, B_2^{-1})\tau_1,$$

$$s_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2', (D_1')^{-1}, \quad (D_2')^{-1})\omega_2,\ u_2 = \mathrm{bd}(B_1', B_2', (B_1')^{-1}, -(B_2')^{-1})\tau_2,$$

где $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}})$, $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$, $D_2' = \mathrm{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}})$, $B_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1^q, \dots, \alpha_1^{q^{n_1-1}})$, $B_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_1^q, \dots, \beta_1^{q^{n_2-1}})$, $B_1' = \mathrm{diag}(\alpha_2, \alpha_2^q, \dots, \alpha_2^{q^{n_1-1}})$, $B_2' = \mathrm{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_2-1}})$.

Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то, в частности, должны выполняться равенства $u_1^2 = \varepsilon_1 I, u_2^2 = \varepsilon_2 I$, $s_1 u_2 = \varepsilon_3 u_2 s_1$, $s_2 u_1 = \varepsilon_4 u_1 s_2$. По лемме 2.2.16 из равенств $u_1^2 = \varepsilon_1 I, u_2^2 = \varepsilon_2 I$ получаем, что $\beta_1^2 = -1$, $\alpha_2^2 = -1$. Далее, из соотношения $s_1 u_2 = \varepsilon_3 u_2 s_1$, в частности, следуют равенства

$$\begin{cases} \alpha_2 & = \varepsilon_3 \alpha_2^{q^{n_1-1}} \\ \alpha_2^q & = \varepsilon_3 \alpha_2 \\ & \vdots \\ \alpha_2^{q^{n_1-1}} & = \varepsilon_3 \alpha_2^{q^{n_1-2}} \end{cases}$$

Если $\varepsilon_3 = 1$, то $\alpha_2^{q-1} = \varepsilon_3 = 1$ и при этом $\alpha_2^2 = -1$, откуда $q \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, $\varepsilon_3 = -1$ и $\alpha_2 = -\alpha_2^{q^{n_1-1}} = (-1)^2 \alpha_2^{q^{n_1-2}} = \ldots = (-1)^{n_1}\alpha_2$, что возможно только при четном n_1. Аналогично из равенства $s_2 u_1 = \varepsilon_4 u_1 s_2$ следует, что $\varepsilon_4 = -1$ и $\beta_1 = (-1)^{n_2}\beta_1$. Таким образом, числа n_1, n_2 должны быть четными.

Далее считаем, что n_1, n_2 четны и $q \equiv 3 \pmod 4$. Пусть элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1$; ξ_1, ξ_2 — первообразные корни из 1 степени $q^{n_1} - 1, q^{n_2} - 1$ соответственно, $\alpha_1 = \xi_1^{-1}$, $\lambda_1 = \xi_1^{\frac{q-1}{2}}$, $\beta_2 = \xi_2^{-1}$, $\mu_2 = \xi_2^{\frac{q-1}{2}}$. Тогда $\lambda^{q-1} = -1$, $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = -1$, $\mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda_1^2 \cdot \alpha_1^{q-1} = 1$, $\mu_2^2 \cdot \beta_2^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})\omega_1,\ s_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2', (D_1')^{-1}, (D_2')^{-1})\omega_2,$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$,

$$D_1 = \begin{cases} I_1 & \text{если } n_1 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}) & \text{если } n_1 \equiv 2 \pmod 4 \end{cases},$$

$$D_2' = \begin{cases} I_2 & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}}) & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod 4). \end{cases}$$

Матрицы D_1 и D_2' выбраны таким образом, чтобы $s_1^{n_1}$ и $s_2^{n_2}$ получились скалярными. Действительно, если $n_1 \equiv 0 \pmod 4$, то $\lambda^{n_1} = 1$ и по лемме 2.2.16 получаем $s_1^{n_1} = I$, а если $n_1 \equiv 2 \pmod 4$, то $\lambda_1 \lambda_1^q \dots \lambda_1^{q^{n_1-1}} = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda^{n_1} = -1$ и по лемме 2.2.16 получаем $s_1^{n_1} = -I$. Аналогично $s_2^{n_2} = I$ при $n_2 \equiv 0 \pmod 4$ и $s_2^{n_2} = -I$ при $n_2 \equiv 2 \pmod 4$. Положим

$$u_1 = \mathrm{bd}(B_1, B_2, -B_1^{-1}, B_2^{-1})\tau_1,\ u_2 = \mathrm{bd}(B_1', B_2', (B_1')^{-1}, -(B_2')^{-1})\tau_2,$$

где $B_2 = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $B_1' = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$,

$$B_1 = \begin{cases} I_1 & \text{если } n_1 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1^q, \dots, \alpha_1^{q^{n_1-1}}) & \text{если } n_1 \equiv 2 \pmod 4 \end{cases},$$

$$B_2' = \begin{cases} I_2 & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_2-1}}) & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod 4). \end{cases}$$

Матрицы B_1 и B_2' выбраны таким образом, чтобы $s_1u_1 = u_1s_1$ и $s_2u_2 = u_2s_2$. Действительно, пусть $D = \mathrm{bd}(D_1, (D_1)^{-1})$, $B = \mathrm{bd}(B_1, -(B_1)^{-1})$. Тогда равенство $s_1u_1 = u_1s_1$ равносильно равенству $D\omega_1 B\tau_1 = B\tau_1 D\omega_1$, откуда $DB^{\omega_1^{-1}} = BD^{\tau_1}$. В случае $n_1 \equiv 0 \pmod 4$ последнее равенство тривиально. В случае $n_1 \equiv 2 \pmod 4$ равенство $DB^{\omega_1^{-1}} = BD^{\tau_1}$ равносильно условию $\lambda_1\alpha_1^q = \alpha_1\lambda_1^{-1}$, которое выполнено в силу выбора элементов λ_1 и α_1. Аналогично в случае $n_2 \equiv 2 \pmod 4$ равенство $s_2u_2 = u_2s_2$ равносильно условию $\mu_2\beta_2^q = \beta_2\mu_2^{-1}$, которое выполняется. Далее, непосредственно проверяются следующие равенства:

$$u_1^2 = u_2^2 = -I, s_1u_2 = -u_2s_1, s_2u_1 = -u_1s_2, u_1u_2 = -u_2u_1, s_1s_2 = -s_2s_1.$$

Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$ и положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2 \rangle$. Пусть $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Если $n_1 = n_2$, то $C_W(w) \simeq ((\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Пусть ω — элемент, определенный в доказательстве леммы 2.2.20, тогда $\omega \in \mathrm{Sp}_{2n}(q), \omega^2 = I, t_1^\omega = t_2$. Положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2, \omega \rangle$, $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.2.22. *Пусть T — максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})(n_2)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и N в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если n_1 нечетно, n_2 четно и $q \equiv 3 \pmod 4$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, H — прообраз $\widetilde{H}$ в N. Пусть t_1, u_2 — прообразы элементов ϖ_1, τ_2 в H. Тогда

$$t_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}C_1, D_2^{-1})\varpi_1,\ u_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2', (D_1')^{-1}, -(D_2')^{-1})\tau_2,$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $\mu_1^{q^{n_2}-1} = 1$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$, $\lambda_2^{q^{n_1}+1} = 1$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $t_1u_2 = \varepsilon u_2t_1$, $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I, u_2^2 = \varepsilon_2 I$. Тогда из равенств $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$ и $t_2^2 = \varepsilon_2 I$ в силу леммы 2.2.16 имеем $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^2 = -1$ соответственно. Случай $t_1u_2 = u_2t_1$ невозможен в силу пункта (1) леммы 2.2.14, поэтому применяя пункт (2) леммы 2.2.14 получаем, что n_1 нечетно. Более того, если $n_1 > 1$, то по пункту (2) леммы 2.2.14 имеем $\lambda_2^{q-1} = -1$, откуда $q \equiv 3 \pmod 4$. Если $n_1 = 1$, то должно выполняться $\lambda_2^{q+1} = 1$, откуда $q \equiv 3 \pmod 4$. Таким образом, в любом случае $q \equiv 3 \pmod 4$.

Пусть s_2 — прообраз элемента ω_2 в H. Тогда должно выполняться равенство $t_1s_2 = \varepsilon_3 s_2 t_1$, откуда, в частности, $D_2^{\omega_2} = \varepsilon_3 D_2$. Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu_1 & = & \varepsilon_3\mu_1^{q^{n_2-1}} \\ \mu_1^q & = & \varepsilon_3\mu_1 \\ & \vdots & \\ \mu_1^{q^{n_2-1}} & = & \varepsilon_3\mu_1^{q^{n_2-2}} \end{array}\right.$$

Если $\varepsilon_3 = 1$, то $\mu_1^{q-1} = \varepsilon_3 = 1$ и при этом $\mu_1^2 = -1$, откуда $q \equiv 1 \pmod 4$, что невозможно. Следовательно, $\varepsilon_3 = -1$ и $\mu_1 = -\mu_1^{q^{n_2-1}} = (-1)^2\mu_1^{q^{n_2-2}} = \ldots = (-1)^{n_2}\mu_1$, откуда следует, что n_2 обязано быть четным. Необходимость доказана, покажем достаточность.

Далее считаем, что n_1 нечетно, n_2 четно и $q \equiv 3 \pmod 4$. Пусть $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, такой что $\lambda^2 = -1$; ξ_2 — первообразный корень из 1 степени $q^{n_2} - 1$, $\beta_2 = \xi_2^{-1}$, $\mu_2 = \xi_2^{\frac{q-1}{2}}$. Тогда $\lambda^{q-1} = -1$, $\mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\mu_2^2 \cdot \beta_2^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы

$$t_1 = \mathrm{bd}(I_1, D_2, C_1, D_2^{-1})\varpi_1, \quad s_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2', (D_1')^{-1}, (D_2')^{-1})\omega_2,$$

где $D_2 = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $D_1' = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda)$,

$$D_2' = \begin{cases} I_2 & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}}) & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

Матрица D_2' выбрана таким образом, чтобы матрица $s_2^{n_2}$ получилась скалярной. Действительно, если $n_2 \equiv 0 \pmod 4$, то $\lambda^{n_2} = 1$ и по лемме 2.2.16 получаем $s_2^{n_2} = I$, а если $n_2 \equiv 2 \pmod 4$, то $\mu_2\mu_2^q \dots \mu_2^{q^{n_2-1}} = \mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda^{n_1} = -1$ и по лемме 2.2.16 получаем $s_1^{n_1} = -I$. Наконец, определим элемент

$$u_2 = \mathrm{bd}(B_1, B_2, (B_1)^{-1}, -(B_2)^{-1})\tau_2, \quad \text{где } B_1 = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda),$$

$$B_2 = \begin{cases} I_2 & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_1-1}}) & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod 4 \end{cases},$$

Матрица B_2 выбрана таким образом, чтобы $s_2u_2 = u_2s_2$. Действительно, пусть $D = \mathrm{bd}(D_2', (D_2')^{-1})$, $B = \mathrm{bd}(B_2, -(B_2)^{-1})$. Тогда равенство $s_2u_2 = u_2s_2$ равносильно равенству $D\omega_2B\tau_2 = B\tau_2D\omega_2$, откуда $DB^{\omega_2^{-1}} = BD^{\tau_2}$. В случае $n_2 \equiv 0 \pmod 4$ последнее равенство тривиально. В случае $n_2 \equiv 2 \pmod 4$ равенство $DB^{\omega_2^{-1}} = BD^{\tau_2}$ равносильно условию $\mu_2\beta_2^q = \beta_2\mu_2^{-1}$, которое выполнено в силу выбора элементов μ_2 и β_2. Далее, непосредственно проверяются следующие равенства:

$$t_1^{2n_1} = u_2^2 = -I, t_1u_2 = -u_2t_1, t_1s_2 = -s_2t_1.$$

Поскольку $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$. Положим $H = \langle t_1, s_2, u_2 \rangle$, $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

В леммах 2.2.17–2.2.22 рассмотрены все циклические типы максимальных торов в группе $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, откуда следует теорема 2.2.3. Следствие 2.2.4 вытекает из пункта (1) леммы 2.2.17.

2.3 Линейные группы и унитарные группы

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа A_n. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\overline{T}$ *— максимальный* σ*-инвариантный тор группы* $\overline{G} = \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, $\widetilde{T}$ *— образ тора* $\overline{T}$ *в* $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. *Тогда*

(1) $\widetilde{T}$ *имеет дополнение в* $N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})$;

(2) $\overline{T}$ *имеет дополнение в* $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ *тогда и только тогда, когда* $p = 2$ *или* n *нечетно.*

Напомним, что согласно предложению 1.3.1 при переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. Группа Вейля лиева типа A_n изоморфна симметрической группе Sym_n. Хорошо известно, что классы сопряженности в Sym_n однозначно определяются записью представителя в виде произведения независимых циклов, и поэтому находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа n, то есть представлениями n в виде суммы положительных целых чисел. Если $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ — какое-то разбиение, то выражение вида $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$ называется *циклическим типом* соответствующего класса сопряженности. Мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых. Для разбиения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ обозначим через b_i количество элементов разбиения, равных n_i и положим $a_i = n_i b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ответ на проблему 2 для специальных линейных и унитарных групп $\mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$ получен в следующей теореме.

Теорема 2.3.2. *Пусть* T *— максимальный тор группы* $G = \mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$, *соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом* $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. *Тогда* T *имеет дополнение в* $N(G,T)$ *тогда и только тогда, когда* q *четно или* a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ответ на проблему 2 для простых линейных и унитарных групп $\mathrm{PSL}_n^{\varepsilon}(q)$ дает следующая теорема.

Теорема 2.3.3. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N(G,T)$ в группе $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n^{\varepsilon}(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *q четно;*

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$(n)_2 < (\varepsilon q - 1)_2$;*

(4) *$m = 4$, n_1, n_2, n_3, n_4 нечетны;*

(5) *$m = 3$, $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно, $(n_3)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$;*

(6) *$m = 3$, $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно, $(n_3)_2 = 2$, $(\varepsilon q - 1)_2 \neq (n)_2$;*

(7) *$m = 2$, n_1, n_2 нечетны;*

(8) *$m = 2$, n_1, n_2 четны, $n_1 \neq n_2$, $(n)_2 < d(\varepsilon q - 1)_2$, где $d = ((\frac{n_1}{2})_2, (\frac{n_2}{2})_2, (\varepsilon q - 1)_2)$;*

(9) *$m = 2$, n_1, n_2 четны, $n_1 \neq n_2$, $(n_1)_2 = (n_2)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$, $(\varepsilon q - 1)_2 (n_1)_2 \leqslant (n)_2$;*

(10) *$m = 2$, $n_1 = n_2$ четно, $(n_1)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$;*

(11) *$m = 2$, $n_1 = n_2$ четно, $(n_1)_2 = 2$, $(n)_2 \neq (\varepsilon q - 1)_2$;*

(12) *$m = 1$.*

Следствие 2.3.4. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$, $m > 4$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы групп T и $N(G,T)$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n^{\varepsilon}(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *q четно;*

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$(n)_2 < (\varepsilon q - 1)_2$.*

Напомним некоторые сведения о линейных и унитарных группах. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа типа A_n. Если $\overline{G}$ односвязна, то мы будем обозначать ее через $\overline{G}_{sc}$, а если $\overline{G}$ имеет присоединенный тип — то через $\overline{G}_{ad}$. При этом $\overline{G}_{sc} \simeq \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{G}_{ad} \simeq \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Подгруппа $\overline{T}_{sc}$ группы $\overline{G}_{sc}$, состоящая из всех диагональных матриц с определителем 1, является максимальным тором в $\overline{G}_{sc}$. В этом случае $\overline{N}_{sc} = N_{\overline{G}_{sc}}(\overline{T}_{sc})$ состоит из всех мономиальных матриц с определителем 1 и существует канонический изоморфизм из группы Вейля W на симметрическую группу Sym_n. Через $\overline{T}_{ad}$ и $\overline{N}_{ad}$ мы обозначаем образы групп $\overline{T}_{sc}$ и $\overline{N}_{sc}$ в $\overline{G}_{ad}$. Определим

$$\varphi_1 = (1, 2), \varphi_2 = (2, 3), \dots, \varphi_{n-1} = (n-1, n),$$

тогда $\mathrm{Sym}_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \rangle$. Поскольку существует каноническое вложение группы Sym_n в группу мономиальных матриц размерности n, то мы отождествляем элементы этих групп. Тогда $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Положим $\overline{H} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \rangle$ и $\overline{H}_{ad}$ — образ группы $\overline{H}$ в $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\overline{H}_{ad}$ является дополнением для тора $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$. В силу изоморфизма $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathrm{PSL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ мы получаем пункт (1) теоремы 2.3.1. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.3.1.

Лемма 2.3.5. *Пусть $\overline{T}_{sc}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}_{sc} = \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\overline{T}_{sc}$ имеет дополнение в $\overline{N}_{sc}$, если и только если $p = 2$ или n нечетно.*

Доказательство. Если $p = 2$, то $\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \rangle \leqslant \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_2)$ и $\overline{H}_{sc} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \rangle$ — дополнение для тора $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{N}_{sc}$. Отметим, что в случае четной характеристики мы также могли воспользоваться общим утверждением 1.4.1.

Далее мы предполагаем, что p нечетно и положим $n = 2m + 1$. Пусть $z = -I$ и

$$s_i = z\varphi_i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Тогда $\det(s_i) = \det(z)\det(\varphi_i) = (-1)^{2m+1}(-1) = 1$ и $s_i \in \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Поскольку $z \in Z(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p))$, то $s_i^2 = I$ и $(s_i s_{i+1})^3 = (z\varphi_i z\varphi_{i+1})^3 = (\varphi_i \varphi_{i+1})^3 = 1$. Таким образом, $\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rangle \simeq \mathrm{Sym}_n$ и группа $\overline{H}_{sc} = \langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rangle$ является дополнением для тора $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{N}_{sc}$.

Предположим, что тор $\overline{T}_{sc}$ имеет дополнение $\overline{H}_{sc}$ в $\overline{N}_{sc}$, где $n = 2m$ четно. Пусть $\omega = (3, 4, \ldots, n) \in \mathrm{Sym}_n$ и s_1, t — прообразы элементов φ_1, ω в $\overline{H}_{sc}$ (в случае $m = 1$ нам потребуется только элемент s_1). Тогда элемент s_1 имеет вид

$$s_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2m})\varphi_1.$$

Поскольку $\overline{H}_{sc}$ является дополнением для тора $\overline{T}_{sc}$, то

$$s_1 t = t s_1, \quad s_1^2 = I.$$

Непосредственно проверяется, что первое равенство влечет $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m}$. Так как $s_1^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_3^2, \ldots, \lambda_3^2)$, то получаем $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_3^2 = 1$. Наконец, $\det(s_1) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{2m-2}\,\mathrm{sgn}(\varphi_1) = -1$; противоречие. □

Перейдем к рассмотрению линейных и унитарных групп над конечным полем. Пусть ρ — композиция транспонирования и взятия обратного в группе $\overline{G}_{sc} \simeq \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Определим σ следующим образом. Если $\varepsilon = +$, то σ — отображение Фробениуса, то есть $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. Если $\varepsilon = -$, то σ — композиция отображения Фробениуса и автоморфизма ρ. Тогда $G = (\overline{G}_{sc})_\sigma \simeq \mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$. Поскольку отображение σ действует тривиально на группе W, то классы σ-сопряженности совпадают с обычными классами сопряженности. Каждый элемент из группы Sym_n представляется единственным образом в виде произведения независимых циклов. Длины этих циклов задают множество целых чисел, которое называется *циклическим типом* этого элемента. Два элемента сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый циклический тип. Если $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ — разбиение числа n, то соответствующий циклический тип обозначается через $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. Назовем *стандартным представителем* этого типа подстановку

$$w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m, \quad \text{где}$$

$\sigma_1 = (1, 2, \ldots, n_1),$

$\sigma_{i+1} = (n_1 + \ldots + n_i + 1, n_1 + \ldots + n_i + 2, \ldots, n_1 + \ldots + n_i + n_{i+1}).$

Строение максимальных торов в линейных и унитарных группах хорошо известно. Для наших целей будем использовать описание из работы [2, Предложение 2.1].

Предложение 2.3.6. *Пусть* w *— стандартный представитель типа* $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. *Пусть* T *— подгруппа в* $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, *состоящая из всех диагональных матриц вида* $\mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m)$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $\lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i}-1} = 1$ *для всех* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. *Тогда* $\overline{T}_{\sigma n} = U$.

Для описания $C_W(w)$ нам потребуются следующие элементы:
$\sigma_1 = (1, 2, \ldots, n_1)$,
$\chi_1 = (1, n_1 + 1)(2, n_1 + 2)\ldots(n_1, 2n_1)$.
Пусть $t = n_1 + \ldots + n_i$. Тогда аналогично определяются элементы
$\sigma_{i+1} = (t + 1, t + 2, \ldots, t + n_{i+1})$,
$\chi_{i+1} = (t + 1, t + n_{i+1} + 1)\ldots(t + n_{i+1}, t + 2n_{i+1})$.

Пусть w — стандартный представитель с циклическим типом $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. Тогда $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in C_W(w)$. Поскольку мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых, то можно считать разбиение $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ упорядоченным по неубыванию:

$$n_1 = \ldots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = \ldots = n_{l_1+l_2} < \ldots < n_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = n_{l_1+\ldots+l_r}.$$

Определим множество

$$\Pi = \{1, \ldots, l_1 - 1; l_1 + 1, \ldots, l_1 + l_2 - 1; \ldots; l_1 + \ldots + l_{r-1} + 1, \ldots, l_1 + \ldots + l_r - 1\}.$$

Тогда $\chi_j \in C_W(w)$ для всех $j \in \Pi$ и $C_W(w) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \chi_j | j \in \Pi \rangle$. Следовательно,

$$C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_{l_1}} \wr \mathrm{Sym}_{l_1}) \times (\mathbb{Z}_{n_{l_1+l_2}} \wr \mathrm{Sym}_{l_2}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}_{n_{l_1+\ldots+l_r}} \wr \mathrm{Sym}_{l_r}).$$

Зафиксируем обозначения $a_1 = n_{l_1} l_1, a_2 = n_{l_1+l_2} l_2, \ldots, a_r = n_{l_1+\ldots+l_r} l_r$. Отметим, что множество чисел $\{a_1, \ldots, a_r\}$ совпадает с множеством чисел $\{a_1, \ldots, a_m\}$, присутствующих в теоремах 2.3.2 и 2.3.3. Мы отождествляем элементы группы Sym_k и соответствующие им подстановочные матрицы группы $\mathrm{GL}_k(q)$. Таким образом, $\mathbb{Z}_{n_1} \simeq \langle \sigma_1 \rangle \leqslant \mathrm{GL}_{n_1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и мы имеем вложение

$$(\mathbb{Z}_{n_{l_1}} \wr \mathrm{Sym}_{l_1}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{a_1}(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

где

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{l_1}) \mapsto \mathrm{bd}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{l_1}) \in \mathrm{GL}_{a_1}(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

для элементов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{l_1})$ базовой группы $\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_1}$ сплетения $\mathbb{Z}_{n_{l_1}} \wr \mathrm{Sym}_{l_1}$.

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения 2.3.7–2.3.12.

Лемма 2.3.7. *Пусть q нечетно и $\{n_1, n_2\}$ — разбиение числа n. Пусть $s_1 = D\sigma_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1$, $s_2 = D'\sigma_2 = \mathrm{bd}(D'_1, D'_2)\sigma_2$, где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^{\varepsilon q}, \ldots, \mu_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$. Если $s_1s_2 = (zI)s_2s_1$ для некоторого $z \in \mathbb{F}_q^*$, то $\mu_1^{\varepsilon q} = \mu_1 z$, $\lambda_2 = \lambda_2^{\varepsilon q} z$ и $z^{n_1} = z^{n_2} = 1$.*

Доказательство. Поскольку $s_1s_2 = (zI)s_2s_1$, то получаем

$$D\sigma_1 D'\sigma_2 = (zI)D'\sigma_2 D\sigma_1, D\sigma_1 D' = (zI)D'(D\sigma_1)^{\sigma_2^{-1}} = (zI)D'D^{\sigma_2^{-1}}\sigma_1,$$

$$D(D')^{\sigma_1^{-1}} = (zI)D'D^{\sigma_2^{-1}}.$$

Следовательно,

$$D_1(D'_1)^{\sigma_1^{-1}} = (zI_1)D'_1D_1 = D_1D'_1(zI_1) \text{ и } D'_1 = (D'_1)^{\sigma_1}zI_1.$$

Отсюда получаем $\mu_1^{(\varepsilon q)^{i+1}} = \mu_1^{(\varepsilon q)^i} z$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, n_1 - 2\}$ и $\mu_1 = \mu_1^{(\varepsilon q)^{n_1-1}} z$. Таким образом, $\mu_1 = \mu_1^{(\varepsilon q)^{n_1-1}} z = \mu_1^{(\varepsilon q)^{n_1-2}} z^2 = \ldots = \mu_1 z^{n_1}$ и $z^{n_1} = 1$. Аналогично получаем

$$D_2D'_2 = (zI_2)D'_2D_2^{\sigma_2^{-1}} = D_2^{\sigma_2^{-1}}(zI_2)D'_2 \text{ и } D_2^{\sigma_2} = D_2(zI_2).$$

Следовательно, $\lambda_2^{(\varepsilon q)^j} = \lambda_2^{(\varepsilon q)^{j+1}} z$ для всех $j \in \{0, 1, \ldots, n_2 - 2\}$, $\lambda_2^{(\varepsilon q)^{n_2-1}} = \lambda_2 z$. Как следствие получаем, что $z^{n_2} = 1$. ☐

Лемма 2.3.8. *Пусть $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ — разбиение числа n, $m \geqslant 3$. Пусть $s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m)\sigma_1$, $s_2 = \mathrm{bd}(D'_1, D'_2, \ldots, D'_m)\sigma_2$, где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^{\varepsilon q}, \ldots, \mu_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$. Если $s_1s_2 = (zI)s_2s_1$, то $z = 1$, $\mu_2^{\varepsilon q} = \mu_2$ и $\lambda_1^{\varepsilon q} = \lambda_1$. В частности, D_2, D'_1 — скалярные матрицы.*

Доказательство. Поскольку $s_1s_2 = (zI)s_2s_1$ и $m \geqslant 3$, то $D_mD'_m = (zI_m)D'_mD_m$ и, следовательно, $z = 1$. Остальное доказывается как в лемме 2.3.7. ☐

Для краткости в этом разделе мы будем часто писать z вместо скалярной матрицы zI или zI_j.

Лемма 2.3.9. *Пусть* $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ *— разбиение числа* n, $m \geqslant 3$, $n_2 = n_3$. *Пусть* $s_1 = D\sigma_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m)\sigma_1$, $v_2 = D'\chi_2 = \mathrm{bd}(D'_1, D'_2, \ldots, D'_m)\chi_2$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^{\varepsilon q}, \ldots, \mu_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$.

(1) *Если* $s_1 v_2 = z v_2 s_1$, *то* $D_2 = zD_3$, $\mu_1^{\varepsilon q} = \mu_1 z$, $z^{n_1} = z^2 = 1$.

(2) *Если* $s_1 v_2 = z v_2 s_1$, $m \geqslant 4$, *то* $D_2 = D_3$, $\mu_1^{\varepsilon q} = \mu_1$. *В частности,* D'_1 *— скалярная матрица.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathcal{D}_{2,3} = \mathrm{bd}(D_2, D_3), \mathcal{D}'_{2,3} = \mathrm{bd}(D'_2, D'_3)$. Применяя рассуждения как в лемме 2.3.7, получаем равенства

$$D\sigma_1 D'\chi_2 = zD'\chi_2 D\sigma_1, \quad D\sigma_1 D' = zD'(D\sigma_1)^{\chi_2^{-1}} = zD'D^{\chi_2^{-1}}\sigma_1, \quad D(D')^{\sigma_1^{-1}} = zD'D^{\chi_2^{-1}}.$$

Таким образом, $\mathcal{D}_{2,3}\mathcal{D}'_{2,3} = z\mathcal{D}'_{2,3}\mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2^{-1}} = z\mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2^{-1}}\mathcal{D}'_{2,3}$. Следовательно, $\mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2} = z\mathcal{D}_{2,3}$, то есть $D_3 = zD_2$ и $D_2 = zD_3$. Тогда $D_3 = zD_2 = z^2 D_3$ и $z^2 = 1$. Также как в доказательстве леммы 2.3.7 равенство $D_1(D'_1)^{\sigma_1^{-1}} = zD'_1 D_1$ влечет $\mu_1^{\varepsilon q} = \mu_1 z$ и $z^{n_1} = 1$.

(2) Поскольку $m \geqslant 4$, то $D_m D'_m = zD'_m D_m$ и $z = 1$. □

Лемма 2.3.10. *Пусть* $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ *— разбиение числа* n, $m \geqslant 4$, $n_1 = n_2, n_3 = n_4$. *Пусть* $v_1 = D\chi_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m)\chi_1$, $v_3 = D'\chi_3 = \mathrm{bd}(D'_1, D'_2, \ldots, D'_m)\chi_3$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^{\varepsilon q}, \ldots, \mu_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$.

(1) *Если* $v_1 v_3 = z v_3 v_1$, *то* $D'_1 = zD'_2, D_3 = zD_4$, $z^2 = 1$.

(2) *Если* $v_1 v_3 = z v_3 v_1$, $m \geqslant 5$, *то* $D'_1 = D'_2, D_3 = D_4$.

Доказательство. (1) Следует из доказательства леммы 2.3.9.

(2) Поскольку $m \geqslant 5$, то $D_m D'_m = zD'_m D_m$ и $z = 1$. □

Лемма 2.3.11. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение числа* n. *Пусть* $s = D\sigma_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1$, *где* $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^{\varepsilon q}, \ldots, \lambda_1^{(\varepsilon q)^{n_1-1}})$, $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_2})$. *Тогда* $s^{n_1} = zI$, *если и только если* $\lambda_1^{\frac{(\varepsilon q)^{n_1}-1}{\varepsilon q-1}} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \ldots = \mu_{n_2}^{n_1} = z$.

Доказательство. Так как $\sigma_1^{n_1} = I$, то

$$(D_1\sigma_1)^{n_1} = D_1 D_1^{\sigma_1^{-1}} D_1^{\sigma_1^{-2}} \ldots D_1^{\sigma_1^{-(n_1-1)}} \sigma^{n_1} = D_1 D_1^{\sigma_1^{n_1-1}} D_1^{\sigma_1^{n_1-2}} \ldots D_1^{\sigma_1} = D_1 D_1^{\sigma_1} D_1^{\sigma_1^2} \ldots D_1^{\sigma_1^{n_1-1}}.$$

Таким образом, поскольку $\lambda_1\lambda_1^{\varepsilon q}\dots\lambda_1^{(\varepsilon q)^{n_1-1}} = \lambda_1^{\frac{(\varepsilon q)^{n_1}-1}{\varepsilon q-1}}$, то получаем равенство

$$s^{n_1} = (D\sigma_1)^{n_1} = \mathrm{bd}(\lambda_1^{\frac{(\varepsilon q)^{n_1}-1}{\varepsilon q-1}} I_1, D_2^{n_1}).$$

Следовательно, $s^{n_1} = zI$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^{\frac{(\varepsilon q)^{n_1}-1}{\varepsilon q-1}} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \dots = \mu_{n_2}^{n_1} = z$. □

Лемма 2.3.12. *Пусть* $\{n_1, n_2, n_3\}$ *— разбиение числа* n, $n_1 = n_2$. *Пусть* $v = D\chi_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3)\chi_1$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^{\varepsilon q}, \dots, \lambda_i^{(\varepsilon q)^{n_i-1}})$, $i \in \{1, 2\}$, $D_3 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_3})$. *Тогда* $v^2 = zI$, *если и только если* $D_1D_2 = zI_1, \mu_1^2 = \mu_2^2 = \dots = \mu_{n_3}^2 = z$.

Доказательство. $v^2 = (D\chi_1)^2 = DD^{\chi_1} = \mathrm{bd}(D_1D_2, D_1D_2, D_3^2) = zI$. □

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 2.3.2 и 2.3.3. В случае четной характеристики результаты следуют из замечания 1.4.1, поэтому далее в этом разделе рассматривается случай нечетной характеристики поля.

Замечание 2.3.13. *Доказательство теорем 2.3.2 и 2.3.3 для линейных и унитарных групп отличается только заменой* q *на* $-q$ *и может быть унифицировано записью* εq *как это сделано в леммах 2.3.7–2.3.12. Однако такая запись увеличит и без того громоздкие технические выкладки в некоторых леммах, поэтому далее мы будем доказывать утверждения только для линейных групп.*

Максимальный тор из предложения 2.3.6 будем называть *максимальным тором, соответствующим элементу* w *с циклическим типом* $(n_1)\dots(n_m)$. Напомним, что разбиение $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ упорядочено по неубыванию:

$$n_1 = \dots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = \dots = n_{l_1+l_2} < \dots < n_{l_1+\dots+l_{r-1}+1} = \dots = n_{l_1+\dots+l_r},$$

$$\Pi = \{1, \dots, l_1 - 1; l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2 - 1; \dots; l_1 + \dots + l_{r-1} + 1, \dots, l_1 + \dots + l_r - 1\}$$

и $a_1 = n_{l_1}l_1, a_2 = n_{l_1+l_2}l_2, \dots, a_r = n_{l_1+\dots+l_r}l_r$.

Лемма 2.3.14. *Пусть* T *— максимальный тор группы* $G = \mathrm{SL}_n(q)$, *соответствующим элементу* w *с циклическим типом* $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$. *Если* a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant r$, *то тор* T *имеет дополнение в* $N = N(G, T)$.

Доказательство. Положим $H = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \chi_j | j \in \Pi \rangle$, тогда $H \simeq C_W(w)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $i = 1$, то есть $a_1 = n_1 l_1$ нечетно. Определим $v_0 = \mathrm{bd}(-I, I)$, где $-I$ — матрица размерности $n_1 l_1$, а I — матрица размерности $(n - n_1 l_1)$. Тогда $\det(v_0) = -1$ и легко видеть, что v_0 централизует H. Для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ определим

$$s_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{если } n_i \text{ нечетно} \\ v_0 \sigma_i & \text{если } n_i \text{ четно} \end{cases}$$

Поскольку $\det(\sigma_i) = (-1)^{n_i - 1}$ и $v_0^2 = I$, то получаем $s_i \in \mathrm{SL}_n(q)$ и $s_i^{n_i} = I$. Для всех $j \in \Pi$ определим

$$v_j = \begin{cases} \chi_j & \text{если } n_j \text{ четно} \\ v_0 \chi_j & \text{если } n_j \text{ нечетно} \end{cases}$$

Так как $\det(\chi_j) = (-1)^{n_j}$, то $v_j \in \mathrm{SL}_n(q)$ и $v_j^2 = I$. Более того, либо $(v_j v_{j+1})^3 = (\chi_j \chi_{j+1})^3 = I$, либо $(v_j v_{j+1})^3 = (v_0 \chi_j v_0 \chi_{j+1})^3 = (\chi_j \chi_{j+1})^3 = I$. Следовательно, $\langle v_1, \ldots, v_{l_1} \rangle \simeq \mathrm{Sym}_{l_1}$. Поскольку v_0 централизует H, то $\widetilde{H} = \langle s_i, v_j | 1 \leqslant i \leqslant m, j \in \Pi \rangle \simeq H$. Таким образом, $\widetilde{H}$ — дополнение для тора T в N. □

Лемма 2.3.15. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. Пусть a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Если найдется нечетное число n_j для некоторого $1 \leqslant j \leqslant r$, то тор T не имеет дополнения в N.*

Доказательство. Предположим, что T имеет дополнение H в N. Без ограничения общности можем считать, что $j = 1$. Поскольку n_1 нечетно, то $l_1 > 1$ и $\chi_1 \in C_W(w)$. Пусть s_i, v_i — прообразы элементов σ_i, χ_i в H. Тогда элемент v_1 имеет вид

$$v_1 = \mathrm{bd}(D_1, \ldots, D_{l_1}, D_{l_1+1}, \ldots, D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r})\chi_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Так как H является дополнением для T в N, то $v_1 v_i = v_i v_1$ для $i \in \Pi, i \geqslant 3$. Тогда в силу леммы 2.3.10 имеем

$$D_3 = \ldots = D_{l_1}, D_{l_1+1} = D_{l_1+2} = \ldots = D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = D_{l_1+\ldots+l_r}.$$

Далее, должны выполняться равенства $v_1s_j = s_jv_1$ для всех $3 \leqslant j \leqslant m$. По лемме 2.3.9 получаем, что D_j — скалярная матрица для $3 \leqslant j \leqslant m$. Следовательно,

$$\mathrm{bd}(D_3, \ldots, D_{l_1}) = \mu_1 I, \mathrm{bd}(D_{l_1+1}, \ldots, D_{l_1+l_2}) = \mu_2 I, \ldots, \mathrm{bd}(D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r}) = \mu_r I,$$

для некоторого $\mu_i \in \mathbb{F}_q^*$. Поскольку $v_1^2 = I$, то лемма 2.3.12 влечет равенства $D_1D_2 = I_1$, $\mu_1^2 = \ldots = \mu_r^2 = 1$. Так как a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$, то

$$\det(v_1) = \det(D_1D_2)\mu_1^{n_1(l_1-2)}\mu_2^{a_2} \ldots \mu_r^{a_r} \,\mathrm{sgn}(\chi_1) = -1,$$

противоречие с $v_1 \in G$. □

Лемма 2.3.16. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. Если n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, то T не имеет дополнения в N.*

Доказательство. Предположим, что T имеет дополнение H в N. Мы можем перенумеровать n_i так, что $(n_1)_2 \leqslant (n_2)_2 \leqslant \ldots \leqslant (n_m)_2$. Пусть s_i — прообраз элемента σ_i в H для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда элемент s_1 имеет вид

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \ldots, D_m)\sigma_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Поскольку H является дополнением для T в N, то $s_1s_j = s_js_1$ для всех $2 \leqslant j \leqslant m$. По лемме 2.3.7 получаем, что $D_j = \lambda_j I_j, \lambda_j \in \mathbb{F}_q^*$ для всех $2 \leqslant j \leqslant m$. Так как $s_1^{n_1} = I$, то лемма 2.3.11 влечет равенства $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_1} = \ldots = \lambda_m^{n_1} = 1$. С другой стороны,

$$1 = \det(s_1) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}}\lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_m^{n_m} \,\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -\lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_m^{n_m}.$$

Пусть $\widetilde{n}_1 = n_1/(n_1)_2$ — нечетная часть числа n_1. Поскольку $(n_1)_2 \leqslant (n_j)_2$, то $\lambda_j^{n_j\widetilde{n}_1} = 1$ для всех $2 \leqslant j \leqslant m$. Возводя равенство $\lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_m^{n_m} = -1$ в степень $\widetilde{n}_1$, получаем, что

$$1 = \lambda_2^{n_2\widetilde{n}_1} \ldots \lambda_m^{n_m\widetilde{n}_1} = (-1)^{\widetilde{n}_1} = -1,$$

противоречие. □

Теорема 2.3.2 следует из лемм 2.3.14-2.3.16. Перейдем к доказательству теоремы 2.3.3.

Лемма 2.3.17. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Если a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.3.14. □

Лемма 2.3.18. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом (n), $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. В данном случае $C_W(w) = \langle \sigma_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Если n нечетно, то мы можем применить лемму 2.3.17.

Предположим, что n четно. Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени $(q^n - 1)$ в поле $\overline{\mathbb{F}}_p$. Определим $\lambda = \xi^{\frac{q-1}{2}}$ и $s = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^q, \dots, \lambda^{q^{n-1}})\sigma_1$. Тогда $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = \xi^{\frac{q^n-1}{2}} = -1$ и $\det(s) = \lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} \mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)(-1)^{n-1} = 1$. По лемме 2.3.11 получаем, что $s^n = -I$. Пусть $H = \langle s \rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.3.19. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Если $n_1 = n_2$ нечетно, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. В этом случае $C_W(w) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \chi_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \wr \mathrm{Sym}_2$. Поскольку n_1 нечетно, то $\det(\sigma_i) = (-1)^{n_1-1} = 1$ и $\sigma_i \in G$ для $i \in \{1, 2\}$. Определим $v_1 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1)\chi_1$. Тогда $\det(v_1) = (-1)^{n_1} \mathrm{sgn}(\chi_1) = 1$ и по лемме 2.3.12 имеем $v_1^2 = -I$. Непосредственно проверяется, что $\sigma_1^{v_1} = \sigma_2, \sigma_2^{v_1} = \sigma_1$.

Пусть $H = \langle \sigma_1, \sigma_2, v_1 \rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w)$ и $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.3.20. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)(n_3)(n_4)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Пусть $n_1 = n_2, n_3 = n_4$ нечетны. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n_2 = n_3$. Пусть $H = \langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \chi_1, \chi_2, \chi_3\rangle$, тогда $H \simeq C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \wr \mathrm{Sym}_4$. Поскольку n_1 нечетно, то $\det(\sigma_i) = (-1)^{n_1-1} = 1$ и $\sigma_i \in G$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$. Определим

$$v_1 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, -I_1, I_1)\chi_1, v_2 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_1, I_1)\chi_2, v_3 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_1, I_1)\chi_3.$$

Тогда $\det(v_j) = (-1)^{n_1}\,\mathrm{sgn}(\chi_j) = 1$ для $1 \leqslant j \leqslant 3$ и в силу леммы 2.3.12 имеем $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = I$. Непосредственно проверяется, что

$$v_1v_3 = -v_3v_1, v_1^{v_2} = v_2^{v_1}, v_2^{v_3} = v_3^{v_2}.$$

Следовательно, образ группы $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ в $\mathrm{PSL}_n(q)$ изоморфен группе Sym_4. Пусть $D_1 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, -I_1, I_1), D_2 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_1, I_1)$, тогда σ_i централизует D_1, D_2 для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$. Таким образом, действия элементов σ_i на χ_j и на v_j совпадают. Пусть $\widetilde{H}$ — образ группы $\langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, v_1, v_2, v_3\rangle$ в $\mathrm{PSL}_n(q)$, тогда $\widetilde{H} \simeq H$ и $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

В случае $n_2 \neq n_3$ имеем $C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \wr \mathrm{Sym}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_3} \wr \mathrm{Sym}_2)$. Пусть $K = \langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \chi_1, \chi_3\rangle$, тогда $K \simeq C_W(w)$. Определим

$$v_1 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, -I_3, I_3)\chi_1, \quad v_3 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_3, I_3)\chi_3.$$

Тогда $\det(v_1) = \det(v_3) = 1$ и $v_1^2 = v_3^2 = I$. Аналогично получаем, что $\sigma_1^{v_1} = \sigma_2, \sigma_3^{v_3} = \sigma_4$ и $v_1v_3 = -v_3v_1$.

Пусть $\widetilde{K}$ — образ группы $\langle\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, v_1, v_3\rangle$ в $\mathrm{PSL}_n(q)$. Тогда $\widetilde{K} \simeq K$ и $\widetilde{K}$ является дополнением для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.3.21. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Если $(n)_2 < (q-1)_2$, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Пусть $H = \langle\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \chi_j | j \in \Pi\rangle$, тогда $H \simeq C_W(w)$. Уравнение $x^n = -1$ имеет решение в $\mathbb{F}_q^*$ тогда и только тогда, когда $(n)_2 < (q-1)_2$. Пусть γ — решение этого уравнения и $v_0 = \gamma I$. Тогда $\det(v_0) = \gamma^n = -1$ и $v_0 \in Z(G)$. Для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ определим

$$s_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{если } n_i \text{ нечетно} \\ v_0\sigma_i & \text{если } n_i \text{ четно} \end{cases}$$

Поскольку $\det(\sigma_i) = (-1)^{n_i - 1}$, то $s_i \in \mathrm{SL}_n(q)$ и $s_i^{n_i} = I$ или $s_i^{n_i} = \gamma^{n_i} I \equiv I \pmod{Z(G)}$. Для всех $j \in \Pi$ определим

$$v_j = \begin{cases} \chi_j & \text{если } n_j \text{ четно} \\ v_0\chi_j & \text{если } n_j \text{ нечетно} \end{cases}$$

Так как $\det(\chi_j) = (-1)^{n_j}$, то $v_j \in \mathrm{SL}_n(q)$ и $v_j^2 = I$ или $v_j^2 = \gamma^2 I \equiv I \pmod{Z(G)}$. Более того, либо $(v_j v_{j+1})^3 = (\chi_j\chi_{j+1})^3 = I$, либо $(v_j v_{j+1})^3 = (v_0\chi_j v_0\chi_{j+1})^3 = (v_0^2\chi_j\chi_{j+1})^3 = \gamma^6 I \equiv I \pmod{Z(G)}$. Следовательно, образ группы $\langle v_1, \ldots, v_{l_1}\rangle$ в $\mathrm{PSL}_n(q)$ изоморфен группе Sym_{l_1}. Пусть $\widetilde{H}$ — образ группы $\langle s_i, v_j | 1 \leqslant i \leqslant m, j \in \Pi\rangle$ в $\mathrm{PSL}_n(q)$, тогда $\widetilde{H} \simeq H$. Таким образом, $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.3.22. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$, $m \geqslant 5$. Пусть a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ и n_k нечетно для некоторого $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если $(n)_2 < (q-1)_2$.*

Доказательство. Существование дополнения следует из леммы 2.3.21.

Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет некоторое дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Без ограничения общности можно считать, что $k = 1$. Поскольку n_1 нечетно и a_1 четно, то $\chi_1 \in C_W(w)$. Пусть s_i, v_j — прообразы элементов σ_i, χ_j в H для всех $1 \leqslant i \leqslant m, j \in \Pi$. Тогда элемент v_1 имеет вид

$$v_1 = \mathrm{bd}(D_1, \ldots, D_{l_1}, D_{l_1+1}, \ldots, D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r})\chi_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Так как $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $v_1 v_j = z_j v_j v_1$ для $j \in \Pi, j \geqslant 3$, $z \in \mathbb{F}_q^*$. Поскольку $m \geqslant 5$, то в силу пункта (2) леммы 2.3.10 имеем $z_j = 1$ и

$$D_3 = \ldots = D_{l_1}, D_{l_1+1} = D_{l_1+2} = \ldots = D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = D_{l_1+\ldots+l_r}.$$

Далее, равенства $v_1 s_i = z_i s_i v_1$ должны выполняться для всех $3 \leqslant i \leqslant m$. Тогда по пункту (2) леммы 2.3.9 получаем, что D_i — скалярная матрица для всех $3 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно,

$$\mathrm{bd}(D_3, \ldots, D_{l_1}) = \mu_1 I, \mathrm{bd}(D_{l_1+1}, \ldots, D_{l_1+l_2}) = \mu_2 I, \ldots, \mathrm{bd}(D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r}) = \mu_r I,$$

где $\mu_i \in \mathbb{F}_q^*$. Поскольку $v_1^2 = zI$ для некоторого $z \in \mathbb{F}_q^*$, то по лемме 2.3.12 имеем $D_1D_2 = zI_1$, $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \ldots = \mu_r^2 = z$. Далее, из четности a_i для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ получаем

$$1 = \det(v_1) = \det(D_1D_2)\mu_1^{n_1(l_1-2)}\mu_2^{a_2}\ldots\mu_r^{a_r}\operatorname{sgn}(\chi_1) = -z^{n_1}\mu_1^{n_1(l_1-2)}\mu_1^{a_2}\ldots\mu_1^{a_r} = -\mu_1^n.$$

Таким образом, уравнение $x^n = -1$ должно иметь решение в $\mathbb{F}_q^*$, что равносильно неравенству $(n)_2 < (q-1)_2$. □

Лемма 2.3.23. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)(n_3)(n_4)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Пусть $n_1 = n_2$ нечетно и n_3, n_4 четны. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если $(n)_2 < (q-1)_2$.*

Доказательство. Существование дополнения следует из леммы 2.3.20.

Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет некоторое дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Так как $n_1 = n_2$, то $\chi_1 \in C_W(w)$. Пусть s_i, v_1 — прообразы элементов σ_i, χ_1 в H. Тогда элемент v_1 имеет вид

$$v_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3, D_4)\chi_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $v_1s_i = z_is_iv_1$ при $i = 3, 4$. В силу пункта (2) леммы 2.3.9 получаем, что $D_3 = \lambda_3I_3, D_4 = \lambda_4I_4$, где $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_q^*$.

Так как $v_1^2 = zI$ для некоторого $z \in \mathbb{F}_q^*$, то по лемме 2.3.12 имеем $D_1D_2 = zI_1$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 = z$. Из четности n_3, n_4 получаем, что

$$1 = \det(v_1) = \det(D_1D_2)\lambda_3^{n_3}\lambda_4^{n_4}\operatorname{sgn}(\chi_1) = -z^{n_1}\lambda_3^{n_3}\lambda_3^{n_4} = -\lambda_3^{2n_1}\lambda_3^{n_3}\lambda_3^{n_4} = -\lambda_3^n.$$

Таким образом, уравнение $x^n = -1$ должно иметь решение в $\mathbb{F}_q^*$,что равносильно неравенству $(n)_2 < (q-1)_2$.

□

Лемма 2.3.24. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)(n_3)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Пусть $n_1 = n_2$ нечетно и n_3 четно. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $(n_3)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (q-1)_2$;

(2) $(n_3)_2 = 2$, $(q-1)_2 \neq (n)_2$.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \chi_1 \rangle$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Пусть s_i, v — прообразы элементов σ_i, χ_1 в H. Тогда элементы s_3, v имеют вид

$$s_3 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3)\sigma_3, \quad v = \mathrm{bd}(D_1', D_2', D_3')\chi_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $D_i' = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}})$.

Поскольку $\widetilde{H}$ является дополнением для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $vs_3 = zs_3v$. В силу (1) леммы 2.3.9 получаем, что

$$D_1 = zD_2, \quad z^2 = 1, \text{ и } \mu_3^{q-1} = z.$$

Должны выполняться равенства $s_3s_j = z_js_js_3$ при $j = 1, 2$. Тогда по лемме 2.3.7 имеем $z_j = 1$ и $D_j = \lambda_jI_j, \lambda_j \in \mathbb{F}_q^*$. Следовательно, $D_1 = \lambda_1I_1, D_2 = z\lambda_1I_1$.

Так как $s_3^{n_3} = z_3I$, то лемма 2.3.11 влечет $\lambda_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_3} = \lambda_1^{n_3} = z_3$. Таким образом,

$$1 = \det(s_3) = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_1}\lambda_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}}\,\mathrm{sgn}(\sigma_3) = -\lambda_1^{2n_1}z^{n_1}\lambda_1^{n_3} = -z\lambda_1^n.$$

Если $z = 1$, то $\lambda_1^n = -1$ и $\lambda_1^{q-1} = 1$, что влечет неравенство $(n)_2 < (q-1)_2$. Существование дополнения при этих условиях следует из леммы 2.3.20.

Пусть $z = -1$, тогда $\mu_3^{q-1} = -1$. Следовательно,

$$D_3' = \mathrm{bd}(\mu_3, -\mu_3, \ldots, \mu_3, -\mu_3).$$

Поскольку $v^2 = \alpha I$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, то по лемме 2.3.12 получаем $D_1'D_2' = \alpha I_1$, $\mu_3^2 = \alpha$. Таким образом,

$$1 = \det(v) = \alpha^{n_1}\mu_3^{n_3}(-1)^{\frac{n_3}{2}}\,\mathrm{sgn}(\chi_1) = -\mu_3^{2n_1}\mu_3^{n_3}(-1)^{\frac{n_3}{2}} = -\mu_3^n(-1)^{\frac{n_3}{2}}.$$

(1) Если $(n_3)_2 > 2$, то $(-1)^{\frac{n_3}{2}} = 1$ и $\mu_3^n = \mu_3^{q-1} = -1$, что влечет $(n)_2 = (q-1)_2$. Пусть $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\mu^{q-1} = \mu^n = -1$. Определим $D_3' = (\mu, -\mu, \ldots, \mu, -\mu)$ и

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2, \quad s_3 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_3)\sigma_3, \quad v = \mathrm{bd}(\mu^2I_1, I_1, D_3')\chi_1.$$

Тогда

$$s_1^{n_1} = s_2^{n_1} = s_3^{n_3} = I, \quad s_i s_j = s_j s_i, \quad v^2 = \mu^2 I, \quad s_1^v = s_2, \quad s_3^v = -s_3,$$

и

$$\det(s_1) = \det(s_2) = 1, \det(s_3) = (-1)^{n_1}(-1)^{n_3-1} = 1, \det(v) = \mu^n(-1)^{\frac{n_3}{2}}(-1)^{n_1} = 1.$$

Определим $H = \langle s_1, s_2, s_3, v\rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

(2) Если $(n_3)_2 = 2$, то $(-1)^{\frac{n_3}{2}} = -1$ и $\mu_3^n = 1$. Поскольку $\mu_3^{q-1} = -1$, то $(n)_2 > (q-1)_2$. Пусть $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\mu^{q-1} = -1$, $\mu^n = 1$. Определим $D_3' = (\mu, -\mu, \dots, \mu, -\mu)$,

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2, \quad s_3 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_3)\sigma_3, \quad v = \mathrm{bd}(\mu^2 I_1, I_1, D_3')\chi_1.$$

Тогда

$$s_1^{n_1} = s_2^{n_1} = s_3^{n_3} = I, \quad s_i s_j = s_j s_i, \quad v^2 = \mu^2 I, \quad s_1^v = s_2, \quad s_3^v = -s_3,$$

и

$$\det(s_i) = 1, \quad \det(v) = \mu^n(-1)^{\frac{n_3}{2}}(-1)^{n_1} = 1.$$

Определим $H = \langle s_1, s_2, s_3, v\rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.3.25. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$, $m \geqslant 3$. Пусть n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если $(n)_2 < (q-1)_2$.*

Доказательство. Существование дополнения следует из леммы 2.3.20.

Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Перенумеруем n_i так, что $(n_1)_2 \leqslant (n_2)_2 \leqslant \ldots \leqslant (n_m)_2$. Пусть s_i — прообраз элемента σ_i в H для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда элемент s_1 имеет вид

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m)\sigma_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то $s_1s_j = z_js_js_1$ для всех $2 \leqslant j \leqslant m$. Так как $m \geqslant 3$, то по лемме 2.3.7 получаем, что $z_j = 1$ и $D_j = \lambda_j I_j$, где $\lambda_j \in \mathbb{F}_q^*$, $2 \leqslant j \leqslant m$. Из равенства $s_1^{n_1} = zI$ из леммы 2.3.11 получаем, что $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_1} = \ldots = \lambda_m^{n_1} = z$. Таким образом,

$$1 = \det(s_1) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_m^{n_m} \,\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -\lambda_2^{n_1} \lambda_2^{n_2} \ldots \lambda_m^{n_m}.$$

Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени $(q-1)$ в $\overline{\mathbb{F}}_p$, тогда $\lambda_i = \xi^{\alpha_i}$ для некоторого числа α_i. Поскольку $\xi^{\alpha_i n_1} = \xi^{\alpha_2 n_1}$ для всех $i > 1$, то $\alpha_i n_1 = \alpha_2 n_1 + (q-1)\beta_i$ для некоторых целых β_i. С другой стороны, поскольку $\xi^{\alpha_2 n_1} \xi^{\alpha_2 n_2} \xi^{\alpha_3 n_3} \ldots \xi^{\alpha_m n_m} = \lambda_2^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda_3^{n_3} \ldots \lambda_m^{n_m} = -1$, то

$$\alpha_2 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots + \alpha_m n_m = \frac{(q-1)}{2} + (q-1)k,$$

для некоторого целого k. Умножая это равенство на $2n_1$, получаем

$$\begin{aligned} & n_1(q-1) + 2n_1(q-1)k = 2n_1(\alpha_2 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \ldots + \alpha_m n_m) = \\ & 2(\alpha_2 n_1^2 + \alpha_2 n_1 n_2 + \alpha_3 n_1 n_3 + \ldots + \alpha_m n_1 n_m) = \\ & 2(\alpha_2 n_1^2 + \alpha_2 n_1 n_2 + \alpha_2 n_1 n_3 + (q-1)\beta_3 n_3 + \ldots + \alpha_2 n_1 n_m + (q-1)\beta_m n_m) = \\ & 2\alpha_2 n_1(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m) + 2(q-1)(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m) = \\ & 2\alpha_2 n_1 n + 2(q-1)(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$n_1(q-1) = 2\alpha_2 n_1 n + 2(q-1)(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m - n_1 k).$$

В силу выбора $(n_1)_2$ имеем

$$(2(q-1)(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m - n_1 k))_2 = 2(q-1)_2(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m - n_1 k)_2 \geqslant 2(q-1)_2(n_1)_2.$$

Поэтому если $(n)_2 \geqslant (q-1)_2$, то $(2\alpha_2 n_1 n)_2 = 2(\alpha_2)_2(n_1)_2(n)_2 \geqslant 2(n_1)_2(q-1)_2$ и

$$(n_1)_2(q-1)_2 = (2\alpha_2 n_1 n + 2(q-1)(\beta_3 n_3 + \ldots + \beta_m n_m - n_1 k))_2 \geqslant 2(n_1)_2(q-1)_2 > (n_1)_2(q-1)_2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ☐

Лемма 2.3.26. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Пусть n_1, n_2 четны, $n_1 \neq n_2$, $d = \gcd\{(\frac{n_1}{2})_2, (\frac{n_2}{2})_2, (q-1)_2\}$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $(n)_2 < d(q-1)_2$;

(2) $(n_1)_2 = (n_2)_2 \leqslant (q-1)_2$, $(q-1)_2(n_1)_2 \leqslant (n)_2$.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$, тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Пусть s_1, s_2 — прообразы элементов σ_1, σ_2 в H. Тогда элементы s_1, s_2 имеют вид

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \ldots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}, \lambda_2, \lambda_2^q, \ldots, \lambda_2^{q^{n_2-1}})\sigma_1,$$
$$s_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2')\sigma_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \ldots, \mu_1^{q^{n_1-1}}, \mu_2, \mu_2^q, \ldots, \mu_2^{q^{n_2-1}})\sigma_2.$$

где $\lambda_1^{q^{n_1}-1} = \mu_1^{q^{n_1}-1} = 1$ и $\lambda_2^{q^{n_2}-1} = \mu_2^{q^{n_2}-1} = 1$.

Поскольку $\widetilde{H} \simeq C_W(w)$, то $s_1s_2 = zs_2s_1$ для некоторого $z \in \mathbb{F}_q^*$. В силу леммы 2.3.7 имеем

$$\mu_1^{q-1} = z, \quad \lambda_2^{q-1} = z^{-1} \quad \text{и} \quad z^{n_1} = z^{n_2} = 1.$$

Тогда

$$s_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \ldots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}, \lambda_2, z^{-1}\lambda_2, z^{-2}\lambda_2 \ldots, z^{-(n_2-1)}\lambda_2)\sigma_1,$$
$$s_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, z\mu_1, z^2\mu_1, \ldots, z^{n_1-1}\mu_1, \mu_2, \mu_2^q, \ldots, \mu_2^{q^{n_2-1}})\sigma_2.$$

Из леммы 2.3.11 следует, что $s_1^{n_1} = z_1 I$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_1} = z_1$. Аналогично $s_2^{n_2} = z_2 I$ тогда и только тогда, когда $\mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = \mu_1^{n_2} = z_2$. Следовательно,

$$1 = \det(s_1) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \lambda_2^{n_2} z^{-\frac{(n_2-1)n_2}{2}} \,\mathrm{sgn}(\sigma_1) = \lambda_2^{n_1}\lambda_2^{n_2} z^{-\frac{(n_2-1)n_2}{2}} (-1)^{n_1-1} = -\lambda_2^{n} z^{-\frac{(n_2-1)n_2}{2}}.$$

Аналогично получаем

$$1 = \det(s_2) = \mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} \mu_1^{n_1} z^{\frac{(n_1-1)n_1}{2}} \,\mathrm{sgn}(\sigma_2) = \mu_1^{n_2}\mu_1^{n_1} z^{\frac{(n_1-1)n_1}{2}} (-1)^{n_2-1} = -\mu_1^{n} z^{\frac{(n_1-1)n_1}{2}}.$$

Поскольку $z^{n_1} = z^{n_2} = 1$, то $z^{\frac{(n_1-1)n_1}{2}} = \pm 1, z^{-\frac{(n_2-1)n_2}{2}} = \pm 1$ и мы последовательно рассмотрим все эти случаи.

(а) Предположим, что $z^{\frac{n_1}{2}} = z^{-\frac{n_2}{2}} = 1$. Тогда $\lambda_2^n = \mu_1^n = -1$ и мы получаем следующие равенства:

$$\begin{cases} \lambda_2^n &= \mu_1^n = -1 \\ z^{\frac{n_1}{2}} &= \mu_1^{\frac{(q-1)n_1}{2}} = \lambda_2^{-\frac{(q-1)n_1}{2}} = 1 \\ z^{\frac{n_2}{2}} &= \mu_1^{\frac{(q-1)n_2}{2}} = \lambda_2^{-\frac{(q-1)n_2}{2}} = 1 \\ z^{q-1} &= \mu_1^{(q-1)(q-1)} = \lambda_2^{-(q-1)(q-1)} = 1 \\ \lambda_2^{q^{n_2}-1} &= 1 \\ \mu_1^{q^{n_1}-1} &= 1 \end{cases}$$

Полученные равенства равносильны следующим условиям:

$$\begin{cases} (n)_2 < (q-1)_2(\frac{n_1}{2})_2 \\ (n)_2 < (q-1)_2(\frac{n_2}{2})_2 \\ (n)_2 < (q-1)_2(q-1)_2 \\ (n)_2 < (q^{n_2}-1)_2 \\ (n)_2 < (q^{n_1}-1)_2 \end{cases}$$

Пусть $n_1 = 2^k l$ для некоторого натурального k и нечетного l, и пусть $r = q^l$. Тогда

$$q^{n_1}-1 = r^{2^k}-1 = (r-1)(1+r+r^2+\ldots+r^{2^k-1}) = (r-1)(r+1)(r^2+1)(r^4+1)\ldots(r^{2^{k-1}}+1).$$

Поскольку 2 делит $(r^{2^i}+1)$, то $(q^{n_1}-1)_2 \geqslant 2^k(r-1)_2 \geqslant 2^k(q-1)_2 = (n_1)_2(q-1)_2$. Аналогично получаем $(q^{n_2}-1)_2 \geqslant (n_2)_2(q-1)_2$. Таким образом, мы можем удалить последние два неравенства. Первые три неравенства равносильны $(n)_2 < d(q-1)_2$ и получаем условие (1).

(б) Предположим, что $z^{\frac{n_1}{2}} = z^{-\frac{n_2}{2}} = -1$. Тогда $\lambda_2^n = \mu_1^n = 1$ и мы получаем следующие равенства:

$$\begin{cases} z^{\frac{n_1}{2}} &= \mu_1^{\frac{(q-1)n_1}{2}} = \lambda_2^{-\frac{(q-1)n_1}{2}} = -1 \\ z^{\frac{n_2}{2}} &= \mu_1^{\frac{(q-1)n_2}{2}} = \lambda_2^{-\frac{(q-1)n_2}{2}} = -1 \\ \lambda_2^n &= \mu_1^n = 1 \\ z^{q-1} &= \mu_1^{(q-1)(q-1)} = \lambda_2^{-(q-1)(q-1)} = 1 \\ \lambda_2^{q^{n_2}-1} &= 1 \\ \mu_1^{q^{n_1}-1} &= 1 \end{cases}$$

Поскольку $\mu_1^{\frac{(q-1)n_1}{2}} = \mu_1^{\frac{(q-1)n_2}{2}} = -1$, то $(\frac{n_1}{2})_2 = (\frac{n_2}{2})_2$. Выше было показано, что $(q^{n_1} - 1)_2 \geqslant (n_1)_2(q-1)_2 > (\frac{n_1}{2})_2(q-1)_2$ и $(q^{n_2}-1)_2 > (\frac{n_2}{2})_2(q-1)_2$. Следовательно, первые два равенства $\mu_1^{\frac{(q-1)n_1}{2}} = \lambda_2^{\frac{(q-1)n_2}{2}} = -1$ влекут последние два $\mu_1^{q^{n_1}-1} = \lambda_2^{q^{n_2}-1} = 1$. Таким образом, наши равенства равносильны следующим условиям:

$$\begin{cases} (\frac{n_1}{2})_2 = (\frac{n_2}{2})_2 \\ (q-1)_2(\frac{n_1}{2})_2 < (n)_2 \\ (q-1)_2(\frac{n_1}{2})_2 < (q-1)_2(q-1)_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n_1)_2 = (n_2)_2 \\ (q-1)_2(n_1)_2 \leqslant (n)_2 \\ (n_1)_2 \leqslant (q-1)_2 \end{cases},$$

и получаем (2).

(в) Наконец, предположим, что $z^{\frac{n_1}{2}} = 1$ и $z^{-\frac{n_2}{2}} = -1$ (случай $z^{\frac{n_1}{2}} = -1$, $z^{-\frac{n_2}{2}} = 1$ аналогичен). Тогда $\mu_1^n = -1$ и $\lambda_2^n = 1$. Так как $z^{n_2} = \mu_1^{(q-1)n_2} = 1$ и $\mu_1^n = -1$, то $(n)_2 < (q-1)_2(n_2)_2$.

С другой стороны, поскольку $z^{-\frac{n_2}{2}} = \lambda_2^{(q-1)\frac{n_2}{2}} = -1$ и $\lambda_2^n = 1$, то $(n)_2 > (q-1)_2(\frac{n_2}{2})_2$, то есть $(n)_2 \geqslant (q-1)_2(n_2)_2$, что приводит к противоречию. □

Лемма 2.3.27. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$, $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(q)$. Пусть $n_1 = n_2$ четно. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $(n_1)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (q-1)_2$;

(2) $(n_1)_2 = 2$, $(n)_2 \neq (q-1)_2$.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$, тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \chi_1 \rangle$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Пусть s_1, s_2, v — прообразы элементов $\sigma_1, \sigma_2, \chi_1$ в H. Мы будем использовать информацию об элементах s_1, s_2 из доказательства леммы 2.3.26. В частности, s_1, s_2 имеют вид

$$s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}, \lambda_2, z^{-1}\lambda_2, z^{-2}\lambda_2 \dots, z^{-(n_2-1)}\lambda_2)\sigma_1,$$
$$s_2 = \mathrm{bd}(D_1', D_2')\sigma_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, z\mu_1, z^2\mu_1, \dots, z^{n_1-1}\mu_1, \mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}})\sigma_2,$$

где

$$\mu_1^{q-1} = z, \quad \lambda_2^{q-1} = z^{-1}, \quad \lambda_1^{q^{n_1}-1} = \mu_1^{q^{n_1}-1} = \lambda_2^{q^{n_2}-1} = \mu_2^{q^{n_2}-1} = 1.$$

Элемент v имеет вид

$$v_1 = \mathrm{bd}(T_1, T_2)\chi_1,$$

где $T_i = \mathrm{diag}(\nu_i, \nu_i^q, \ldots, \nu_i^{q^{n_i-1}})$. Поскольку $\sigma_1^{\chi_1} = \sigma_2$, то $s_1^v = \alpha s_2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$. Непосредственно проверяется, что последнее равенство равносильно

$$\begin{cases} D_2 = \alpha D_1' \\ D_1(T_1)^{\sigma_1^{-1}} = \alpha T_1 D_2' \end{cases}$$

Первое равенство влечет $\lambda_2 = \alpha\mu_1, z^{-1}\lambda_2 = \alpha z\mu_1$. Следовательно, $z^{-1}\lambda_2 = \alpha z\mu_1 = z\lambda_2$ и $z^2 = 1$. Из доказательства леммы 2.3.26 получаем, что

$$1 = \det(s_1) = -\lambda_2^n z^{-\frac{n_2}{2}}, \quad 1 = \det(s_2) = -\mu_1^n z^{\frac{n_1}{2}}.$$

Предположим, что $z = 1$. Тогда $\lambda_2^n = \mu_1^n = -1$ и $z = \mu_1^{q-1} = \lambda_2^{q-1} = 1$. Следовательно, $(n)_2 < (q-1)_2$. Существование дополнения в этом случае следует из леммы 2.3.20.

Предположим, что $z = -1$. Тогда

$$1 = -\lambda_2^n(-1)^{-\frac{n_2}{2}}, \quad 1 = -\mu_1^n(-1)^{\frac{n_1}{2}}.$$

Далее рассмотрим возможные случаи аналогично доказательству леммы 2.3.26.

(a) Пусть $(-1)^{-\frac{n_2}{2}} = (-1)^{\frac{n_1}{2}} = 1$. Тогда $(n_1)_2 > 2$, $\lambda_2^n = \mu_1^n = -1$ и $z^2 = \mu_1^{2(q-1)} = \lambda_2^{-2(q-1)} = 1$. Следовательно, должно выполняться неравенство $(n)_2 \leqslant (q-1)_2$.

Предположим, что $(n)_2 = (q-1)_2$. Пусть $\lambda_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda_2^{q-1} = \lambda_2^n = -1$ и $\lambda_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_1}$. Определим

$$D_1 = (\lambda_1, \lambda_1^q, \ldots, \lambda_1^{q^{n_1}-1}), D_2 = (\lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_2, -\lambda_2)$$

и $s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1, s_2 = \mathrm{bd}(D_2, D_1)\sigma_2$, $v = \chi_1$. Тогда

$$s_1^{n_1} = s_2^{n_1} = \lambda_2^{n_1} I, \quad s_1 s_2 = -s_2 s_1, \quad s_1^v = s_2$$

и

$$\det(s_i) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \lambda_2^{n_2}(-1)^{\frac{n_1}{2}} \,\mathrm{sgn}(\sigma_i) = \lambda_2^n(-1) = 1.$$

Определим $H = \langle s_1, s_2, v\rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSL}_n(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

(б) Пусть $(-1)^{-\frac{n_2}{2}} = (-1)^{\frac{n_1}{2}} = -1$. Тогда $(n_1)_2 = 2$, $\lambda_2^n = \mu_1^n = 1$ и $z = \mu_1^{q-1} = \lambda_2^{q-1} = -1$. Следовательно, должно выполняться неравенство $(n)_2 > (q-1)_2$.

Предположим, что $(n)_2 > (q-1)_2$. Пусть $\lambda_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda_2^{q-1} = -1$, $\lambda_2^n = 1$ и $\lambda_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \lambda_2^{n_1}$. Определим

$$D_1 = (\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}), D_2 = (\lambda_2, -\lambda_2, \dots, \lambda_2, -\lambda_2)$$

и $s_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2)\sigma_1, s_2 = \mathrm{bd}(D_2, D_1)\sigma_2$, $v = \chi_1$. Тогда

$$s_1^{n_1} = s_2^{n_1} = \lambda_2^{n_1} I, \quad s_1 s_2 = -s_2 s_1, \quad s_1^v = s_2$$

и

$$\det(s_i) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \lambda_2^{n_2} (-1)^{\frac{n_1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma_i) = \lambda_2^n (-1)(-1) = 1.$$

Определим $H = \langle s_1, s_2, v \rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{PSL}_n(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

(в) Случай $(-1)^{\frac{n_1}{2}} = 1$, $(-1)^{-\frac{n_2}{2}} = -1$ (также как и случай $(-1)^{\frac{n_1}{2}} = -1$, $(-1)^{-\frac{n_2}{2}} = 1$) невозможен в силу пункта (в) доказательства леммы 2.3.26. □

Теорема 2.3.3 следует из лемм 2.3.14-2.3.27.

Действительно, если q четно или a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то теорема следует из леммы 2.3.14. Поэтому можно считать, что q нечетно и a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Если $m \geqslant 5$, то теорема следует из лемм 2.3.22 и 2.3.25.

Пусть $m = 4$. Если n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$, то заключение следует из леммы 2.3.25. Предположим, что n_j нечетно для некоторого $1 \leqslant j \leqslant 4$. Поскольку a_i четны, то либо $n_1 = n_2$, $n_3 = n_4$ нечетны (лемма 2.3.20), либо $n_1 = n_2$ нечетно и n_3, n_4 четны (лемма 2.3.23).

Пусть $m = 3$. Если n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$, то заключение следует из леммы 2.3.25. Так как a_i четны, то $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно и мы можем применить лемму 2.3.24.

Если $m = 2$, то заключение следует из лемм 2.3.19, 2.3.26 и 2.3.27.

Наконец, мы можем применить лемму 2.3.18 в случае $m = 1$.

2.4 Ортогональные группы

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа B_n или D_n. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, где $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ или $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\overline{T}$ имеет дополнение в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$.*

Пусть $n = n'+n''$, а $n' = n_1+\ldots+n_k$ и $n'' = n_{k+1}+\ldots+n_m$ — разбиения чисел n' и n'' соответственно. Всевозможные такие представления числа n в виде суммы $n = n_1 + \ldots + n_k + n_{k+1} + \ldots + n_m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности группы Вейля типа B_n. Как и ранее, мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых внутри каждого из разбиений n' и n''. Если класс сопряженности соответствует представлению $n = n_1 + \ldots + n_k + n_{k+1} + \ldots + n_m$, то выражение $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$ называется циклическим типом этого класса. Для циклического типа $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$ через b_i обозначим число элементов, равных n_i в разбиении n', если $1 \leqslant i \leqslant k$, и в разбиении n'', если $k+1 \leqslant i \leqslant m$. Определим $a_i = n_i b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ответ на проблему 2 для групп лиева типа B_n получен в следующей теореме.

Теорема 2.4.2. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Тогда тор T имеет дополнение в $N(G,T)$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$k = m$, n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Для групп лиева типа D_n существует биекция между классами сопряженности группы Вейля W и циклическими типами $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k четно (за исключением одного случая, когда имеются два класса сопряженности для одного циклического типа, однако это не влияет на утверждение). Ответ на проблему 2 для групп лиева типа D_n получен в следующей теореме.

Теорема 2.4.3. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{P}\Omega^+_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k четно, $n \geqslant 4$. Тогда тор T имеет дополнение в $N(G,T)$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant m$;

(3) $k = m$ *и* n_i *четно для всех* $1 \leqslant i \leqslant k$;

(4) $m = 4$, n_1, n_2, n_3, n_4 *нечетны;*

(5) $m = 2$, $k = 0$ *и* $n_1 = n_2$ *нечетно;*

(6) $m = 2$, $k = 2$ *и* $n_1 = n_2$ *нечетно.*

В случае скрученных групп лиева типа ${}^2D_n$ существует биекция между классами сопряженности группы Вейля W и циклическими типами $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k нечетно. Ответ на проблему 2 для групп лиева типа D_n получен в следующей теореме.

Теорема 2.4.4. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{P}\Omega^-_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k нечетно, $n \geqslant 4$. Тогда T имеет дополнение в $N(G,T)$, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant m$;

(3) $k = m$, n_i *четно для всех* $1 \leqslant i \leqslant k$.

В случае четной характеристики поля результаты следуют из замечания 1.4.1. Поскольку определения ортогональных групп в случае четной и нечетной характеристик отличаются, то всюду далее в этом разделе мы предполагаем, что характеристика поля нечетна.

Ортогональные группы нечетной размерности.

Напомним необходимые сведения об ортогональных группах. Группа $\mathrm{GO}_n(\overline{\mathbb{F}}_p, Q)$ — ортогональная группа размерности n над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой Q, а $\mathrm{SO}_n(\mathbb{F}, Q)$ — подгруппа группы $\mathrm{GO}_n(\mathbb{F}, Q)$, состоящая из матриц с единичным определителем. В случае нечетной размерности $2n+1$ все невырожденные квадратичные формы эквивалентны, и мы фиксируем следующую форму $Q(v) = x_0^2 + x_1x_{-1} + \ldots + x_nx_{-n}$. Зафиксируем базис $\{x, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ пространства V, соответствующий форме Q. Занумеруем строки и столбцы матриц из $\mathrm{GO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ в порядке $0, 1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n$.

Подгруппа $\overline{T}$ в группе $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, состоящая из всех диагональных матриц вида $\mathrm{bd}(1, D, D^{-1})$, является максимальным тором группы $\overline{G}$. В этом случае $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T})$ является подгруппой в группе всех мономиальных матриц, и существует вложение группы Вейля W в группу подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}$. Как и в случае симплектических групп образ группы W относительно этого вложения совпадает с группой Sl_n всех подстановок φ таких, что $\varphi(-i) = -\varphi(i)$. Определим следующие элементы группы Sl_n:

$$\varphi_1 = (1,2)(-1,-2), \varphi_2 = (2,3)(-2,-3), \ldots, \varphi_{n-1} = (n-1,n)(-(n-1),-n), \tau = (n,-n).$$

Тогда $\mathrm{Sl}_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \tau \rangle$. Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \tau$ соответствуют графу Кокстера типа B_n:

Пусть I_n — единичная матрица размерности n,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathrm{O}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p) | A^{tr}QA = Q\}$. Поскольку имеется каноническое вложение группы Sym_{2n} в группу подстановочных матриц размерности $2n$, мы будем отождествлять эти группы. В этом случае $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \in \overline{N}$, и в качестве представителя смежного класса, соответствующего элементу τ, выберем элемент

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.4.5. *Пусть* $\overline{T}$ *— максимальный* σ*-инвариантный тор группы* $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$*. Тогда* $\overline{T}$ *имеет дополнение в* $N_{\overline{G}}(\overline{T})$*.*

Доказательство. Очевидно, что $\tau_0^2 = I$ и элементы τ_0, τ действуют на элементах $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ одинаково. Таким образом, $\overline{H} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \tau_0 \rangle \simeq \mathrm{Sl}_n$ и $\overline{H}$ будет дополнением для тора $\overline{T}$ в $\overline{N}$. □

Пусть σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$, $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. Тогда $G = \overline{G}_\sigma$ изоморфна группе $\mathrm{SO}_{2n+1}(q)$. Группа $\mathrm{SO}_{2n+1}(q)$ содержит единственную подгруппу индекса 2 (см. [15, 22.9]), которая обозначается через $\Omega_{2n+1}(q)$. Напомним определение группы $\Omega_{2n+1}(q)$ в терминах спинорной нормы (см. [36, §2.5]). Для базисных элементов $\{x, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ имеют место равенства $Q(e_i) = Q(f_i) = 0, (e_i, f_j) = \delta_{ij}$, $(e_i, x) = (f_i, x) = 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $Q(x) \neq 0$. Для всех невырожденных векторов $v \in V$ отражение r_v задается по формуле

$$yr_v = y - \frac{(y, v)}{Q(v)} v \ \ (y \in V).$$

Любой элемент $g \in \mathrm{SO}_{2n+1}(q)$ раскладывается в произведение четного числа отражений $g = r_{v_1} \ldots r_{v_k}$, для некоторых невырожденных векторов $v_1, \ldots, v_k$. Спинорная норма элемента g задается следующим образом:

$$\theta(g) \equiv \prod_{i=1}^{k} (v_i, v_i) (\mathrm{mod} (\mathbb{F}_q^*)^2) \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2.$$

Тогда $\Omega_{2n+1}(q) = \ker(\theta)$.

Следующие два утверждения дают критерий принадлежности элемента группе $\Omega_{2n+1}(q)$.

Предложение 2.4.6. [44, Лемма 8.4(i)] *Предположим, что q нечетно и $g \in \mathrm{SO}(V)$ стабилизирует максимальное вполне сингулярное подпространство V_0 пространства V. Предположим, что либо n четно и V имеет тип $+$, либо n нечетно. Тогда $g \in \Omega(V)$, если и только если $\det(g|_{V_0}) \in (\mathbb{F}_q^*)^2$.*

Далее, в этом разделе через V_0 будем обозначать максимальное вполне сингулярное подпространство $V_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Предложение 2.4.7. *Пусть $g \in \mathrm{SO}_{2n+1}(q)$ такой, что*

$$g(e_j) = \alpha f_j,\ g(f_j) = \alpha^{-1} e_j,\ g(x) = -x,\ g(e_i) = e_i,\ g(f_i) = f_i,$$

для $1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_q^*$. Тогда $g \in \Omega_{2n+1}(q)$ если, и только если $(-\alpha) \in (\mathbb{F}_q^*)^2$.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что $g = r_{e_j - \alpha f_j} r_x$. Тогда $\theta(g) = (e_j - \alpha f_j, e_j - \alpha f_j)(x, x) = -2\alpha 2Q(x) = -4\alpha \equiv -\alpha \pmod{(\mathbb{F}_q^*)^2}$. □

Напомним (см. раздел 2.2), что отображение σ действует тривиально на группе $W \simeq \mathrm{Sl}_n$, следовательно, классы σ-сопряженности совпадают с обычными классами сопряженности. Два элемента из группы Sl_n сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый циклический тип. Как и в случае симплектических групп имеем $n = n' + n''$, а $\{n_1, \dots, n_k\}$ и $\{n_{k+1}, \dots, n_m\}$ — разбиения чисел n' и n'' соответственно. Циклический тип $\{-n_1, \dots, -n_k, n_{k+1}, \dots, n_m\}$ обозначаем через $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$. В качестве стандартного представителя с таким циклическим типом выбираем подстановку

$$w = \varpi_1 \dots \varpi_k \omega_{k+1} \dots \omega_m.$$

Предложение 2.4.8. [2, Предложение 4.1] *Пусть w — стандартный представитель с циклическим типом $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$. Положим $\varepsilon_i = -$, если $i \leqslant k$ и $\varepsilon_i = +$ в противном случае. Пусть T — подгруппа группы $\mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, состоящая из всех диагональных матриц вида*

$$\mathrm{bd}(1, D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}, D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1}),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \dots, \lambda_i^{q^{n_i - 1}})$ и $\lambda_i^{q^{n_i} - \varepsilon_i 1} = 1$. Тогда $\overline{T}_{\sigma w} = T$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant m$ и ξ_i — примитивный корень из единицы степени $(q^{n_i} - \varepsilon_i 1)$ в $\overline{\mathbb{F}}_p$. Определим

$$z_i = \mathrm{bd}(1, I_1, \ldots, I_{i-1}, D_i, I_{i+1}, \ldots, I_m, I_1, \ldots, I_{i-1}, D_i^{-1}, I_{i+1}, \ldots, I_m),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\xi_i, \xi_i^q, \ldots, \xi_i^{q^{n_i-1}})$. Порядок элемента z_i равен $q^{n_i} - \varepsilon_i 1$ и $T = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \ldots \times \langle z_m \rangle$.

Предложение 2.4.9. [2, Предложение 4.3] $T \cap O^{p'}(G) = \{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m} | k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ *четно*$\}^g$.

Напомним также, что для описания группы $C_W(w)$ мы используем следующие элементы:
$\omega_1 = (1, 2, \ldots, n_1)(-1, -2, \ldots, -n_1)$;
$\varpi_1 = (1, 2, \ldots, n_1, -1, -2, \ldots, -n_1)$;
$\tau_1 = (1, -1)(2, -2) \ldots (n_1, -n_1)$,
$\chi_1 = (1, n_1 + 1)(2, n_1 + 2) \ldots (n_1, 2n_1)(-1, -(n_1 + 1))(-2, -(n_1 + 2)) \ldots (-n_1, -2n_1)$.

Пусть $t = n_1 + \ldots + n_i$. Тогда аналогично определяются элементы
$\omega_{i+1} = (t + 1, \ldots, t + n_{i+1})(-(t + 1), \ldots, -(t + n_{i+1}))$;
$\varpi_{i+1} = (t + 1, \ldots, t + n_{i+1}, -(t + 1), \ldots, -(t + n_{i+1}))$;
$\tau_{i+1} = (t + 1, -(t + 1)) \ldots (t + n_{i+1}, -(t + n_{i+1}))$;
$\chi_{i+1} = (t + 1, t + n_{i+1} + 1) \ldots (t + n_{i+1}, t + 2n_{i+1})(-(t + 1), -(t + n_{i+1} + 1)) \ldots (-(t + n_{i+1}), -(t + 2n_{i+1}))$.

(i) Пусть w — стандартный представитель с циклическим типом $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})$ и $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$. Тогда

$$C_W(w) = \langle \varpi_i, \chi_j | 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k - 1 \rangle, \quad C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \wr \mathrm{Sym}_k.$$

(ii) Пусть w — стандартный представитель с циклическим типом $(n_1) \ldots (n_k)$ и $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$. Тогда

$$C_W(w) = \langle \omega_i, \tau_i, \chi_j | 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k - 1 \rangle, \quad C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \wr \mathrm{Sym}_k.$$

(iii) В общем случае $C_W(w)$ изоморфен прямому произведению групп из (i) и (ii). А именно, пусть w — стандартный представитель с циклическим типом

$(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Можно считать, что

$$n_1 = \ldots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = \ldots = n_{l_1+l_2} < \ldots$$

Если $n_k = n_{k+1}$ и $k = l_1 + \ldots + l_{d-1} + j$, то мы полагаем $l_d = j$, чтобы различать положительные и отрицательные циклы одинаковой длины. Таким образом, имеем

$$n_1 = \ldots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = \ldots = n_{l_1+l_2} < \ldots < n_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = n_{l_1+\ldots+l_r},$$

и $C_W(w) \simeq H^-H^+$, где

$$H^- \simeq (\mathbb{Z}_{2n_{l_1}} \wr \mathrm{Sym}_{l_1}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}_{2n_{l_1+\ldots+l_d}} \wr \mathrm{Sym}_{l_d}),$$

$$H^+ \simeq ((\mathbb{Z}_{n_{l_1+\ldots+l_{d+1}}} \times \mathbb{Z}_2) \wr \mathrm{Sym}_{l_{d+1}}) \times \ldots \times ((\mathbb{Z}_{n_{l_1+\ldots+l_r}} \times \mathbb{Z}_2) \wr \mathrm{Sym}_{l_r}).$$

Докажем технические леммы, которые понадобятся для дальнейших доказательств. На протяжении этого раздела $\pi_i \in \{\omega_i, \varpi_i, \tau_i\}$.

Лемма 2.4.10. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение числа* n *и* q *нечетно. Пусть* $x_1 = D\pi_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})\pi_1$, $x_2 = D'\pi_2 = \mathrm{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1})\pi_2$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}})$, $i \in \{1, 2\}$. *Пусть* $\mathcal{D}_i = \mathrm{bd}(D_i, D_i^{-1})$, $\mathcal{D}'_i = \mathrm{bd}(D'_i, (D'_i)^{-1})$. *Если* $x_1x_2 = \varepsilon x_2x_1$, *то* $\mathcal{D}_2^{\pi_2} = \varepsilon\mathcal{D}_2, (\mathcal{D}'_1)^{\pi_1} = \varepsilon\mathcal{D}'_1$.

Доказательство. Поскольку $x_1x_2 = \varepsilon x_2x_1$, имеем

$$D\pi_1D'\pi_2 = \varepsilon D'\pi_2D\pi_1, \quad D\pi_1D' = \varepsilon D'(D\pi_1)^{\pi_2^{-1}} = \varepsilon D'D^{\pi_2^{-1}}\pi_1, \quad D(D')^{\pi_1^{-1}} = \varepsilon D'D^{\pi_2^{-1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(\mathcal{D}'_1)^{\pi_1^{-1}} = \varepsilon\mathcal{D}'_1\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1\varepsilon\mathcal{D}'_1 \\ \mathcal{D}_2\mathcal{D}'_2 = \varepsilon\mathcal{D}'_2\mathcal{D}_2^{\pi_2^{-1}} = \varepsilon\mathcal{D}_2^{\pi_2^{-1}}\mathcal{D}'_2 \end{cases}$$

Получаем, что $(\mathcal{D}'_1)^{\pi_1} = \varepsilon\mathcal{D}'_1$ и $\mathcal{D}_2^{\pi_2} = \varepsilon\mathcal{D}_2$. □

Лемма 2.4.11. *Предположим, что* $\pi_2 = \omega_2$ *в условиях леммы 2.4.10.*

(1) *Если* $x_1x_2 = x_2x_1$, *то* $\lambda_2 = \lambda_2^q$, *то есть* D_2 *— скалярная матрица.*

(2) *Если* $x_1x_2 = -x_2x_1$, *то* $\lambda_2^{q-1} = -1$ *и* n_2 *четно.*

Доказательство. (1) Из леммы 2.4.10 получаем равенство $\mathcal{D}_2^{\omega_2} = \mathcal{D}_2$, которое равносильно $D_2^{\omega_2} = D_2$.

(2) Из леммы 2.4.10 получаем равенство $\mathcal{D}_2^{\omega_2} = -\mathcal{D}_2$, которое равносильно $D_2^{\omega_2} = -D_2$. Из последнего равенства имеем

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & -\lambda_2^{q^{n_1-1}} \\ \lambda_2^q & = & -\lambda_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{q^{n_2-1}} & = & -\lambda_2^{q^{n_2-2}} \end{array}\right.$$

Следовательно, $\lambda_2^{q-1} = -1$ и $\lambda_2 = -\lambda_2^{q^{n_2-1}} = (-1)^2\lambda_2^{q^{n_2-2}} = \ldots = (-1)^{n_2}\lambda_2$. Тогда получаем $1 = (-1)^{n_2}$ и n_2 должно быть четным. □

Лемма 2.4.12. *Предположим, что $\pi_2 = \varpi_2$ в условиях леммы 2.4.10.*

(1) *Если $x_1x_2 = x_2x_1$, то $\lambda_2^2 = 1$. В частности, D_2 — скалярная матрица.*

(2) *Если $x_1x_2 = -x_2x_1$, то $\lambda_2^2 = -1$ и n_2 нечетно. Более того, если $n_2 > 1$, то $\lambda_2^{q-1} = -1$.*

Доказательство. (1) Из леммы 2.4.10 следует, что $\mathcal{D}_2^{\varpi_2} = \mathcal{D}_2$. Тогда все диагональные элементы матрицы D_2, D_2^{-1} совпадают. В частности, $\lambda_2 = \lambda_2^{-1}$ и $\lambda_2^2 = 1$.
(2) Из леммы 2.4.10 следует равенство $\mathcal{D}_2 = -\mathcal{D}_2^{\varpi_2}$, которое равносильно

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & -\lambda_2^{-q^{n_2-1}} \\ \lambda_2^q & = & -\lambda_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{q^{n_2-1}} & = & -\lambda_2^{q^{n_2-2}} \\ \lambda_2^{-1} & = & -\lambda_2^{q^{n_2-1}} \\ \lambda_2^{-q} & = & -\lambda_2^{-1} \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{-q^{n_2-1}} & = & -\lambda_2^{-q^{n_2-2}} \end{array}\right.$$

Следовательно, если $n_2 > 1$, то $\lambda_2^{q-1} = -1$, $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2^{q^{n_2-1}} = (-1)^2\lambda_2^{q^{n_2-2}} = \ldots = (-1)^{n_2}\lambda_2$ и получаем, что $\lambda_2^2 = (-1)^{n_2}$. Поскольку $(q-1)$ четно, то n_2 должно быть нечетным и $\lambda_2^2 = -1$.

Если $n_2 = 1$, то имеем $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2$ и $\lambda_2^2 = -1$. □

Лемма 2.4.13. *Предположим, что* $\pi_2 = \tau_2$ *в условиях леммы 2.4.10.*

(1) *Если* $x_1 x_2 = x_2 x_1$, *то* $\lambda_2^2 = 1$,. *В частности,* D_2 *— скалярная матрица.*

(2) *Если* $x_1 x_2 = -x_2 x_1$, *то* $\lambda_2^2 = -1$.

Доказательство. (1) Из леммы 2.4.10 следует равенство $\mathcal{D}_2^{\tau_2} = \mathcal{D}_2$, которое эквивалентно $D_2^{-1} = D_2$. Следовательно, $\lambda_2^{-1} = \lambda_2$ и $\lambda_2^2 = 1$.

(2) Из леммы 2.4.10 следует равенство $\mathcal{D}_2^{\tau_2} = -\mathcal{D}_2$, которое равносильно $D_2^{-1} = -D_2$. Следовательно, $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2$ и $\lambda_2^2 = -1$. □

Лемма 2.4.14. *Пусть* $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ *— разбиение числа* n, $m \geqslant 3$, $n_2 = n_3$. *Пусть* $x_1 = D\pi_1 = \mathrm{bd}(D_1, \ldots, D_m, D_1^{-1}, \ldots, D_m^{-1})\pi_1$, $x_2 = D'\chi_2 = \mathrm{bd}(D'_1, \ldots, D'_m, (D'_1)^{-1}, \ldots, (D'_m)^{-1})\chi_2$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}})$. *Если* $x_1 x_2 = \varepsilon x_2 x_1$, *то* $D_2 = \varepsilon D_3$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_1^{-1})$, $\mathcal{D}'_1 = \mathrm{bd}(D'_1, (D'_1)^{-1})$, $\mathcal{D}_{2,3} = \mathrm{bd}(D_2, D_3), \mathcal{D}'_{2,3} = \mathrm{bd}(D'_2, D'_3)$. Применяя те же аргументы, что и в лемме 2.4.10, получаем, что

$$D(D')^{\pi_1^{-1}} = \varepsilon D' D^{\chi_2^{-1}}.$$

В частности, имеем $\mathcal{D}_{2,3}\mathcal{D}'_{2,3} = \varepsilon \mathcal{D}'_{2,3}\mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2^{-1}} = \varepsilon \mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2^{-1}}\mathcal{D}'_{2,3}$. Следовательно, $\mathcal{D}_{2,3}^{\chi_2} = \varepsilon \mathcal{D}_{2,3}$, то есть $D_2 = \varepsilon D_3$. □

Лемма 2.4.15. *Пусть* $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ *— разбиение числа* n, $m \geqslant 3$. *Пусть* $x_1 = \mathrm{bd}(D_1, \ldots, D_m, D_1^{-1}, \ldots, D_m^{-1})\pi_1$, $s_2 = \mathrm{bd}(D'_1, \ldots, D'_m, (D'_1)^{-1}, \ldots, (D'_m)^{-1})\pi_2$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $D'_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}})$. *Если* $x_1 x_2 = \varepsilon x_2 x_1$, *то* $\varepsilon = 1$, $\mathcal{D}_2^{\pi_2} = \mathcal{D}_2, (\mathcal{D}'_1)^{\pi_1} = \mathcal{D}'_1$.

Доказательство. Поскольку $x_1 x_2 = \varepsilon x_2 x_1$ и $m \geqslant 3$, то имеем $D_m D'_m = \varepsilon D'_m D_m$ и $\varepsilon = 1$. Оставшиеся равенства получаются аналогично доказательству леммы 2.4.10. □

Лемма 2.4.16. *Пусть* $\{n_1, n_2\}$ *— разбиение числа* n. *Пусть* $D = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})$, *где* $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \ldots, \lambda_1^{q^{n_1-1}})$, $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_2})$.

(1) *Пусть* $s = D\omega_1$. *Тогда* $s^{n_1} = \varepsilon I$, *если и только если* $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \ldots = \mu_{n_2}^{n_1} = \varepsilon$.

(2) *Пусть* $t = D\varpi_1$. *Тогда* $t^{2n_1} = \varepsilon I$, *если и только если* $\mu_1^{2n_1} = \mu_2^{2n_1} = \ldots = \mu_{n_2}^{2n_1} = \varepsilon = 1$.

(3) *Пусть* $u = D\tau_1$. *Тогда* $u^2 = \varepsilon I$, *если и только если* $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \ldots = \mu_{n_2}^2 = \varepsilon = 1$.

Доказательство. Пусть $\pi_1^l = I$, тогда

$$(D\pi_1)^l = DD^{\pi_1^{-1}} D^{\pi_1^{-2}} \ldots D^{\pi_1^{-(l-1)}} \pi_1^l = DD^{\pi_1^{l-1}} D^{\pi_1^{l-2}} \ldots D^{\pi_1} = DD^{\pi_1} D^{\pi_1^2} \ldots D^{\pi_1^{l-1}} \quad (2.1)$$

(1) Поскольку $\omega_1^{n_1} = I$ и $\lambda_1 \lambda_1^q \ldots \lambda_1^{q^{n_1-1}} = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}}$, то из равенства 2.1 получаем, что

$$s^{n_1} = (D\omega_1)^{n_1} = \mathrm{bd}(\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} I_1, D_2^{n_1}, \lambda_1^{-\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} I_1, D_2^{-n_1}).$$

Следовательно, $s^{n_1} = \varepsilon I$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \ldots = \mu_{n_2}^{n_1} = \varepsilon$.

(2) Поскольку $\varpi_1^{2n_1} = I$, то из равенства 2.1 получаем

$$t^{2n_1} = (D\varpi_1)^{2n_1} = \mathrm{bd}(I_1, D_2^{2n_1}, I_1, D_2^{-2n_1}),$$

что доказывает (2).

(3) Поскольку $\tau_1^2 = I$, то

$$u^2 = (D\tau_1)^2 = DD^{\tau_1} = \mathrm{bd}(I_1, D_2^2, I_1, D_2^{-2})$$

и получаем (3). □

Лемма 2.4.17. *Пусть* $\{n_1, n_2, n_3\}$ *— разбиение числа* n, $n_1 = n_2$. *Пусть* $v = D\chi_1 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3, D_1^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1})\chi_1$, *где* $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $i \in \{1, 2\}$, $D_3 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_3})$. *Тогда* $v^2 = \varepsilon I$, *если и только если* $D_1 D_2 = \varepsilon I_1, \mu_1^2 = \mu_2^2 = \ldots = \mu_{n_3}^2 = \varepsilon$.

Доказательство. $v^2 = (D\chi_1)^2 = DD^{\chi_1} = \mathrm{bd}(D_1D_2, D_1D_2, D_3^2, (D_1D_2)^{-1}, (D_1D_2)^{-1}, D_3^{-2})$ и получаем требуемое. □

Лемма 2.4.18. *Пусть* n *четно и* $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. *Пусть* $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}}_p, \lambda^{q^n-1} = \mu^{q^n-1} = 1$.

(1) *Если* $\lambda\mu^q = \varepsilon\mu\lambda^{-1}$ *и* $\mu^{\frac{q^n-1}{q-1}} \in (\mathbb{F}_q^*)^2$, *то* $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = 1$.

(2) *Если* $\lambda\mu^q = \mu\lambda^{-1}$ *и* $\mu^{\frac{q^n-1}{q-1}} \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$, *то* $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = -1$.

Доказательство. (1) Пусть ξ — примитивный корень степени (q^n-1) из единицы в $\overline{\mathbb{F}}_p$, тогда $\mu = \xi^{2k}$ для некоторого целого k и $\lambda^2 = \varepsilon\mu^{1-q} = \varepsilon\xi^{2k(1-q)}$. Так как $q \equiv -1 \pmod 4$, то

$$\frac{q^n-1}{q-1} = 1+q+\ldots+q^{n-1} = 1+q^1+\ldots+q^{2l-2}+q^{2l-1} \equiv 1+(-1)+\ldots+1+(-1) \equiv 0 \pmod 4$$

Следовательно,

$$\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = \left(\varepsilon\xi^{2k(1-q)}\right)^{\frac{q^n-1}{2(q-1)}} = \varepsilon^{\frac{q^n-1}{2(q-1)}}\xi^{-k(q^n-1)} = 1.$$

(2) Пусть ξ — примитивный корень степени (q^n-1)из единицы в $\overline{\mathbb{F}}_p$, тогда $\mu = \xi^{2k+1}$ для некоторого целого k и $\lambda^2 = \mu^{1-q} = \xi^{(2k+1)(1-q)}$. Следовательно,

$$\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = \left(\xi^{(2k+1)(1-q)}\right)^{\frac{q^n-1}{2(q-1)}} = \xi^{-\frac{q^n-1}{2}(2k+1)} = (-1)^{-(2k+1)} = -1.$$

□

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.4.2. Максимальный тор T из предложения 2.4.8 называется *максимальным тором, соответствующим элементу w с циклическим типом* $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Напомним, что разбиение числа n, упорядочено следующим образом

$$n_1 = \ldots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = \ldots = n_{l_1+l_2} < \ldots < n_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = n_{l_1+\ldots+l_r}.$$

Через Π как и ранее обозначается множество

$$\Pi = \{1,\ldots,l_1-1; l_1+1,\ldots,l_1+l_2-1;\ldots; l_1+\ldots+l_{r-1}+1,\ldots,l_1+\ldots+l_r-1\}.$$

Лемма 2.4.19. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$ и a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Если существует нечетное число n_f для некоторого $1 \leqslant f \leqslant m$, то T не имеет дополнения в N.*

Доказательство. Предположим противное и пусть H — дополнение для тора T в N. Можно считать, что $f = 1$. Поскольку n_1 нечетно, то $l_1 > 1$ и $\chi_1 \in C_W(w)$. Так как $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то $\tau_i \in C_W(w)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть v_i, u_j — прообразы элементов χ_i, τ_j в группе H, где $i \in \Pi, 1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда элемент v_1 имеет вид $v_1 = \mathrm{bd}(1, D, D^{-1})\chi_1$, где

$$D = \mathrm{bd}(D_1, \ldots, D_{l_1}, D_{l_1+1}, \ldots, D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r}),$$

для некоторых диагональных матриц D_i. Поскольку H является дополнением для T, то должны выполняться соотношения $v_1 v_i = v_i v_1$ для всех $i \in \Pi, i > 2$. По лемме 2.4.14 имеем

$$D_3 = \ldots = D_{l_1}, D_{l_1+1} = D_{l_1+2} = \ldots = D_{l_1+l_2}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1} = \ldots = D_{l_1+\ldots+l_r}.$$

Далее, равенства $v_1 u_j = u_j v_1$ должны выполняться для всех $3 \leqslant j \leqslant m$. По пункту (1) леммы 2.4.13 получаем, что D_j является скалярной матрицей для всех $3 \leqslant j \leqslant m$. Следовательно,

$$\mathrm{bd}(D_3, \ldots, D_{l_1}) = \lambda_1 I, \ldots, \mathrm{bd}(D_{l_1+\ldots+l_{r-1}+1}, \ldots, D_{l_1+\ldots+l_r}) = \lambda_r I.$$

Так как $v_1^2 = I$, то из леммы 2.4.17 получаем равенства $D_1 D_2 = I_1$, $\lambda_1^2 = \ldots = \lambda_r^2 = 1$. Таким образом,

$$\det(v_1|_{V_0}) = \det(D)\det(\chi_1|_{V_0}) = \det(D_1 D_2)\lambda_1^{n_1(l_1-2)}\lambda_2^{n_2 l_2}\ldots\lambda_r^{n_r l_r}(-1)^{n_1} = -1.$$

Поскольку $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\det(v_1|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и в силу пункта (i) предложения 2.4.6 получаем $v_1 \notin \Omega_{2n+1}(q)$, что приводит к противоречию. □

Лемма 2.4.20. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$, n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $m > k$. Тогда тор T не имеет дополнения в N.*

Доказательство. Предположим противное и пусть H — дополнение для тора T в N. Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то $\tau_i \in C_W(w)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть s_{k+1} — прообраз элемента ω_{k+1} в H и u_i — прообраз элемента τ_i в H, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда элемент s_{k+1} имеет вид

$$s_{k+1} = \mathrm{bd}(1, D_1, \ldots, D_m, D_1^{-1}, \ldots, D_m^{-1})\omega_{k+1},$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Так как H является дополнением для T, то должны выполняться следующие соотношения

$$s_{k+1}^{n_{k+1}} = I, s_{k+1}u_i = u_i s_{k+1}, \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Из пункта (1) леммы 2.4.13 следует, что $D_i = \lambda_i I, \lambda_i^2 = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k+1$. Поскольку $s_{k+1}^{n_{k+1}} = I$, то пункт (1) леммы 2.4.16 влечет $\det(D_{k+1}) = 1$. Таким образом,

$$\det(s_{k+1}|_{V_0}) = \det(D_1)\det(D_2)\ldots\det(D_m)\det(\omega_{k+1}|_{V_0}) =$$
$$\lambda_1^{n_1}\ldots\lambda_{k-1}^{n_{k-1}}\lambda_{k+1}^{n_{k+1}}\ldots\lambda_m^{n_m}(-1)^{n_{k+1}-1} = -1.$$

Так как $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\det(s_{k+1}|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и в силу пункта (i) предложения 2.4.6 получаем $s_{k+1} \notin \Omega_{2n+1}(q)$, что приводит к противоречию. □

Лемма 2.4.21. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})$.*

1. *Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то тор T имеет дополнение в N.*
2. *Если a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то тор T имеет дополнение в N.*
3. *Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, то тор T имеет дополнение в N.*

Доказательство. Для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ определим

$$t_i = \begin{cases} \mathrm{bd}(-1, I_n, I_n)\varpi_i & \text{если } \mathrm{bd}(-1, I_n, I_n)\varpi_i \in \Omega_{2n+1}(q) \\ z_i\,\mathrm{bd}(-1, I_n, I_n)\varpi_i & \text{если } \mathrm{bd}(-1, I_n, I_n)\varpi_i \notin \Omega_{2n+1}(q) \end{cases},$$

где $z_i \notin \Omega_{2n+1}(q)$ согласно предложению 2.4.9.Тогда $t_i \in \Omega_{2n+1}(q)$ и в силу пункта (2) леммы 2.4.16 получаем, что $t_i^{2n_i} = I$. Очевидно, что $t_it_j = t_jt_i$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Таким образом, $\langle t_1, t_2 \ldots, t_k\rangle \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \times \mathbb{Z}_{2n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2n_k}$. Пусть $v_i = \chi_i$, где $i \in \Pi$. Тогда $\det(v_i|_{V_0}) = \mathrm{sgn}(\chi_i) = (-1)^{n_i}$. Следовательно, если $q \equiv 1 \pmod 4$ или n_i четны, то по пункту (i) предложения 2.4.6 имеем $v_i \in \Omega_{2n+1}(q)$.

Легко проверить, что $t_i^{v_i} = t_{i+1}$ для всех $i \in \Pi$. Таким образом, $H_1^- = \langle t_1, \ldots, t_{l_1}, v_1, \ldots, v_{l_1-1}\rangle \simeq (\mathbb{Z}_{2n_{l_1}} \wr \mathrm{Sym}_{l_1})$. Аналогично, получаем

$$H_j^- = \langle t_{l_1+\ldots+l_{j-1}+1}, \ldots, t_{l_1+\ldots+l_j}, v_{l_1+\ldots+l_{j-1}+1}, \ldots, v_{l_1+\ldots+l_j-1}\rangle \simeq (\mathbb{Z}_{2n_{l_1+\ldots+l_j}} \wr \mathrm{Sym}_{l_j})$$

для всех $2 \leqslant j \leqslant r$. Очевидно, что группы H_i^-, H_j^- централизуют друг друга при $i \neq j$. Следовательно, $H^- = H_1^- \times \ldots \times H_r^- \simeq C_W(w)$.

(1), (3) Как было отмечено выше, если $q \equiv 1 \pmod 4$ или все n_i четны, то $v_i \in \Omega_{2n+1}(q)$ и $H^- \leqslant \Omega_{2n+1}(q)$. Следовательно, группа H^- является дополнением для T в N.

(2) Можно считать, что $q \equiv 3 \pmod 4$ и $i = 1$, то есть $n_1 l_1$ нечетно. Пусть

$$v_0 = \mathrm{bd}(1, -I, I, -I, I),$$

где $-I$ — единичная матрица размерности $n_1 l_1$ и I — единичная матрица размерности $n - n_1 l_1$. Тогда $\det(v_0|_{V_0}) = -1 \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_0 \notin \Omega_{2n+1}(q)$. Для всех $j \in \Pi$ определим

$$\widetilde{v}_j = \begin{cases} v_j & \text{if } v_j \in \Omega_{2n+1}(q) \\ v_0 v_j & \text{if } v_j \notin \Omega_{2n+1}(q) \end{cases}.$$

Тогда $\widetilde{v}_j \in \Omega_{2n+1}(q)$ и $\widetilde{v}_j^2 = I$. Более того, либо $(\widetilde{v}_j\widetilde{v}_{j+1})^3 = (\chi_j\chi_{j+1})^3 = I$, либо $(\widetilde{v}_j\widetilde{v}_{j+1})^3 = (v_0\chi_j v_0\chi_{j+1})^3 = (\chi_j\chi_{j+1})^3 = I$. Следовательно, $\langle v_1, \ldots, v_{l_1-1}\rangle \simeq \mathrm{Sym}_{l_1}$, и поскольку v_0 централизует H^-, то получаем $\widetilde{H}^- = \langle t_1, \ldots, t_k, \widetilde{v}_j | j \in \Pi\rangle \simeq C_W(w)$. Таким образом, $\widetilde{H}^-$ — дополнение для тора T в N. □

Лемма 2.4.22. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)\ldots(n_k)$.*

(1) *Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то T имеет дополнение в N.*

(2) *Если a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то T имеет дополнение в N.*

Доказательство. (1) Определим $s_i = \omega_i, u_i = \mathrm{bd}((-1)^{n_i}, I_n, I_n)\tau_i$ для $1 \leqslant i \leqslant k$ и $v_j = \chi_j$ для $j \in \Pi$. Поскольку $q \equiv 1 \pmod 4$, то

$$\det(s_i|_{V_0}) = \mathrm{sgn}(\omega_i) = (-1)^{n_i-1} \in (\mathbb{F}_q^*)^2, \quad \det(v_j|_{V_0}) = \mathrm{sgn}(\chi_j) = (-1)^{n_j} \in (\mathbb{F}_q^*)^2.$$

Поэтому $s_i, v_j \in \Omega_{2n+1}(q)$ и $u_i \in \Omega_{2n+1}(q)$ в силу предложения 2.4.6. Таким образом, получаем $H^+ = \langle s_i, u_i, v_j | 1 \leqslant i \leqslant k, j \in \Pi\rangle \simeq C_W(w)$, то есть H^+ является дополнением для T в N.

(2) Можно считать, что $q \equiv 3 \pmod 4$ и $i = 1$, то есть $n_1 l_1$ нечетно. Определим

$$v_0 = \mathrm{bd}(1, -I, I, -I, I),$$

где $-I$ — единичная матрица размерности $n_1 l_1$ и I — единичная матрица размерности $n - n_1 l_1$. Тогда $\det(v_0|_{V_0}) = -1 \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_0 \notin \Omega_{2n+1}(q)$. Определим группу $H^+ = \langle s_i, u_i, v_j | 1 \leqslant i \leqslant k, j \in \Pi\rangle \simeq C_W(w)$ также как в пункте (1). Ясно, что v_0 централизует группу H^+. Для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ положим

$$\widetilde{s_i} = \begin{cases} s_i & \text{если } n_i \text{ нечетно} \\ v_0 s_i & \text{если } n_i \text{ четно} \end{cases}$$

Так как $\det(s_i|_{V_0}) = (-1)^{n_i - 1}$, то $\widetilde{s_i} \in \Omega_{2n+1}(q)$, и поскольку $v_0^2 = I$, то имеем $\widetilde{s_i}^{n_i} = I$. Для $j \in \Pi$ положим

$$\widetilde{v_j} = \begin{cases} v_j & \text{если } v_j \in \Omega_{2n+1}(q) \\ v_0 v_j & \text{если } v_j \notin \Omega_{2n+1}(q) \end{cases}.$$

Тогда $\widetilde{v_j} \in \Omega_{2n+1}(q), \widetilde{v_j}^2 = I$. Наконец, определим

$$\widetilde{u_i} = \begin{cases} \mathrm{bd}((-1)^{n_i}, I_n, I_n)\tau_i & \text{если } n_i \text{ четно} \\ v_0\, \mathrm{bd}((-1)^{n_i}, I_n, I_n)\tau_i & \text{если } n_i \text{ нечетно} \end{cases}$$

В силу предложения 2.4.6 спинорная норма $\theta(\mathrm{bd}((-1)^{n_i}, I_n, I_n)\tau_i) = (-1)^{n_i}$, поэтому $\theta(\widetilde{u_i}) = 1$ и $\widetilde{u_i} \in \Omega_{2n+1}(q)$. Так как v_0 централизует группу H^+, получаем, что $\widetilde{H}^+ = \langle \widetilde{s_i}, u_i, \widetilde{v_j} | 1 \leqslant i \leqslant k, j \in \Pi\rangle \simeq H^+$. Таким образом, $\widetilde{H}^+$ будет дополнением для T в N. □

Лемма 2.4.23. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$.*

(1) *Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то T имеет дополнение в N.*

(2) *Если a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то T имеет дополнение в N.*

Доказательство. (1) Применяя рассуждения из пункта (1) лемм 2.4.21 и 2.4.22, мы построим группу $H = H^-H^+$, которая является дополнением для тора T в N.

(2) Применяя рассуждения из пункта (2) лемм 2.4.21 и 2.4.22, мы построим группу $\widetilde{H} = \widetilde{H}^-\widetilde{H}^+$, которая является дополнением для тора T в N. □

Теорема 2.4.2 следует из лемм 2.4.19-2.4.23.

Ортогональные группы четной размерности.

Для нас будет удобно рассматривать группу $\mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ как подгруппу в группе $\mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Как и ранее, $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p, Q)$, $Q(v) = x_0^2 + x_1x_{-1} + \ldots + x_nx_{-n}$ и $\{x, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ — базис пространства V, соответствующий форме Q. Нумеруем строки и столбцы матриц из $\overline{G}$ в порядке $0, 1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n$. Определим группу $\overline{H}$ как подгруппу в $\overline{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, состоящую из всех матриц вида $\mathrm{bd}(1, A)$, где A — матрица размера $2n \times 2n$. Тогда $\overline{H} \simeq \mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

Подгруппа $\overline{T}$ в группе $\overline{G}$, состоящая из всех диагональных матриц вида $\mathrm{bd}(1, D, D^{-1})$, является максимальным тором групп $\overline{G}$ и $\overline{H}$. Группа Вейля $W_{\overline{G}}$ группы $\overline{G}$ изоморфна группе Sl_n, а группа Вейля $W_{\overline{H}}$ группы $\overline{H}$ изоморфна подгруппе Sl_n^+ группы Sl_n, состоящей из подстановок, в разложение которых на независимые циклы входит четное количество отрицательных циклов.

Пусть $n_0 = \mathrm{bd}(-1, A_0)$, где A_0 — подстановочная матрица, соответствующая отрицательному циклу $(n, -n)$. Тогда $n_0 \in N_{\overline{G}}(\overline{T})$ и $W_{\overline{G}} = W_{\overline{H}} \cup w_0W_{\overline{H}}$, где $w_0 = \pi(n_0)$.

Пусть σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$, $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. В этом случае $G = \overline{G}_\sigma \simeq \mathrm{SO}_{2n+1}(q)$ и $H = \overline{H}_\sigma \simeq \mathrm{SO}_{2n}^+(q)$. Положим $\sigma_1 = \sigma \circ n_0$, где n_0 действует сопряжением на группе $\overline{G}$. Тогда $H_1 = \overline{H}_{\sigma_1} \simeq \mathrm{SO}_{2n}^-(q)$. Группа $\mathrm{SO}_{2n}^\varepsilon(q)$ содержит единственную подгруппу индекса 2, которая обозначается через $\Omega_{2n}^\varepsilon(q)$.

Как отмечалось выше, отображение σ действует тривиально на $W_{\overline{G}}$, а значит классы σ-сопряженности совпадают с обычными классами сопряженности. Два элемента группы $W_{\overline{H}}$ сопряжены тогда и только тогда, когда их циклические типы совпадают, за исключением случая, когда все циклы положительны и имеют одинаковую длину. В последнем случае имеются два класса сопряженности для одного циклического типа, однако это не влияет на утверждение.

Рассмотрим классы σ_1-сопряженности группы $W_{\overline{H}}$. По определению w_1 и w_2 из $W_{\overline{H}}$ являются σ_1-сопряженными в $W_{\overline{H}}$, если $w_1 = (w^{-1})^{\sigma_1} w_2 w$ для некоторого w из $W_{\overline{H}}$. Поскольку $w^{\sigma_1} = w_0^{-1} w w_0$, равенство $w_1 = (w^{-1})^{\sigma_1} w_2 w$ эквивалентно равенству $w_0 w_1 = w^{-1} w_0 w_2 w_0$. Таким образом, w_1 и w_2 являются σ_1-сопряженными в $W_{\overline{H}}$ тогда и только тогда, когда $w_0 w_1$ и $w_0 w_2$ сопряжены элементом из $W_{\overline{H}}$. Для удобства будем говорить, что максимальный тор $(\overline{T}^g)_{\sigma_1}$ группы H_1, где $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$, соответствует не элементу w, а элементу $w_0 w$. Кроме того, как и для группы H, будем рассматривать не класс сопряженности элемента $w_0 w$, а его циклический тип. Максимальные торы в группах $\mathrm{SO}^+_{2n}(q)$ и $\mathrm{SO}^-_{2n}(q)$ в случае нечетной характеристики имеют следующее строение.

Предложение 2.4.24. [2, §4] *Пусть* $(\overline{T}^g)_\sigma$ *— максимальный тор группы* $\overline{H}_\sigma = \mathrm{SO}^+_{2n}(q)$, *соответствующий элементу* w *группы Вейля с циклическим типом* $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$, *где* k *— четно. Положим* $\varepsilon_i = -$, *если* $i \leqslant k$ *и* $\varepsilon_i = +$ *иначе. Тогда* $\overline{T}_{\sigma n}$ *— подгруппа в* $\overline{H}$, *состоящая из всех диагональных матриц вида*

$$\mathrm{bd}(1, D_1, D_2, \ldots, D_m, D_1^{-1}, D_2^{-1}, \ldots, D_m^{-1}),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i - 1}})$ *и* $\lambda_i^{q^{n_i} - \varepsilon_i 1} = 1$.

Предложение 2.4.25. [2, §4] *Пусть* $(\overline{T}^g)_{\sigma_1}$ *— максимальный тор группы* $\overline{H}_{\sigma_1} = \mathrm{SO}^-_{2n}(q)$, *соответствующий элементу* $w_0 w$ *группы Вейля с циклическим типом* $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$, *где* k *— нечетно. Положим* $\varepsilon_i = -$, *если* $i \leqslant k$ *и* $\varepsilon_i = +$ *иначе. Тогда* $\overline{T}_{\sigma_1 n}$ *— подгруппа в* $\overline{H}$, *состоящая из всех диагональных матриц вида*

$$\mathrm{bd}(1, D_1, D_2, \ldots, D_m, D_1^{-1}, D_2^{-1}, \ldots, D_m^{-1}),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i - 1}})$ *и* $\lambda_i^{q^{n_i} - \varepsilon_i 1} = 1$.

Перейдем к доказательству основных результатов для ортогональных групп четной размерности.

Определим следующие элементы группы Sl^+_n:

$$\varphi_1 = (1, 2)(-1, -2), \ldots, \varphi_{n-1} = (n-1, n)(-(n-1), -n), \varsigma = (n-1, -(n-1))(n, -n).$$

Тогда $\mathrm{Sl}_n^+ = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varsigma \rangle$. Как упоминалось ранее, мы отождествляем элементы из группы Sym_{2n} с мономиальными матрицами размерности $2n$. В этом случае, легко видеть, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varsigma \in \overline{H}$. Следовательно, $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varsigma \rangle \leqslant N_{\overline{H}}(\overline{T})$. Таким образом, мы получили следующее замечание.

Замечание 2.4.26. *Пусть* $\overline{T}$ *— максимальный* σ*-инвариантный тор группы* $\overline{H} = \mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. *Тогда* $\overline{T}$ *имеет дополнение в* $N_{\overline{H}}(\overline{T})$.

Теорема 2.4.1 следует из замечаний 2.4.5, 2.4.26.

Замечание 2.4.27. *Пусть* $\overline{T}$ *— максимальный* σ*-инвариантный тор группы* $\overline{H} = \mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *и* $\overline{T}$ *имеет дополнение в* $N_{\overline{H}}(\overline{T})$. *Пусть* $\widetilde{T}$ *— соответствующий максимальный* σ*-инвариантный тор группы* $\widetilde{G} = \mathrm{PSO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. *Поскольку* $Z(\overline{H}) \leqslant \overline{T}$, *то* $\widetilde{T}$ *имеет дополнение в* $\widetilde{N}$. *Такое же заключение верно для групп* $\Omega_{2n}^+(q)$ *и* $\mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.4.3.

Лемма 2.4.28. *Пусть* T *— максимальный тор группы* $G = \Omega_{2n}^+(q)$, *соответствующим элементу* w *с циклическим типом* $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$, *где* k *четно (*k *нечетно).*

(1) *Если* $q \equiv 1 \pmod 4$, *то* T *имеет дополнение в* N.

(2) *Если* a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant r$, *то* T *имеет дополнение в* N.

(3) *Если* $q \equiv 3 \pmod 4), m = k$ *и* n_i *четно для всех* $1 \leqslant i \leqslant k$, *то* T *имеет дополнение в* N.

Доказательство. Мы рассматриваем группу G как подгруппу в $\Omega_{2n+1}(q)$. В силу лемм 2.4.21, 2.4.22, 2.4.23 существует дополнение $H \leqslant \Omega_{2n+1}(q)$ для тора T. Группа H порождается некоторыми элементами s_i, t_i, u_i, v_i. Элементы s_i, v_i имеют вид

$$s_i = \mathrm{bd}(1, D_i, D_i^{-1})\omega_i, \quad v_i = \mathrm{bd}(1, T_i, T_i^{-1})\chi_i,$$

а элементы t_i, u_i имеют вид

$$t_i = \mathrm{bd}(-1, D_i, D_i^{-1})\varpi_i, \quad u_i = \mathrm{bd}((-1)^{n_i}, T_i, T_i^{-1})\tau_i.$$

Поскольку группа Вейля W группы $\Omega^+_{2n}(q)$ равна Sl^+_n, то $N/T \simeq C_{\mathrm{Sl}^+_n}(w)$, где w — стандартный представитель с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$. Из определения группы Sl^+_n следует, что любой элемент $x \in H$, соответствующий некоторому элементу из $C_{\mathrm{Sl}^+_n}(w)$, имеет вид $x = \mathrm{bd}(1, D, D^{-1})\varphi$ для подходящего $\varphi \in \mathrm{Sl}^+_n$. Следовательно, $H \cap N$ будет дополнением для тора T в N. □

Лемма 2.4.29. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega^+_{2n}(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$, где k четно, $\widetilde{T}$ — образ тора T в группе $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega^+_{2n}(q)$. Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$, $m \geqslant 5$, a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Если найдется нечетное число n_f для некоторого $1 \leqslant f \leqslant m$, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Можно считать, что $f = 1$. Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то $\tau_i \in C_{\mathrm{Sl}_n}(w)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Сначала докажем нашу лемму когда $\tau_i \in C_W(w)$ для всех $3 \leqslant i \leqslant m$. Пусть v_i, u_j — прообразы элементов χ_i, τ_j в H, где $i \in \Pi, 3 \leqslant j \leqslant m$. Так как n_1 нечетно и a_1 четно, то $\chi_1 \in C_W(w)$. Тогда элемент v_1 имеет вид $v_1 = \mathrm{bd}(1, D, D^{-1})\chi_1$, где

$$D = \mathrm{bd}(D_1, \dots, D_{l_1}, D_{l_1+1}, \dots, D_{l_1+l_2}, \dots, D_{l_1+\dots+l_{r-1}+1}, \dots, D_{l_1+\dots+l_r}),$$

для некоторых диагональных матриц D_i. Поскольку $\widetilde{H}$ является дополнением для $\widetilde{T}$, то $v_1 v_i = \varepsilon_i v_i v_1$ для $i \in \Pi, i > 2$. По условию $m \geqslant 5$, поэтому $\varepsilon_i = 1$ и в силу леммы 2.4.14 получаем

$$D_3 = \dots = D_{l_1}, D_{l_1+1} = D_{l_1+2} = \dots = D_{l_1+l_2}, \dots, D_{l_1+\dots+l_{r-1}+1} = \dots = D_{l_1+\dots+l_r}.$$

Должны выполняться равенства $v_1 u_j = \varepsilon_j u_j v_1$ для всех $3 \leqslant j \leqslant m$. Поскольку $m \geqslant 5$, то $\varepsilon_j = 1$ и по пункту (1) леммы 2.4.11 получаем $\lambda_j^2 = 1$ и D_j — скалярная матрица для $3 \leqslant j \leqslant m$. Следовательно,

$$\mathrm{bd}(D_3, \dots, D_{l_1}) = \mu_1 I, \mathrm{bd}(D_{l_1+1}, \dots, D_{l_1+l_2}) = \mu_2 I, \dots, \mathrm{bd}(D_{l_1+\dots+l_{r-1}+1}, \dots, D_{l_1+\dots+l_r}) = \mu_r I.$$

Так как $v_1^2 = \varepsilon I$, то по лемме 2.4.17 получаем $D_1 D_2 = \varepsilon I_1$, $\mu_1^2 = \dots = \mu_r^2 = \varepsilon$. Поскольку $\lambda_j^2 = 1$, то $\varepsilon = 1$. Таким образом,

$$\det(v_1|_{V_0}) = \det(D)\det(\chi_1|_{V_0}) = \det(D_1 D_2)\mu_1^{n_1(l_1-2)}\mu_2^{n_2 l_2}\dots\mu_r^{n_r l_r}(-1)^{n_1} = -1.$$

Наконец, имеем $\det(v_1|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_1 \notin \Omega_{2n+1}(q)$, что приводит к противоречию. Следовательно, мы доказали лемму в предположении, что $\tau_i \in C_W(w)$ для $3 \leqslant i \leqslant m$.

Поскольку n_1 нечетно, то $\tau_1 \notin W$. Если $\tau_j \notin W$ для некоторого $3 \leqslant j \leqslant m$, то $\tau_1\tau_j \in W$. В общем случае определим элементы u_j следующим образом. Если $\tau_j \in W$, то u_j — прообраз элемента τ_j в H и u_j — прообраз элемента $\tau_1\tau_j$ иначе. Далее, мы можем повторить рассуждения приведенные выше. □

Лемма 2.4.30. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$, где k четно и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $m \geqslant 3, m > k$ и n_i четны для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$ и n_i четно, то $\tau_i \in C_W(w)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$.

Пусть s_{k+1} — прообраз элемента ω_{k+1} в H и u_i — прообраз элемента τ_i в H для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда элемент s_{k+1} имеет вид

$$s_{k+1} = \mathrm{bd}(1, D_1, \dots, D_m, D_1^{-1}, \dots, D_m^{-1})\omega_{k+1},$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \dots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Так как $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то должны выполняться следующие соотношения

$$s_{k+1}^{n_{k+1}} = \varepsilon I, s_{k+1}u_i = \varepsilon_i u_i s_{k+1}, \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

По лемме 2.4.15 имеем $\varepsilon_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и по пункту (1) леммы 2.4.13 получаем, что $D_i = \lambda_i I, \lambda_i^2 = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k+1$. Поскольку $s_{k+1}^{n_{k+1}} = \varepsilon I$, то в силу леммы 2.4.16(1) имеем $\det(D_{k+1}) = \lambda_i^{n_{k+1}} = \varepsilon$ при $1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k+1$. Так как $\lambda_i^2 = 1$ и n_{k+1} четно, то $\varepsilon = 1 = \det(D_{k+1})$. Таким образом,

$$\det(s_{k+1}|_{V_0}) = \det(D_1)\dots\det(D_m)\det(\omega_{k+1}|_{V_0}) = \lambda_1^{n_1}\dots\lambda_{k-1}^{n_{k-1}}\lambda_{k+1}^{n_{k+1}}\dots\lambda_m^{n_m}(-1)^{n_{k+1}-1} = -1.$$

По условию $q \equiv 3 \pmod 4$, следовательно, $\det(s_{k+1}|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $s_{k+1} \notin \Omega_{2n+1}(q)$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 2.4.31. *Леммы 2.4.28, 2.4.29 и 2.4.30 не зависят от четности k и также верны для группы $\Omega_{2n}^-(q)$. Достаточно в формулировках лемм заменить $\Omega_{2n}^+(q)$ на $\Omega_{2n}^-(q)$, а «k четно» — на «k нечетно».*

Лемма 2.4.32. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, имеющий один из следующих циклических типов $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3})(\overline{n_4})$, $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(n_3)(n_4)$ или $(n_1)(n_2)(n_3)(n_4)$. Пусть $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $n_1 = n_2$ нечетно, n_3, n_4 четно, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Поскольку $n_1 = n_2$, то $\chi_1 \in C_W(w)$ и $\tau_3, \tau_4 \in W$ потому, что n_3, n_4 четны. Пусть v_1, u_3, u_4 — прообразы элементов χ_1, τ_3, τ_4 в H. Тогда элемент v_1 имеет вид

$$v_1 = \mathrm{bd}(1, D_1, D_2, D_3, D_4, D_1^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1}, D_4^{-1})\chi_1,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \dots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Так как $\widetilde{H}$ является дополнением для $\widetilde{T}$, то имеем равенства

$$v_1^2 = \varepsilon I, \quad v_1 u_j = \varepsilon_j v_j v_1.$$

Поскольку $m = 4$, то $\varepsilon_j = 1$ и лемма 2.4.13 влечет $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 = 1$. В силу леммы 2.4.17 из равенства $v_1^2 = \varepsilon I$ получаем $D_1 D_2 = \varepsilon I_1$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 = \varepsilon$. Таким образом, $\varepsilon = 1$ и

$$\det(v_1|_{V_0}) = \det(D_1 D_2 D_3 D_4)\det(\chi_1|_{V_0}) = \det(D_1 D_2)\lambda_3^{n_3}\lambda_4^{n_4}(-1)^{n_1} = -1.$$

По условию $q \equiv 3 \pmod 4$, поэтому $\det(v_1|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_1 \notin \Omega_{2n+1}(q)$; противоречие. □

Лемма 2.4.33. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, имеющий один из следующих циклических типов $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3})(\overline{n_4})$, $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(n_3)(n_4)$ или $(n_1)(n_2)(n_3)(n_4)$. Пусть $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $n_1 = n_2, n_3 = n_4$ нечетны, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим, что тор T имеет циклический тип $(n_1)(n_2)(n_3)(n_4)$. Сначала рассмотрим случай $n_2 = n_3$. Положим $H = \langle \sigma_i, \tau_i, \chi_j | 1 \leqslant i \leqslant 4, 1 \leqslant j \leqslant 3\rangle$, тогда $H \simeq C_{\mathrm{Sl}_n}(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \wr \mathrm{Sym}_4$ и $C_W(w)$ подгруппа индекса 2 в H.

Определим $s_i = \omega_i$,

$$u_1 = \mathrm{bd}(1, T_1, T_1^{-1})\tau_1, \quad u_2 = \mathrm{bd}(1, T_2, T_2^{-1})\tau_2,$$
$$u_3 = \mathrm{bd}(1, T_3, T_3^{-1})\tau_3, \quad u_4 = \mathrm{bd}(1, T_4, T_4^{-1})\tau_4,$$

где

$$T_1 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_3, I_3), \quad T_2 = \mathrm{bd}(I_1, -I_1, I_3, I_3),$$
$$T_3 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, -I_3, I_3), \quad T_4 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, I_3, -I_3).$$

Тогда $\det(s_i|_{V_0}) = (-1)^{n_i-1} = 1$, то есть $s_i \in \Omega_{2n+1}(q)$ по предложению 2.4.6 и $u_i \in \Omega_{2n+1}(q)$ по предложению 2.4.7. Определим

$$v_1 = \mathrm{bd}(1, D_1, D_1^{-1})\chi_1, v_2 = \mathrm{bd}(1, D_2, D_2^{-1})\chi_2, v_3 = \mathrm{bd}(1, D_2, D_2^{-1})\chi_3,$$

где $D_1 = \mathrm{bd}(I_1, I_1, -I_1, I_1), D_2 = \mathrm{bd}(-I_1, I_1, I_1, I_1)$. Тогда $\theta(v_j) = (-1)^{n_1}\mathrm{sgn}(\chi_j) = 1$ для $1 \leqslant j \leqslant 3$ и по лемме 2.4.17 получаем, что $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = I$. Непосредственно проверяется, что

$$v_1v_3 = -v_3v_1, v_1^{v_2} = v_2^{v_1}, v_2^{v_3} = v_3^{v_2}.$$

Следовательно, образ группы $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ в $\widetilde{G}$ изоморфен группе Sym_4. Очевидно, что ω_i централизует D_1, D_2 для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$. Таким образом, действие ω_i на χ_j и на v_j совпадает. Положим $K = \langle s_i, u_i, v_j | 1 \leqslant i \leqslant 4, 1 \leqslant j \leqslant 3\rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы $K \cap G$ в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w)$ и $\widetilde{H}$ будет дополнением для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

В случае $n_2 \neq n_3$ имеем $C_{\mathrm{Sl}_n}(w) \simeq ((\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_2)\wr\mathrm{Sym}_2)\times((\mathbb{Z}_{n_3}\times\mathbb{Z}_2)\wr\mathrm{Sym}_2)$. Определим $M = \langle s_i, u_i, v_1, v_3 | 1 \leqslant i \leqslant 4\rangle$ и $\widetilde{H}$ — образ группы $M \cap G$ в $\widetilde{G}$. Тогда $\widetilde{H} \simeq C_W(w)$ и $\widetilde{H}$ будет дополнением для $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$.

Утверждение для циклических типов $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3})(\overline{n_4})$, $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(n_3)(n_4)$ доказывается аналогично. □

Лемма 2.4.34. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом (n) и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $n = 2l$ четно, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Так как n четно, то $\tau_1 \in \mathrm{Sl}_n^+$ и $C_W(w) \simeq \langle\omega_1, \tau_1\rangle$. Пусть s_1, u_1 — прообразы элементов ω_1, τ_1 в H соответственно. Тогда элементы s_1, u_1 имеют вид

$$s_1 = \mathrm{diag}(1, \lambda, \lambda^q, \dots, \lambda^{q^{n-1}}, \lambda^{-1}, \lambda^{-q}, \dots, \lambda^{-q^{n-1}})\omega_1,$$

$$u_1 = \mathrm{diag}(1, \mu, \mu^q, \dots, \mu^{q^{n-1}}, \mu^{-1}, \mu^{-q}, \dots, \mu^{-q^{n-1}})\tau_1,$$

где $\lambda^{q^n-1} = \mu^{q^n-1} = 1$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то должны выполняться следующие соотношения $s_1^n = \varepsilon_1 I, s_1u_1 = \varepsilon u_1s_1$. В силу леммы 2.4.16(1) первое равенство влечет $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = \varepsilon_1$. Непосредственно проверяется, что второе равенство равносильно соотношению $\lambda\mu^q = \varepsilon\mu\lambda^{-1}$. Таким образом,

$$\theta(s_1) = \det(s_1|_{V_0}) = \lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}}\,\mathrm{sgn}(\omega_1|_{V_0}) = -\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = -\varepsilon_1, \quad \theta(u_1) = \mu^{\frac{q^n-1}{q-1}}\theta(\tau_1) = \mu^{\frac{q^n-1}{q-1}}.$$

Поскольку $s_1, u_1 \in \Omega_{2n}^+(q)$ и $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $\mu^{\frac{q^n-1}{q-1}} \in (\mathbb{F}_q^*)^2$. С другой стороны, по пункту (1) леммы 2.4.18 имеем $\lambda^{\frac{q^n-1}{q-1}} = 1$, что приводит к противоречию.

□

Лемма 2.4.35. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$ и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и n_1, n_2 четны, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Поскольку n_1, n_2 четны, то $\tau_1, \tau_2 \in C_W(w)$ и $C_W(w) \simeq \langle\omega_1, \tau_1, \omega_2, \tau_2\rangle$. Пусть s_1, u_1, u_2 — прообразы элементов ω_1, τ_1, τ_2 в H соответственно. Тогда элементы s_1, u_1 имеют вид

$$s_1 = \mathrm{bd}(1, D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})\omega_1, \quad D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \dots, \lambda_i^{q^{n_i-1}}),$$

$$u_1 = \mathrm{bd}(1, T_1, T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1})\tau_1, \quad T_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \dots, \mu_i^{q^{n_i-1}}),$$

где $\lambda_i^{q^{n_i}-1} = \mu_i^{q^{n_i}-1} = 1, i = 1, 2$. Так как $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то должны выполняться следующие соотношения

$$s_1u_1 = \varepsilon_1 u_1 s_1, \quad s_1u_2 = \varepsilon_2 u_2 s_1, \quad s_1^{n_1} = \varepsilon_3 I, \quad u_1^2 = \varepsilon_4 I.$$

Первое равенство влечет $D_2T_2 = \varepsilon_1 T_2D_2$, то есть $\varepsilon_1 = 1$. Непосредственно проверяется, что равенство $s_1u_1 = u_1s_1$ равносильно $\lambda_1\mu_1^q = \mu_1\lambda_1^{-1}$. Из леммы 2.4.13 следует, что второе равенство влечет $\lambda_2^2 = \varepsilon_2$. Следовательно, $D_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \varepsilon_2\lambda_2, \dots, \lambda_2, \varepsilon_2\lambda_2)$.

По пункту (1) леммы 2.4.16 из равенства $s_1^{n_1} = \varepsilon_3 I$ следует, что $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = \varepsilon_3$. Таким образом, $\theta(s_1) = \det(D_1)\det(D_2)\operatorname{sgn}(\omega_1|_{V_0}) = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}}(\lambda_2^2\varepsilon_2)^{n_2/2}(-1)^{n_1-1} = -\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = -\varepsilon_3$. Согласно лемме 2.4.16(3) равенство $u_1^2 = \varepsilon_4 I$ влечет $\mu_2^2 = 1$. Следовательно, $\theta(u_1) = \det(T_1)\det(T_2)\theta(\tau_1) = \mu_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}}\mu_2^{n_2} = \mu_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}}$.

Так как $s_1, u_1 \in \Omega_{2n}^+(q)$ и $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $\mu_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} \in (\mathbb{F}_q^*)^2$. С другой стороны, по пункту (1) леммы 2.4.18 имеем $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = 1$, что приводит к противоречию. $\square$

Лемма 2.4.36. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(n_1)(n_2)$ и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $n_1 = n_2$ нечетно, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Поскольку $n_1 = n_2$ нечетно, то $\tau_1, \tau_2 \notin W$, и $C_W(w) \simeq \langle \omega_1, \omega_2, \tau_1\tau_2, \chi_1\rangle$. Положим

$$s_1 = \omega_1, s_2 = \omega_2, u = \tau_1\tau_2, v = \mathrm{bd}(1, -I_1, I_1, -I_1, I_1)\chi_1.$$

Тогда имеем $\theta(s_1) = \theta(s_2) = (-1)^{n_1-1} = 1, \theta(u) = \theta(\tau_1)\theta(\tau_2) = (\theta(\tau_1))^2 \in (\mathbb{F}_q^*)^2$. Более того, $v^2 = -I, \theta(v) = \det(-I_1)\theta(\chi_1) = (-1)^{n_1}(-1)^{n_1} = 1$. Таким образом, $\langle s_1, s_2, u, v\rangle \leqslant \Omega_{2n}^+(q)$. Определим $H = \langle s_1, s_2, u, v\rangle$ и пусть $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ будет дополнением для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. $\square$

Лемма 2.4.37. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})(\overline{n_2})$ и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $n_1 = n_2$ нечетно, то $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. В нашем случае $C_{\mathrm{Sl}_n}(w) \simeq \langle \varpi_1, \varpi_2, \chi_1\rangle$ и $C_W(w)$ является подгруппой индекса 2 в $C_{\mathrm{Sl}_n}(w)$. Положим $v = \mathrm{bd}(1, -I_1, I_1, -I_1, I_1)\chi_1$ и

$$t_1 = T_1\varpi_1, t_2 = T_2\varpi_2, \text{ где } \quad T_1 = T_2 = \mathrm{bd}(-1, -I_1, I_1, -I_1, I_1).$$

Тогда спинорная норма $\theta(t_i) = \det(-I_1)\theta(\varpi_i) = (-1)^{n_i}(-1)^{n_i} = 1$ для $i = 1, 2$, а также $\theta(v) = \det(-I_1)\theta(\chi_1) = (-1)^{n_1}(-1)^{n_1} = 1$. Более того, $v^2 = -I$.

Пусть $\sigma = (1,-1)$, тогда $t_1 = \omega_1\sigma$ и по предложению 2.4.7 имеем $\theta(t_1) = \theta(\omega_1)\theta(\sigma) = 1$. Следовательно, $\langle t_1, t_2, v\rangle \leqslant \Omega_{2n+1}(q)$ и $\langle t_1, t_2, v\rangle \cap \mathrm{Sl}_n^+ \leqslant \Omega_{2n}^+(q)$. Определим $H = \langle t_1, t_2, v\rangle \cap \mathrm{Sl}_n^+$ и пусть $\widetilde{H}$ — образ группы H в $\mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Тогда $\widetilde{H}$ будет дополнением для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. □

Лемма 2.4.38. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^+(q)$, соответствующим элементу w с циклическим типом $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(n_3)$ или $(n_1)(n_2)(n_3)$, и $\widetilde{T}$ — образ тора T в $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^+(q)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, $n_1 = n_2 = 2l+1$ нечетно, n_3 четно, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $\widetilde{H}$ — дополнение для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в N. Поскольку n_3 четно, то $\tau_3 \in W$ и $\langle \omega_3, \tau_3, \chi_1, \tau_1\tau_2\rangle \leqslant C_W(w)$. Пусть s_3, u_3, v_1, t — прообразы элементов $\omega_3, \tau_3, \chi_1, \tau_1\tau_2$ в H соответственно. Тогда элементы s_3, u_3, v_1, t имеют вид

$$s_3 = \mathrm{bd}(1, D_1, D_2, D_3, D_1^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1})\omega_3, \quad D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}}),$$

$$u_3 = \mathrm{bd}(1, U_1, U_2, U_3, U_1^{-1}, U_2^{-1}, U_3^{-1})\tau_3, \quad U_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}}),$$

$$v_1 = \mathrm{bd}(1, V_1, V_2, V_3, V_1^{-1}, V_2^{-1}, V_3^{-1})\chi_1, \quad V_i = \mathrm{diag}(\beta_i, \beta_i^q, \ldots, \beta_i^{q^{n_i-1}}),$$

$$t = \mathrm{bd}(1, T_1, T_2, T_3, T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_3^{-1})\tau_1\tau_2, \quad T_i = \mathrm{diag}(\alpha_i, \alpha_i^q, \ldots, \alpha_i^{q^{n_i-1}}),$$

где $1 \leqslant i \leqslant 3$.

(a) Поскольку $\widetilde{H}$ является дополнением для тора $\widetilde{T}$ в $\widetilde{N}$, то должны выполняться следующие равенства

$$s_3t = \varepsilon_1 ts_3, \quad s_3v_1 = \varepsilon_2 v_1s_3, \quad s_3u_3 = \varepsilon_3 u_3s_3, \quad s_3^{n_3} = \varepsilon I.$$

Согласно леммам 2.4.11, 2.4.13 равенство $s_3t = \varepsilon_1 ts_3$ влечет $T_3^{\omega_3} = \varepsilon_1 T_3$ и $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \varepsilon_1$, то есть $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \alpha_3^{q-1} = \varepsilon_1$ $(*)$. Согласно леммам 2.4.11, 2.4.14 из равенства $s_3v_1 = \varepsilon_2 v_1 s_3$ следует, что $D_1 = \varepsilon_2 D_2, \beta_3^{q-1} = \varepsilon_2$ $(**)$. Следовательно,

$$D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \varepsilon_1\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \varepsilon_1\lambda_1, \lambda_1), \quad D_2 = \mathrm{diag}(\varepsilon_2\lambda_1, \varepsilon_2\varepsilon_1\lambda_1, \ldots, \varepsilon_2\lambda_1, \varepsilon_2\varepsilon_1\lambda_1, \varepsilon_2\lambda_1).$$

Равенство $s_3u_3 = \varepsilon_3 u_3 s_3$ влечет $D_1U_1 = \varepsilon_3 U_1 D_1$, то есть $\varepsilon_3 = 1$. Непосредственная проверка показывает, что равенство $s_3u_3 = u_3s_3$ равносильно $\lambda_3\mu_3^q = \mu_3\lambda_3^{-1}$. В силу пункта (1) леммы 2.4.16 равенство $s_3^{n_3} = \varepsilon I$ влечет $\lambda_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} = \lambda_1^{n_3} = \lambda_2^{n_3} = \varepsilon$. Таким образом,

$$\theta(s_3) = \det(D_1D_2D_3)\det(\omega_3|_{V_0}) = \lambda_1^{2l+1}\varepsilon_1^l\varepsilon_2^{2l+1}\lambda_1^{2l+1}\varepsilon_1^l\varepsilon(-1) = -\lambda_1^2\varepsilon_2\varepsilon = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon.$$

(б) Для элемента v_1 должны выполняться следующие равенства

$$v_1u_3 = \delta_1u_3v_1, \quad v_1^2 = \delta I, \text{ где } \delta_1, \delta \in \{1, -1\}.$$

Согласно леммам 2.4.13, 2.4.14 равенство $v_1u_3 = \delta_1u_3v_1$ влечет $\beta_3^2 = \delta_1$, $U_1 = \delta_1U_2$. Следовательно, $V_3 = \mathrm{diag}(\beta_3, \delta_1\beta_3, \ldots, \beta_3, \delta_1\beta_3)$. По лемме 2.4.17 из равенства $v_1^2 = \delta I$ следует, что $V_1V_2 = \delta I_1, \beta_3^2 = \delta$. Таким образом,

$$\theta(v_1) = \det(V_1V_2)\det(V_3)\theta(\chi_1) = \delta^{n_1}(\beta_3^2\delta_1)^{n_3/2}(-1)^{n_1} = -\delta.$$

Поскольку $-1 \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_1 \in \Omega_{2n}^+(q)$, то $\delta = -1$. Следовательно, $\beta_3^2 = \delta_1 = -1, U_1 = -U_2$ $(***)$. Из соотношения $(**)$получаем, что $\beta_3^{q-1} = \varepsilon_2 = -1$.

(в) Для элемента u_3 должны выполняться следующие равенства

$$u_3t = \gamma_1tu_3, \quad u_3^2 = \gamma I, \text{ где } \gamma_1, \gamma \in \{1, -1\}.$$

Из леммы 2.4.13 следует, что $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \alpha_3^2 = \gamma_1$. В силу пункта (3) леммы 2.4.16 равенство $u_3^2 = \gamma I$ влечет $\mu_1^2 = \mu_2^2 = 1$. Следовательно, $\gamma_1 = 1 = \alpha_3^2$ и по $(*)$ получаем $\varepsilon_1 = 1$. Из соотношения $(***)$ следует $U_1 = \mu_1I_1, U_2 = -\mu_1I_1$. Таким образом,

$$\theta(u_3) = \det(U_1U_2U_3)\theta(\tau_3) = \mu_1^{2l+1}(-\mu_1)^{2l+1}\mu_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} = -\mu_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}}.$$

Поскольку $-1 \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $u_3 \in \Omega_{2n}^+(q)$, то $\mu_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$.

Наконец, $\theta(s_3) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon = \varepsilon$ и $\lambda_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} = \varepsilon = 1$. Поэтому мы имеем равенства

$$\lambda_3\mu_3^q = \mu_3\lambda_3^{-1}, \quad \mu_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} \notin (\mathbb{F}_q^*)^2, \quad \lambda_3^{\frac{q^{n_3}-1}{q-1}} = 1,$$

что противоречит пункту (2) леммы 2.4.18. □

Теорема 2.4.3 следует из лемм 2.4.28-2.4.38 и замечания 2.4.27.

Действительно, если $q \equiv 1 \pmod 4$ или a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$, то результат следует из пунктов (1),(2) леммы 2.4.28 и замечания 2.4.27. Поэтому можно считать, что $q \equiv 3 \pmod 4$ и a_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant r$.

Пусть $m \geqslant 5$. Если найдется нечетное число n_j для некоторого $1 \leqslant j \leqslant m$, то мы применяем лемму 2.4.29. Если n_j четно для всех $1 \leqslant j \leqslant m$, то либо $m > k$ и мы в условиях леммы 2.4.30, либо $m = k$ и результат следует из пункта (3) леммы 2.4.28 и замечания 2.4.27.

Пусть $m = 4$. Если n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$, то то мы применяем леммы 2.4.28(3) и 2.4.30. Предположим, что n_j нечетно для некоторого $1 \leqslant j \leqslant 4$. Так как a_i четно, то либо $n_1 = n_2$, $n_3 = n_4$ нечетны (лемма 2.4.33), либо $n_1 = n_2$ нечетно, а n_3, n_4 четны (лемма 2.4.32).

Пусть $m = 3$. Если n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$, то мы в условиях леммы 2.4.30. Поскольку a_i четно, то $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно и мы применяем лемму 2.4.38.

Пусть $m = 2$. Поскольку a_i четно, то либо n_1, n_2 четны и результат следует из лемм 2.4.28(3) и 2.4.35, либо $n_1 = n_2$ нечетно и результат следует из лемм 2.4.36 и 2.4.37.

Наконец, если $m = 1$, то n_1 четно и мы применяем леммы 2.4.28(3) и 2.4.34.

Перейдем к доказательству теоремы 2.4.4

Из замечания 2.4.31 следует справедливость теоремы при $m \geqslant 5$, а также при $q \equiv 1 \pmod 4$.

Рассмотрим последовательно все случаи с $m \leqslant 4$ и нечетном k.

Пусть $m = 4$. В данном случае элемент группы Вейля имеет один из двух циклических типов:

$$(\overline{n_1})(n_2)(n_3)(n_4) \text{ или } (\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3})(n_4).$$

Если все n_i четны, то результат следует из леммы 2.4.30. Если среди чисел n_1, n_2, n_3, n_4 количество нечетных не равно двум, то результат следует из пункта (2) леммы 2.4.28. В случае когда среди чисел n_1, n_2, n_3, n_4 имеется два различных нечетных числа, результат также следует из пункта (2) леммы 2.4.28.

Лемма 2.4.39. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^-(q)$, соответствующий элементу w_0w группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})(n_2)(n_3)(n_4)$ или $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3})(n_4)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N(G,T)$ в группе $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^-(q)$ соответственно. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, n_1, n_4 четны, $n_2 = n_3$ нечетно, то $\widetilde{T}$ не имеет* *дополнения в* $\widetilde{N}$.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в $N(G,T)$. Поскольку $n_2 = n_3$, то $\chi_2 \in C_W(w_0w)$. Из четности чисел n_1, n_4 получаем, что $\tau_1, \tau_4 \in C_W(w_0w)$. Пусть v_2, u_1, u_4 — прообразы χ_2, τ_1, τ_4 в H. Тогда элемент v_2 имеет вид

$$v_2 = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3, D_4, D_1^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1}, D_4^{-1})\chi_2,$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$. Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$, то должны выполняться равенства

$$v_2^2 = \varepsilon I, \quad v_2u_1 = \varepsilon_1 u_1 v_2, \quad v_2u_4 = \varepsilon_4 u_4 v_2, \text{ где } \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_4 \in \{1, -1\}.$$

Так как $m = 4$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 1$ и в силу 2.4.13 имеем $\lambda_1^2 = \lambda_4^2 = 1$. Применяя лемму 2.4.17 к равенству $v_2^2 = \varepsilon I$, получаем, что $D_2D_3 = \varepsilon I_1$, $\lambda_1^2 = \lambda_4^2 = \varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon = 1$ и

$$\det(v_2|_{V_0}) = \det(D_1D_2D_3D_4)\det(\chi_2|_{V_0}) = \det(D_2D_3)\lambda_1^{n_1}\lambda_4^{n_4}(-1)^{n_2} = -1.$$

Поскольку $q \equiv 3 \pmod 4$, то $\det(v_2|_{V_0}) \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$ и $v_2 \notin \Omega_{2n}^-(q)$, противоречие. □

Пусть $m = 3$. В данном случае элемент группы Вейля имеет один из двух циклических типов:

$$(n_1)(n_2)(\overline{n_3}) \text{ или } (\overline{n_1})(\overline{n_2})(\overline{n_3}).$$

В силу леммы 2.4.30 и пункта (2) леммы 2.4.28 достаточно рассмотреть случай $n_1 = n_2$ нечетно, а n_3 четно.

Лемма 2.4.40. *Пусть* T *— максимальный тор группы* $G = \Omega_{2n}^-(q)$, *соответствующий элементу* w_0w *группы Вейля с циклическим типом* $(n_1)(n_2)(\overline{n_3})$ *или* $(\overline{n_1})(\overline{n_2})(n_3)$. *Пусть* $\widetilde{T}$ *и* $\widetilde{N}$ *— образы* T *и* $N(G,T)$ *в группе* $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^-(q)$ *соответственно. Если* $q \equiv 3 \pmod 4$, $n_1 = n_2$ *нечетно, а* n_3 *четно, то* $\widetilde{T}$ *не имеет дополнения в* $\widetilde{N}$.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в $N(G,T)$. Поскольку $\varpi_3, \tau_1 \notin W$, то $\varpi_3\tau_1 \in W$ и

$$\langle \chi_1, \varpi_3\tau_1 \rangle \leqslant C_W(w_0w).$$

Пусть v и t — прообразы элементов χ_1 и $\varpi_3\tau_1$ в H соответственно. Тогда элементы v, t имеют вид

$$v = \mathrm{bd}(D_1, D_2, D_3, D_1^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1})\chi_1, \quad D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \ldots, \lambda_i^{q^{n_i-1}}),$$

$$t = \mathrm{bd}(U_1, U_2, U_3, U_1^{-1}, U_2^{-1}, U_3^{-1})\varpi_3\tau_1, \quad U_i = \mathrm{diag}(\mu_i, \mu_i^q, \ldots, \mu_i^{q^{n_i-1}}),$$

Поскольку $\widetilde{H}$ — дополнение для $\widetilde{T}$, то должны выполняться равенства

$$v^2 = \varepsilon I, vt = \delta tv, \quad \text{где } \varepsilon, \delta \in \{1, -1\}.$$

Применяя лемму 2.4.17 к равенству $v^2 = \varepsilon I$, получаем, что $D_1D_2 = \varepsilon I_1$, $\lambda_3^2 = \varepsilon$.

Рассмотрим равенство $vt = \delta tv$. Если $\delta = -1$, то в силу пункта (2) леммы 2.4.12 следует, что n_3 нечетно; противоречие с условием. Следовательно, $\delta = 1$ и по пункту (1) леммы 2.4.12 получаем, что $\lambda_3^2 = 1$.

Таким образом, $\varepsilon = 1$ и $D_1D_2 = 1$. Поскольку $q \equiv 3 \pmod 4$, то

$$\theta(v) = \det(D_1D_2D_3)\theta(\chi_1) = \lambda_3^{n_3}(-1)^{n_1} = -1 \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$$

и $v \notin \Omega_{2n}^-(q)$, противоречие. □

При $m = 2$, учитывая лемму 2.4.28 (2), осталось рассмотреть следующий случай.

Лемма 2.4.41. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n}^-(q)$, соответствующий элементу w_0w группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})(n_2)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N(G,T)$ в группе $\widetilde{G} = \mathrm{P}\Omega_{2n}^-(q)$ соответственно. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $n_1 = n_2$ четно, то $\widetilde{T}$ не имеет дополнения в $\widetilde{N}$.*

Доказательство. Предположим что $\widetilde{T}$ имеет дополнение $\widetilde{H}$ в $\widetilde{N}$. Пусть H — прообраз группы $\widetilde{H}$ в $N(G,T)$. Поскольку n_1, n_2 четны, то $\tau_1, \tau_2 \in C_W(w_0w)$ и $C_W(w_0w) \geqslant \langle \omega_2, \tau_1, \tau_2 \rangle$. Теперь мы находимся в точности в условиях доказательства леммы 2.4.35, где получено противоречие. □

Случай $m = 1$ следует из пункта (2) леммы 2.4.28. Тем самым все случаи для m разобраны и теорема 2.4.4 доказана.

Глава 3

Нормализаторы максимальных торов в исключительных группах

3.1 Краткий обзор результатов главы

Третья глава посвящена решению проблем 1 и 2 (см. введение) для исключительных групп лиева типа. В последующих разделах последовательно рассматриваются исключительные группы лиева типа: E_6 — в разделе 3.2, E_7 — в разделе 3.3, E_8 — в разделе 3.4, F_4 — в разделе 3.5 и оставшиеся группы — в разделе 3.6. В каждом из разделов сначала рассматриваются соответствующие группы над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, а затем над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Ответ на проблему 1 для групп лиева типа E_6 получен в теореме 3.2.1, типа E_7 — в теореме 3.3.1, типа E_8 — в теореме 3.4.1, типа F_4 — в теореме 3.5.1 и, наконец, типа G_2 — в теореме 3.6.1.

Данные теоремы вместе с результатами главы 2 дают полный ответ на проблему 1.

Проблема 2 для групп $E_6^\varepsilon(q)$ (односвязных и присоединенного типа) решена в теореме 3.2.2(1), для групп $E_7(q)$ (односвязных и присоединенного типа) — в теореме 3.3.2, для групп $E_8(q)$ — в теореме 3.4.2, для групп $F_4(q)$ — в теореме 3.5.2, для групп $G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q)$ — в теореме 3.6.2.

Отметим, что в теореме 3.5.2 не только дан ответ на проблему 2 для групп $F_4(q)$, но и найдены минимальные добавления к максимальным торам в их алгебраических нормализаторах.

Учитывая результаты главы 2, итоговый результат о расщепляемости нормализатора максимального тора в конечных группах лиева типа можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.1.1. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа и T — максимальный тор группы G. Предположим, что алгебраический нормализатор $N(G,T)$ расщепляется над T. Тогда пара (G,T) описана.*

Тем самым, проблема 2 полностью решена.

Более того, в данной главе для всех конечных исключительных групп лиева типа (односвязных и присоединенного типа) найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора.

3.2 Исключительные группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа E_6. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа (присоединенного типа или односвязная) лиева типа E_6 над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$. Пусть $\overline{T}$ — максимальный тор в группе $\overline{G}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

При переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. В группе $E_6(q)$ содержится 25 классов сопряженности максимальных торов и мы будем нумеровать их также как в работе [29]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_6 и $r_{14} = r_2 + r_4 + r_5$, $r_{31} = r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6$, $r_{36} = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6$. Через w_i обозначается элемент группы Вейля W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной корню r_i. Для краткости, будем обозначать через $E_6^-(q)$ конечную группу ${}^2E_6(q)$ и через $E_6^+(q)$ конечную группу $E_6(q)$ (в обоих случаях группы могут быть односвязные или присоединенного типа). Ответ на проблему 2 для групп $E_6^\varepsilon(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.2.2. *Пусть $G = E_6^\varepsilon(q)$ (односвязная или присоединенного типа), где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и W — группа Вейля группы G. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *T не имеет дополнения в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда либо $q \equiv -\varepsilon 1 \pmod 4$ и w сопряжен в W с элементом $w_3w_2w_4w_{14}$, либо q нечетно и w сопряжен с одним из следующих элементов: 1, w_1, w_1w_2, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{36}$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_1w_4w_6w_3w_{36}$;*

(2) *существует поднятие для w в $N(G,T)$ порядка $|w|$.*

В случае когда тор T имеет дополнение в $N(G,T)$ мы строим его в явном виде. Результаты теоремы проиллюстрированы в таблице 3.1, которая также содержит дополнительную информацию о максимальных торах. Символ «+» используется, если соответствующий тор имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе, иначе используется символ «−» в соответствующей ячейке таблицы. Символ «±» для случая 14 означает, что алгебраический нормализатор расщепляется над тором тогда и только тогда, когда $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$.

Предварительные сведения.

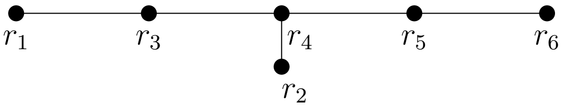
Матрица Картана (A_{ij}) корневой системы E_6 имеет вид

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группу Вейля W корневой системы E_6 можно записать в виде $W(E_6) = \langle w_{r_1}, \ldots, w_{r_6} | (w_{r_i} w_{r_j})^{m_{ij}} = 1 \rangle$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 2, & \text{если } A_{ij} = 0, \\ 3, & \text{если } A_{ij} = -1. \end{cases}$$

Группа W имеет порядок $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ и изоморфна группе $\mathrm{PSp}_4(3) : 2$ (в обозначениях [25]). Диаграмма Дынкина корневой системы типа E_6 имеет вид



Напомним, что любой элемент H тора $\overline{T}$ представляется в виде $H = \prod_{i=1}^{6} h_{r_i}(\lambda_i)$. Следовательно, элемент H определяется значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ и мы будем писать $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$. Пусть $\xi \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\xi^3 = 1$. Согласно [34, таблица 1.12.6] центр $Z(E_6(\overline{\mathbb{F}}_p))$ односвязной группы $E_6(\overline{\mathbb{F}}_p)$ порождается элементом $z = h_{r_1}(\xi) h_{r_3}(\xi^2) h_{r_5}(\xi) h_{r_6}(\xi^2)$ порядка 3. Таким образом,

$$H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_5 = \xi^{\epsilon}, \lambda_2 = \lambda_4 = 1, \lambda_3 = \lambda_6 = \xi^{-\epsilon},$$

где $\epsilon = \pm 1$.

Мы используем программный пакет MAGMA [53] для вычисления произведений элементов в группе $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Все вычисления могут быть проверены с помощью MAGMA-калькулятора [48], доступного онлайн. На момент вычислений использовалась версия Magma V2.25-2. Предварительные команды для вычислений:

$L := LieAlgebra(''E6\,Rationals());$

$R := RootDatum(L);$

$B := ChevalleyBasis(L);$

Следующие команды выдают значения экстраспециальных пар и знаки соответствующих структурных констант:

$x, y, h := ChevalleyBasis(L); IsChevalleyBasis(L, R, x, y, h);$

$[\langle 1,3,1\rangle$, $\langle 1,9,1\rangle$, $\langle 1,13,1\rangle$, $\langle 1,15,1\rangle$, $\langle 1,19,1\rangle$, $\langle 1,21,1\rangle$, $\langle 1,24,1\rangle$, $\langle 1,25,1\rangle$, $\langle 1,28,1\rangle$, $\langle 1,31,1\rangle$,

$\langle 2,4,1\rangle$, $\langle 2,9,1\rangle$, $\langle 2,10,1\rangle$, $\langle 2,15,1\rangle$, $\langle 2,16,1\rangle$, $\langle 2,21,1\rangle$, $\langle 2,35,1\rangle$, $\langle 3,4,1\rangle$, $\langle 3,10,1\rangle$, $\langle 3,16,1\rangle$, $\langle 3,26,1\rangle$, $\langle 3,30,1\rangle$, $\langle 3,33,1\rangle$, $\langle 4,5,1\rangle$, $\langle 4,11,1\rangle$, $\langle 4,19,1\rangle$, $\langle 4,25,1\rangle$, $\langle 4,34,1\rangle$, $\langle 5,6,1\rangle$, $\langle 5,28,1\rangle]$.

Например, тройка $\langle 2,4,1\rangle$ означает, что пара корней (r_2,r_4) является экстраспециальной и $N_{r_2,r_4} = 1$. Непосредственная проверка показывает, что определенный ранее порядок на корнях дает такое же множество экстраспециальных пар. Таким образом, вычисления в системе MAGMA для группы $\overline{N}$ согласуются с порядком и структурными константами, определенными ранее. Следующие команды задают элементы n_i и h_i.

$G := GroupOfLieType(L)$;

$n := [elt\langle G \mid i\rangle : i\ in\ [1..36]]$;

$h := [TorusTerm(G,i,-1) : i\ in\ [1..36]]$.

Для получения списка матриц, соответствующих фундаментальным отражениям, можно использовать команду:

$w := [Transpose(i)\ :\ i\ in\ ReflectionMatrices(R)]$.

Лемма 3.2.3. *Пусть* $n = \prod_{j=1}^{k} n_{r_{i_j}}$ *и* $w = \prod_{j=1}^{k} w_{r_{i_j}}$, *где* $i_j \in \{1..36\}$. *Предположим, что* $A = (a_{ij})_{6\times 6}$ *— матрица элемента* w *в базисе* $r_1, r_2, \ldots, r_6$ *и* $H = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)$ *— элемент тора* $\overline{T}$. *Тогда верны следующие равенства:*

(i) $H^n = (\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3',\lambda_4',\lambda_5',\lambda_6')$, *где* $\lambda_i' = \lambda_1^{a_{i1}}\lambda_2^{a_{i2}}\lambda_3^{a_{i3}}\lambda_4^{a_{i4}}\lambda_5^{a_{i5}}\lambda_6^{a_{i6}}$;

(ii) $(Hn)^m = (\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3',\lambda_4',\lambda_5',\lambda_6')n^m$, *где* m *— положительное целое число,* $\lambda_i' = \lambda_1^{b_{i1}}\lambda_2^{b_{i2}}\lambda_3^{b_{i3}}\lambda_4^{b_{i4}}\lambda_5^{b_{i5}}\lambda_6^{b_{i6}}$ *и* b_{ij} *— элементы матрицы* $\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.

Доказательство. Так как матрица композиции двух линейных преобразований является произведением их матриц в обратном порядке, то достаточно доказать утверждение леммы для $n = n_r$. Согласно формулам для элементов n_r и $h_r(\lambda)$ имеем

$$H^{n_r} = \prod_{i=1}^{6} h_{r_i}(\lambda_i)^{n_r} = \prod_{i=1}^{6} h_{w_r(r_i)}(\lambda_i) = \prod_{i=1}^{6}(\prod_{j=1}^{6} h_{r_j}(\lambda_i^{a_{ji}})) = \prod_{i=1}^{6} h_{r_i}(\prod_{j=1}^{6}\lambda_j^{a_{ij}}).$$

Для доказательства (ii) заметим, что $(Hn)^m = H^{n^0}H^{n^1}H^{n^2}\ldots H^{n^{m-1}}n^m$. В силу (i) мы знаем, что i-я строка матрицы A^j соответствует степеням элементов λ_1, λ_2, ..., λ_6 в i-й координате элемента H^{n^j} для всех $i,j \in \{1,\ldots,6\}$. Чтобы вычислить произведение, нам необходимо просуммировать соответствующие степени для каждой координаты.

□

Поскольку мы часто будем использовать лемму 3.2.3, то продемонстрируем ее применение на следующем примере.

Пример 3.2.4. *Пусть* $w = w_1 w_3$ *и* $n = n_1 n_3$. *Тогда легко проверяется, что* $w(r_1) = r_3$, $w(r_2) = r_2$, $w(r_3) = -r_1 - r_3$, $w(r_4) = r_1 + r_3 + r_4$, $w(r_5) = r_5$ *и* $w(r_6) = r_6$. *Следовательно, в этом случае*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \overline{T}$. *Тогда по лемме 3.2.3 мы используем строки матрицы* A *для вычисления* H^n, *то есть* $H^{n_1 n_3} = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$. *Положим* $B = A^0 + A + A^2$. *Тогда*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

С помощью этой матрицы вычисляется $(Hn)^3$. *Легко проверить, что* $n^3 = 1$, *поэтому*

$$(Hn)^3 = (\lambda_4, \lambda_2^3, \lambda_4^2, \lambda_4^3, \lambda_5^3, \lambda_6^3)n^3 = (\lambda_4, \lambda_2^3, \lambda_4^2, \lambda_4^3, \lambda_5^3, \lambda_6^3).$$

Доказательство теоремы 3.2.1.

В случае четной характеристики поля результат следует из замечания 1.4.1, поэтому далее предполагаем, что p нечетно.

Предположим, что максимальный тор $\overline{T}$ имеет дополнение $\overline{K}$ в своем нормализаторе $\overline{N}$. Пусть N_i — прообраз элемента w_{r_i} в $\overline{K}$, где $i = 1, \ldots, 6$. Тогда $N_i = H_i n_{r_i}$ и $(N_i N_j)^{m_{ij}} = 1$.

Пусть $N_3 = H_3 n_3, N_4 = H_4 n_4, N_6 = H_6 n_6$, где

$$H_3 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_6), H_4 = (\mu_1, \ldots, \mu_6), H_6 = (\beta_1, \ldots, \beta_6).$$

В силу леммы 3.2.3 получаем, что

$$N_4^2 = (\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, -\mu_2\mu_3\mu_5, \mu_5^2, \mu_6^2) = 1,$$

откуда

$$\begin{cases} \mu_1^2 = \mu_5^2, \\ \mu_2^2 = -\mu_2\mu_3\mu_5 = 1, \\ \mu_3^2 = \mu_6^2. \end{cases}$$

Пусть $k \in \{1, 6\}$, тогда должны выполняться равенства $N_4 N_k = N_k N_4$. Поскольку $[n_4, n_6] = 1$, то согласно лемме 1.4.3 при $k = 6$ имеем $H_4^{-1} H_4^{n_6} = H_6^{-1} H_6^{n_4}$. Следовательно,

$$(1, 1, 1, 1, 1, \mu_5\mu_6^{-2}) = (1, 1, 1, \beta_4^{-2}\beta_2\beta_3\beta_5, 1, 1),$$

что равносильно равенству

$$(1, 1, 1, \beta_4^{-2}\beta_2\beta_3\beta_5, 1, \mu_6^2\mu_5^{-1}) = 1.$$

Поскольку неединичных элементов в полученном векторе максимум два, то все эти элементы обязаны равняться 1. Следовательно, $\mu_6^2 = \mu_5$. Аналогично, при $k = 1$ получаем $\mu_1^2 = \mu_3$.

Таким образом, $\mu_5 = \mu_6^2 = \mu_3^2 = \mu_1^4 = \mu_5^4$, то есть $\mu_5^3 = 1$.

В силу леммы 3.2.3 получаем, что $N_3^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, -\alpha_1\alpha_4, \alpha_4^2, \alpha_5^2, \alpha_6^2) = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_5^2, \\ \alpha_2^2 = \alpha_4^2 = 1, \\ -\alpha_1\alpha_4 = \alpha_6^2. \end{cases}$$

Поскольку $N_3N_k = N_kN_3$ для $k \in \{2,5,6\}$, то

$$\begin{cases} \alpha_2^2 &= \alpha_4, \\ \alpha_5^2 &= \alpha_4\alpha_6, \\ \alpha_6^2 &= \alpha_5. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_4 = 1$ и $\alpha_5 = \alpha_6^2 = -\alpha_1\alpha_4 = -\alpha_1$. Так как $\alpha_6^2 = \alpha_5$ и $\alpha_5^2 = \alpha_6$, то $\alpha_5^3 = \alpha_6^3 = 1$ и $\alpha_1^3 = (-\alpha_5)^3 = -1$. Далее,

$N_3N_4 = H_3(H_4)^{n_3}n_3n_4 = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)\cdot(\mu_1,\mu_2,\mu_3^{-1}\mu_1\mu_4,\mu_4,\mu_5,\mu_6)n_3n_4 = (\alpha_1\mu_1,\alpha_2\mu_2,\alpha_3\mu_3^{-1}\mu_1\mu_4,\alpha_4\mu_4,\alpha_5\mu_5,\alpha_6\mu_6)n_3n_4 = Hn_3n_4$.

Положим $s_3 = \alpha_3\mu_3^{-1}\mu_1\mu_4, s_i = \alpha_i\mu_i, i \neq 3$. Тогда применяя лемму 3.2.3, получаем

$$(N_3N_4)^3 = HH^{n_3n_4}H^{(n_3n_4)^2} = (s_1^3, s_2^3, s_1^2s_2^2s_5, s_1s_2s_5^2, s_5^3, s_6^3) = 1.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} s_1^3 &= s_5^3, \\ s_2^3 &= s_1s_2s_5^2 = 1, \\ s_6^3 &= s_1^2s_2^2s_5. \end{cases}$$

Так как $\alpha_5 = -\alpha_1$ и $\mu_5^3 = 1$, то

$$s_1^3 = s_5^3 \Leftrightarrow \alpha_1^3\mu_1^3 = \alpha_5^3\mu_5^3 \Leftrightarrow \mu_1^3 = -\mu_5^3 = -1.$$

Так как $\alpha_2^2 = \mu_2^2 = 1$, то

$$s_2^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_2^3\mu_2^3 = \alpha_2\mu_2 = s_2 = 1.$$

Так как $\alpha_6^3 = 1, \alpha_1^2\alpha_5 = \alpha_5^3 = 1$ и $\mu_1^2 = \mu_5^2$, то

$$s_6^3 = s_1^2s_2^2s_5 \Leftrightarrow \mu_6^3 = \alpha_1^2\mu_1^2\alpha_5\mu_5 = \mu_1^2\mu_5 = \mu_5^3 = 1.$$

Таким образом,

$$\mu_6^3 = 1, \qquad \mu_1^3 = -1.$$

Заметим, что диаграмма Дынкина корневой системы E_6 обладает симметрией, при которой

$$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_6, \quad \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_5, \quad \alpha_2, \alpha_4 \text{ остаются на месте.}$$

Следовательно, из равенства $(N_5N_4)^3 = 1$ мы получаем симметричные соотношения (которые также проверяются непосредственными вычислениями):

$$\mu_1^3 = 1, \qquad \mu_6^3 = -1.$$

Поскольку $p \neq 2$, то получаем противоречие с равенством $\mu_6^3 = 1$.

Доказательство теоремы 3.2.2.

Мы докажем теорему 3.2.2 для групп $E_6(q)$, а в конце раздела поясним как полученные результаты переносятся на группы ${}^2E_6(q)$. Доказательство теоремы 3.2.2 разделено на две части. В первой части мы рассматриваем максимальные торы, не имеющие дополнения в своем алгебраическом нормализаторе. В этих случаях мы также показываем, что соответствующий элемент группы Вейля W имеет прообраз в группе N того же порядка. Во второй части мы строим дополнения для остальных максимальных торов. В этих случаях очевидно, что поднятия элементов группы Вейля в дополнениях можно взять того же порядка.

Нерасщепляемые случаи.

Наша стратегия аналогична во всех случаях. Мы предполагаем, что q нечетно и T — максимальный тор, соответствующий классу сопряженности элемента w в W, где w — один из элементов из заключения теоремы 3.2.2. Предполагая, что существует дополнение K в N, в частности $K \simeq C_W(w)$, мы приходим к противоречию в каждом случае для универсальной группы $E_6(q)$. Далее, мы показываем, что такое же противоречие может быть получено для группы $E_6(q)$ присоединенного типа.

На протяжении этого раздела через $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ обозначается произвольный элемент тора T.

Тор 1. В этом случае $w = 1$ и $C_W(w) = W$. Было доказано [57, следствие], что соответствующий максимальный тор в алгебраической группе не имеет дополнения в $\overline{N}$. Следовательно, T также не имеет дополнения в N.

Торы 2, 3. В этих случаях $w = w_1$ или $w = w_1w_2$ соответственно. Заметим, что оба централизатора $C_W(w_1)$ и $C_W(w_1w_2)$ содержат подгруппу $\langle w_1, w_2, w_5, w_{29}\rangle$, что позволит нам прийти к противоречию.

Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 — прообразы элементов w_1, w_2, w_5, w_{29} в K соответственно. Тогда $N_1 = H_1n_1, N_2 = H_2n_2, N_3 = H_3n_5, N_4 = H_4n_{29}$, где

$$H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6), H_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), H_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6),$$

$H_4 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6)$ — элементы группы T.

Поскольку $K \simeq C_W(w)$, имеем $N_1^2 = 1$ и $N_1N_i = N_iN_1$ для $i = 2, 3, 4$. В силу леммы 3.2.3 получаем, что

$$N_1^2 = (H_1n_1)^2 = H_1H_1^{n_1}h_1 = (-\mu_3, \mu_2^2, \mu_3^2, \mu_4^2, \mu_5^2, \mu_6^2) = 1,$$

поэтому $1 = \mu_2^2 = \mu_4^2 = \mu_5^2 = \mu_6^2 = -\mu_3$. Если $j \in \{2, 5, 29\}$, то вычисления в MAGMA [53] показывают, что $[n_1, n_j] = 1$. Из леммы 1.4.3 следует, что $H_1^{-1}H_1^{n_j} = H_j^{-1}H_j^{n_1}$. В силу леммы 3.2.3 получаем, что

$$j = 2 \Rightarrow (1, \mu_2^{-2}\mu_4, 1, 1, 1, 1) = (\alpha_1^{-2}\alpha_3, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ so } \mu_4 = \mu_2^2 = 1.$$

$$j = 5 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, \mu_4\mu_5^{-2}\mu_6, 1) = (\beta_1^{-2}\beta_3, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ so } \mu_6 = \mu_5^2\mu_4^{-1} = 1.$$

$$j = 29 \Rightarrow (\mu_3^{-1}\mu_6, \mu_3^{-1}\mu_6, \mu_3^{-2}\mu_6^2, \mu_3^{-2}\mu_6^2, \mu_3^{-1}\mu_6, 1) = (\delta_1^{-2}\delta_3, 1, 1, 1, 1, 1),$$

поэтому $\mu_3 = \mu_6 = 1$. Противоречие с равенством $\mu_3 = -1$.

В присоединенной группе $E_6(q)$ элемент $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ является единицей тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_5 = \xi, \lambda_3 = \lambda_6 = \xi^2, \lambda_2 = \lambda_4 = 1$, где $\xi^3 = 1$. В частности, $\lambda_i^3 = 1$. Отметим, что $(-1)^3 = -1$. Следовательно, мы можем рассмотреть элементы $\widetilde{\lambda_i} = \lambda_i^3$, где $\lambda_i \in \{\mu_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i\}$ и $1 \leqslant i \leqslant 6$. Тогда мы получаем те же равенства и то же противоречие.

Найдем поднятия для элементов w_1 и w_1w_2. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{q+1} = -1$. Определим $H_1 = (\zeta, 1, -1, 1, 1, 1)$. Покажем, что $H_1n_1 \in N$ и $(H_1n_1)^2 = 1$. По лемме 3.2.3 имеем $H^{n_1} = (\lambda_1^{-1}\lambda_3, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$. Следовательно, $H_1^{\sigma n_1} = (-\zeta^{-q}, 1, -1, 1, 1, 1) = H_1,$, отсюда $H_1 \in T$. Используя MAGMA [53] получаем, что $(Hn_1)^2 = (-\lambda_3, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, \lambda_6^2)$.

Таким образом, $(H_1n_1)^2 = 1$ и H_1n_1 — требуемое поднятие для элемента w_1. Аналогичным образом определим $H_2 = (\zeta, \zeta, -1, -1, 1, 1)$. По лемме3.2.3 имеем

$$H^{n_1n_2} = (\lambda_1^{-1}\lambda_3, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6).$$

Следовательно, $H_1^{\sigma n_1 n_2} = (-\zeta^{-q}, -\zeta^{-q}, -1, -1, 1, 1) = H_2,$, отсюда $H_2 \in T$. Используя MAGMA [53] получаем, что

$$(Hn_1n_2)^2 = (-\lambda_3, -\lambda_4, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, \lambda_6^2).$$

Таким образом, $(H_1n_1n_2)^2 = 1$ и $H_1n_1n_2$ — требуемое поднятие для элемента w_1w_2.

Тор 5. В этом случае $w = w_2w_3w_5$ и

$$C_W(w) = \langle w \rangle \times \langle w_{24} \rangle \times \langle x, y, z \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4,$$

где $x = w_{17}w_{18}, y = w_{20}w_{21}, z = w_{16}w_{25},$ и

$$x^2 = y^2 = z^2 = (yz)^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = 1.$$

Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_{24}, n_2n_3n_5] = [n_{17}n_{18}, n_2n_3n_5] = [h_4h_6n_{20}n_{21}, n_2n_3n_5] = [n_{16}n_{25}, n_2n_3n_5] = 1$. Лемма 1.4.2 (ii) влечет, что w_{24}, x, y, z — образы n_{24}, $n_{17}n_{18}$, $h_4h_6n_{20}n_{21}, n_{16}n_{25}$ соответственно. Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 — прообразы элементов $w_2w_3w_5$, w_{24}, $w_{20}w_{21}$, $w_{16}w_{25}$ в K. Тогда

$$N_1 = H_1n_2n_3n_5, N_2 = H_2n_{24}, N_3 = H_3h_4h_6n_{20}n_{21}, N_4 = H_4n_{16}n_{25}, \text{где}$$

$$H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6), H_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), H_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6),$$

$H_4 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6)$. Поскольку $K \simeq C_W(w)$,имеем $N_2^2 = 1$. Лемма 3.2.3 влечет равенства

$$N_2^2 = H_2H_2^{n_{24}}h_2h_3h_5 = (\alpha_1^2, -\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4^{-1}\alpha_6, -\alpha_1\alpha_3^2\alpha_4^{-1}\alpha_6, \alpha_1^2\alpha_6^2, -\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_5^2\alpha_6, \alpha_6^2) = 1,$$

поэтому $\alpha_1^2 = \alpha_6^2 = 1, \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_5^2 = -\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_6^{-1}$.

Согласно лемме 1.4.3 равенство $N_2N_1 = N_1N_2$ равносильно $H_2^{-1}H_2^{n_2n_3n_5} = H_1^{-1}H_1^{n_{24}}$. По лемме 3.2.3 получаем, что

$$(1, \alpha_2^{-2}\alpha_4, \alpha_1\alpha_3^{-2}\alpha_4, 1, \alpha_4\alpha_5^{-2}\alpha_6, 1) = (1, \mu_1\mu_4^{-1}\mu_6, \mu_1\mu_4^{-1}\mu_6, \mu_1^2\mu_4^{-2}\mu_6^2, \mu_1\mu_4^{-1}\mu_6, 1).$$

Тогда $\mu_1\mu_4^{-1}\mu_6 = \alpha_2^{-2}\alpha_4 = \alpha_1\alpha_3^{-2}\alpha_4 = \alpha_4\alpha_5^{-2}\alpha_6$. Поскольку $\alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_5^2$, мы имеем $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_6 = 1$. Из равенства $\alpha_2^2 = -\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_6^{-1}$ заключаем, что $\alpha_2^2 = -\alpha_4$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_{24}, h_4h_6n_{20}n_{21}] = 1$. Таким образом, равенство $N_2N_3 = N_3N_2$ влечет $H_2^{-1}H_2^{n_{20}n_{21}} = H_3^{-1}H_3^{n_{24}}$. Тогда по лемме 3.2.3

$$(1, \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_6^{-1}, \alpha_1\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_6^{-1}, \alpha_1\alpha_6^{-2}, \alpha_1\alpha_6^{-2}, \alpha_1\alpha_6^{-2}) =$$
$$= (1, \gamma_1\gamma_4^{-1}\gamma_6, \gamma_1\gamma_4^{-1}\gamma_6, \gamma_1^2\gamma_4^{-2}\gamma_6^2, \gamma_1\gamma_4^{-1}\gamma_6, 1).$$

Так как $\alpha_1 = \alpha_6 = 1$, то $\alpha_2\alpha_3^{-1} = \gamma_1\gamma_4^{-1}\gamma_6$ и $1 = \gamma_1\gamma_4^{-1}\gamma_6$. Поэтому $\alpha_2 = \alpha_3$. Используя MAGMA получаем, что $[n_{24}, n_{16}n_{25}] = 1$. Следовательно, равенство $N_2N_4 = N_4N_2$ влечет $H_2^{-1}H_2^{n_{16}n_{25}} = H_4^{-1}H_4^{n_{24}}$. Далее, по лемме 3.2.3 имеем

$$(1, \alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_4\alpha_6^{-1}, \alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_4\alpha_6^{-1}, \alpha_1\alpha_6^{-2}, \alpha_1\alpha_6^{-2}, \alpha_1\alpha_6^{-2}) =$$
$$= (1, \delta_1\delta_4^{-1}\delta_6, \delta_1\delta_4^{-1}\delta_6, \delta_1^2\delta_4^{-2}\delta_6^2, \delta_1\delta_4^{-1}\delta_6, 1).$$

Поскольку $\alpha_1 = \alpha_6 = 1$, то $\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_4 = \delta_1\delta_4^{-1}\delta_6$ и $1 = \delta_1\delta_4^{-1}\delta_6$. Таким образом, $\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 = \alpha_2^2$; что противоречит равенству $\alpha_4 = -\alpha_2^2$.

Теперь найдем поднятие для элемента w. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{q+1} = -1$. Определим $H_1 = (1, \zeta, \zeta, -1, \zeta, 1)$. Мы хотим показать, что $H_1n_2n_3n_5 \in N$ и $(H_1n_2n_3n_5)^2 = 1$. В силу леммы 3.2.3 имеем $H^{n_2n_3n_5} = (\lambda_1, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6)$. Следовательно, $H_1^{\sigma n_2n_3n_5} = (1, -\zeta^{-q}, -\zeta^{-q} - 1, -\zeta^{-q}, 1) = H_1$ и $H_1 \in T$. Вычисления в MAGMA показывают, что $(Hn_2n_3n_5)^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_4, -\lambda_1\lambda_4, \lambda_4^2, -\lambda_4\lambda_6, \lambda_6^2)$.

Таким образом, $(H_1n_2n_3n_5)^2 = 1$ и $H_1n_2n_3n_5$ — требуемое поднятие для элемента $w_2w_3w_5$.

Тор 7. В этом случае $w = w_1w_3w_4$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_6, w_{19}w_{26}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times D_8$. Положим $n = n_1n_3n_4$. Пусть N_2, N_3 — прообразы элементов w_6, $w_{19}w_{26}$ в K соответственно. Тогда $N_2 = H_2n_6$, $N_3 = H_3n_{19}n_{26}$, где $H_2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$ и $H_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$. Поскольку $[n_1n_3n_4, n_6] = [n_1n_3n_4, n_{16}n_{26}] = 1$, то лемма 1.4.2 (ii) влечет $H_2, H_3 \in T$. Так как $w_6^2 = 1$, то $N_2^2 = 1$. В силу леммы 3.2.3 имеем

$$(Hn_6)^2 = (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, -\lambda_5).$$

Таким образом, получаем равенства $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = \mu_4^2 = 1$, $\mu_5 = -1$. В частности,

$\mu_i^q = \mu_i^{-1} = \mu_i$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$. Согласно лемме 3.2.3 получаем, что

$$H^n = (\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_5, \lambda_6).$$

Поскольку $H_2^{\sigma n} = H_2$, то $(\mu_2\mu_4\mu_5, \mu_2, \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5, \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5, \mu_5, \mu_6^q) = H_2$. Так как $\mu_5 = -1$, то получаем $\mu_2\mu_4 = -\mu_1$, $\mu_1\mu_2\mu_4 = -\mu_3$, $\mu_2\mu_3 = -1$. Из последнего равенства следует, что $\mu_2 = -\mu_3$. Таким образом, $\mu_1 = \mu_4$, $\mu_2 = -1$ и $\mu_3 = 1$. Следовательно, $H_2 = (\mu_1, -1, 1, \mu_1, -1, \mu_6)$.

Так как $(w_{19}w_{26})^2 = 1$, то $N_3^2 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $(n_{19}n_{26})^2 = h_1h_4$ и

$$(Hn_{19}n_{26})^2 = (-\lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_2\lambda_5^{-1}\lambda_6^2, \lambda_2^{-1}\lambda_3^2\lambda_5^{-1}\lambda_6^2, -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6^3, \lambda_2^{-1}\lambda_5\lambda_6^2, \lambda_6^2).$$

Таким образом, $\beta_4 = -\beta_1\beta_3\beta_6$, $\beta_2\beta_6^2 = \beta_5$ и $\beta_6^2 = 1$. Следовательно, $\beta_2 = \beta_5$.

Равенство $(w_6w_{19}w_{26})^4 = 1$ влечет $(N_2N_3)^4 = 1$. Заметим, что $N_2N_3 = H_2n_6H_3n_{19}n_{26} = H_2H_3^{n_6}n_6n_{19}n_{26}$. По лемме 3.2.3 имеем $H^{n_6} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5\lambda_6^{-1})$. Применяя последнее равенство к $H_2H_3^{n_6}$ получаем, что

$$H_2H_3^{n_6} = (\mu_1, -1, 1, \mu_1, -1, \mu_6)(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_2, \beta_2\beta_6^{-1}) =$$
$$= (\mu_1\beta_1, -\beta_2, \beta_3, \mu_1\beta_4, -\beta_2, \mu_6\beta_2\beta_6^{-1}).$$

Поскольку $(n_6n_{19}n_{26})^4 = h_1h_4$, то лемма 3.2.3 влечет равенство

$$(Hn_6n_{19}n_{26})^4 = (-\lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_3^2\lambda_4^{-2}\lambda_5, *).$$

Тогда $1 = (N_2N_3)^4 = (-\mu_1^2\beta_1^2(-\beta_2^{-1})\beta_3^2\mu_1^{-2}\beta_4^{-2}(-\beta_2), *)$. Таким образом, $-\beta_1^2\beta_3^2\beta_4^{-2} = 1$, что равносильно равенству $\beta_4^2 = -\beta_1^2\beta_3^2$. Ранее было показано, что $\beta_4 = -\beta_1\beta_3\beta_6$. Следовательно, $\beta_4^2 = \beta_1^2\beta_3^2\beta_6^2 = \beta_1^2\beta_3^2$; противоречие.

Теперь найдем поднятие для элемента w. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{2(q+1)} = -1$. Положим $H_1 = (-\zeta^{-q}, -1, \zeta^{-q^2-q}, \zeta, 1, 1)$. Мы утверждаем, что $H_1n \in N$ и $|H_1n| = 4$. Действительно, поскольку $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = \zeta^{(2q+2)((q^2+1)/2)} = -1$ и $-\zeta^{-q^3-q^2-q} = \zeta$, то $H_1^{\sigma n} = (-\zeta^{-q}, -1, \zeta^{-q^2-q}, -\zeta^{-q^3-q^2-q}, 1, 1) = H_1$. Следовательно, $H_1 \in T$. По лемме 3.2.3 получаем, что

$$(Hn)^4 = (-\lambda_2\lambda_5, \lambda_2^4, (\lambda_2\lambda_5)^2, -(\lambda_2\lambda_5)^3, \lambda_5^4, \lambda_6^4).$$

Таким образом, $(H_1n)^4 = 1$ и H_1n — требуемое поднятие для элемента w.

Тор 8. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_{36}$ и $C_W(w) \geqslant \langle w_1, w_4, w_6, w_{36}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_2$.

Положим $n = n_1n_4n_6n_3$. Используя MAGMA видим, что $[n, n_1] = [n, n_4] = [n, n_6] = [n, n_{36}] = 1$ и, следовательно, $n_1, n_4, n_6, n_{36} \in N$. Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 — прообразы элементов w_1, w_4, w_6, w_{36} в K соответственно. Тогда

$$N_1 = H_1n_1, N_2 = H_2n_4, N_3 = H_3n_6, N_4 = H_4n_{36}, \text{где}$$

$H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$, $H_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, $H_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$, $H_4 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$. Поскольку $K \simeq C_W(w)$, то имеют место равенства $N_3^2 = 1$ и $N_3N_i = N_iN_3$, где $i = 1, 2, 4$. Из леммы 3.2.3 следует, что

$$N_3^2 = H_3H_3^{n_6}h_6 = (\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2, \beta_5^2, -\beta_5) = 1.$$

Следовательно, $1 = \beta_1^2 = \beta_2^2 = \beta_3^2 = \beta_4^2 = -\beta_5$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_6, n_j] = 1$ для каждого $j \in \{1, 4, 36\}$, отсюда $H_3^{-1}H_3^{n_j} = H_j^{-1}H_j^{n_6}$. По лемме 3.2.3 имеем

$$j = 1 \Rightarrow (\beta_1^{-2}\beta_3, 1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, \mu_6^{-2}\mu_5),\ \text{отсюда}\ \beta_3 = \beta_1^2 = 1.$$

$$j = 4 \Rightarrow (1, 1, 1, \beta_2\beta_3\beta_4^{-2}\beta_5, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, \alpha_6^{-2}\alpha_5),\ \text{отсюда}\ \beta_4^2 = \beta_2\beta_3\beta_5.$$

$$j = 36 \Rightarrow (\beta_2^{-1}, \beta_2^{-2}, \beta_2^{-2}, \beta_2^{-3}, \beta_2^{-2}, \beta_2^{-1}) = (1, 1, 1, 1, 1, \gamma_6^{-2}\gamma_5),\ \text{отсюда}\ \beta_2 = 1.$$

Мы приходим к противоречию $1 = \beta_4^2 = \beta_2\beta_3\beta_5 = -1$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $(n_1n_4n_6n_{36})^4 = 1$. Таким образом, $n_1n_4n_6n_{36}$ — требуемое поднятие для элемента w.

Тор 11. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_3$ и $C_W(w) = \langle w, w_6, w_{36}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Положим $n = n_1n_4n_6n_3$. Пусть N_1, N_2, N_3 — прообразы элементов $w_1w_4w_6w_3, w_6, w_{36}$ в K соответственно. Тогда $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2n_6, N_3 = H_3n_{36}$, где

$$H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6), H_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6), H_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6).$$

Используя MAGMA видим, что $[n, n_6] = [n, n_{36}] = 1$ и, следовательно, $H_1, H_2, H_3 \in T$. Поскольку $K \simeq C_W(w)$, то имеют место равенства $N_2^2 = 1$ и $[N_3, N_1] = [N_3, N_2] = 1$.

Вычисления в предыдущем случае (тор 8) показали, что

$$N_2^2 = 1 \text{ влечет } 1 = \beta_1^2 = \beta_2^2 = \beta_3^2 = \beta_4^2 = -\beta_5,$$

и $N_3N_2 = N_2N_3$ влечет $\beta_2 = 1$. По лемме 1.4.3 получаем $H_2^{-1}H_2^n = H_1^{-1}H_1^{n_6}$. Из леммы 3.2.3 следует, что

$$(\beta_1^{-1}\beta_3^{-1}\beta_4, 1, \beta_1\beta_3^{-2}\beta_4, \beta_1\beta_2\beta_3^{-1}\beta_4^{-1}\beta_5, 1, \beta_5\beta_6^{-2}) = (1, 1, 1, 1, 1, \mu_6^{-2}\mu_5).$$

Следовательно, $\beta_1\beta_4 = \beta_3^2 = 1$ и $\beta_4 = \beta_1\beta_3$. Таким образом, $1 = \beta_1\beta_4 = \beta_1 \cdot \beta_1\beta_3 = \beta_3$ и $\beta_4 = \beta_1$. Более того, $1 = \beta_1\beta_2\beta_3^{-1}\beta_4^{-1}\beta_5 = \beta_1\beta_4^{-1}\beta_5 = \beta_5$; противоречие с равенством $\beta_5 = -1$.

Теперь найдем поднятие для элемента w. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$. Положим $H_1 = (\zeta, -1, \zeta^{q+1}, -\zeta^{-q^2}, 1, 1)$. Хотим показать, что $H_1n \in N$ и $|H_1n| = 4$. По лемме 3.2.3 получаем, что $H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_5, \lambda_5, \lambda_5\lambda_6^{-1})$. Следовательно,

$$H_1^{\sigma n} = (-\zeta^{-q^2-q-1}, -1, -\zeta^{-q^2-q}, -\zeta^{-q}, 1, 1)^q =$$
$$= (-\zeta^{-q^3-q^2-q}, -1, -\zeta^{-q^3-q^2}, -\zeta^{-q^2}, 1, 1) = H_1.$$

Таким образом, $H_1 \in T$. Вычисления в MAGMA показывают, что

$$(Hn)^4 = (-\lambda_2\lambda_5, \lambda_2^4, (\lambda_2\lambda_5)^2, -(\lambda_2\lambda_5)^3, \lambda_5^4, \lambda_5^2).$$

Тогда $(H_1n)^4 = 1$ и H_1n — требуемое поднятие для элемента w.

Тор 14. В этом случае $w = w_3w_2w_4w_{14}$ и $q \equiv -1 \pmod 4$. Отметим, что $w_6w_{15}w_{20} \in C_W(w)$.

Положим $n = n_3n_2n_4n_{14}$. Используя MAGMA видим, что $[n, h_6n_6n_{15}n_{20}] = 1$ и, следовательно, $h_6n_6n_{15}n_{20} \in N$. Пусть N_1 и N_2 — прообразы элементов w и $w_6w_{15}w_{20}$ в K соответственно. Тогда $N_1 = H_1n$ и $N_2 = H_2h_6n_6n_{15}n_{20}$, где $H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\, \mu_6)$, $H_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ — элементы тора T.

Согласно вычислениям в MAGMA имеем $(h_6n_6n_{15}n_{20})^4 = h_2h_3$. Из леммы 3.2.3 следует, что

$$(HN_2)^4 = (\lambda_1^4, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}, -\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}, \lambda_1^4\lambda_4^4\lambda_5^{-4}, \lambda_1^4, \lambda_1^2).$$

Следовательно, $-\alpha_5^2 = \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2$, $\alpha_1^2 = 1$. Поскольку $[w, d] = 1$, то $H_1^{-1}{H_1}^{N_2} = H_2^{-1}{H_2}^{N_1}$. По лемме 3.2.3 получаем, что

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_3^2\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6, \lambda_6),$$

$$H^{n_6n_{15}n_{20}} = (\lambda_1, \lambda_3\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_3\lambda_5^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_6^{-1}).$$

Тогда $(1, \mu_2^{-1}\mu_3\mu_6^{-1}, \mu_1\mu_5^{-1}, \mu_1\mu_2^{-1}\mu_3\mu_5^{-1}\mu_6^{-1}, \mu_1\mu_2^{-1}\mu_3\mu_5^{-1}\mu_6^{-1}, \mu_1\mu_6^{-2}) =$

$$= (1, \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5, \alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6, \alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6, \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_5^{-1}\alpha_6, 1).$$

С левой стороны равенства произведение второй и третьей координат равно четвертой, следовательно, $(\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5)(\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6) = \alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6$. Отсюда заключаем, что $\alpha_1\alpha_5 = \alpha_2\alpha_3$. Поскольку $-\alpha_5^2 = \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2$, то $\alpha_1 = -1$ и, следовательно, $\alpha_5 = -\alpha_2\alpha_3$. Более того, значения четвертой и пятой координат совпадают, поэтому $\alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6 = \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_5^{-1}\alpha_6$. Таким образом, $\alpha_2\alpha_3\alpha_5 = \alpha_4^2$ и, следовательно, $\alpha_5^2 = -\alpha_4^2$.

Так как элемент H_2 принадлежит тору, то $H_2^{\sigma n} = H_2$. Поэтому

$$(\alpha_1^q, (\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5)^q, (\alpha_1\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q, (\alpha_3^2\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q, (\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_6)^q, \alpha_6^q) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6).$$

Тогда $\alpha_2 = (\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5)^q$, $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q$ и $\alpha_4 = (\alpha_3^2\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q$. Возводя в квадрат обе части равенства для α_2 и учитывая, что $\alpha_4^2 = -\alpha_5^2$, получаем равенство $-\alpha_3^{2q} = \alpha_2^2$. Поскольку $\alpha_1 = -1$, то имеет место равенство $\alpha_4\alpha_3^{-1} = (\alpha_3^2\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q(-\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_6)^{-q} = -\alpha_3^q$ и, следовательно, $\alpha_4 = -\alpha_3^{q+1}$. Поэтому $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_6)^q = -\alpha_3^q\alpha_4^{-q}\alpha_6^q = -\alpha_3^q(-\alpha_3^{-q^2-q})\alpha_6$, отсюда $\alpha_6 = \alpha_3^{q^2+1}$. С другой стороны, имеем $\alpha_5 = (\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_6)^q$. Так как $\alpha_6^q = \alpha_6$ и $\alpha_5 = -\alpha_2\alpha_3$, то $\alpha_6 = -\alpha_2^{q+1}\alpha_3^{1-q}$. Из ранее полученного равенства $\alpha_2^2 = -\alpha_3^{2q}$ следует $\alpha_2^{q+1} = \alpha_3^{q^2+q}$. Таким образом, $\alpha_6 = -\alpha_3^{q^2+1}$; противоречие с равенством $\alpha_6 = \alpha_3^{q^2+1}$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $n^4 = 1$ и, следовательно, n — требуемое поднятие для элемента w в этом случае.

Тор 16. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_3w_{36}$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_6, w_{27}, w_{36}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathrm{S}_4$. Заметим, что $(w_6w_{27})^3 = (w_{36}w_{27})^3 = (w_6w_{36})^2 = 1$ и $w_1w_4w_6w_3 \in C_W(w)$.

Положим $n = n_1n_4n_6n_3n_{36}$. Используя MAGMA видим, что $[n, n_1n_4n_6n_3] = [n, n_{36}] = [n, n_6] = 1$. Пусть N_1, N_2, N_3 — прообразы элементов $w_1w_4w_6w_3, w_{36}, w_6$ в

K соответственно. Тогда $N_1 = H_1n_1n_4n_6n_3$, $N_2 = H_2n_{36}$, $N_3 = H_3n_6$, где

$$H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6), H_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), H_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$$

— элементы тора T. Поскольку $K \simeq C_W(w)$, то имеют место равенства $N_3^2 = 1$ и $[N_3, N_1] = [N_3, N_2] = 1$. Вычисления для тора 8 показали, что

$$N_3^2 = 1 \text{ влечет } 1 = \beta_1^2 = \beta_2^2 = \beta_3^2 = \beta_4^2 = -\beta_5,$$

и $N_3N_2 = N_2N_3$ влечет $\beta_2 = 1$. По лемме 1.4.3 равенство $N_3N_1 = N_1N_3$ равносильно $H_3^{-1}H_3^{n_1n_4n_6n_3} = H_1^{-1}H_1^{n_6}$. В силу леммы 3.2.3 из последнего равенства следует

$$(\beta_1^{-1}\beta_3^{-1}\beta_4, 1, \beta_1\beta_3^{-2}\beta_4, \beta_1\beta_2\beta_3^{-1}\beta_4^{-1}\beta_5, 1, \beta_5\beta_6^{-2}) = (1, 1, 1, 1, 1, \mu_6^{-2}\mu_5).$$

Следовательно, $\beta_1\beta_4 = \beta_3^2 = 1$ и $\beta_4 = \beta_1\beta_3$. Поэтому $1 = \beta_1\beta_4 = \beta_1 \cdot \beta_1\beta_3 = \beta_3$ и $\beta_4 = \beta_1$. Наконец, $1 = \beta_1\beta_2\beta_3^{-1}\beta_4^{-1}\beta_5 = \beta_1\beta_4^{-1}\beta_5 = \beta_5$; противоречие с равенством $\beta_5 = -1$.

Теперь мы найдем поднятие для элемента w. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$. Положим $H_1 = (\zeta, 1, \zeta^{q+1}, -\zeta^{-q^2}, -1, \zeta^{q^2+1})$. Мы хотим показать что $H_1n \in N$ и $|H_1n| = 4$. Лемма 3.2.3 влечет

$$H^n = (\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_5, \lambda_2^{-2}\lambda_5, \lambda_2^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}).$$

Поэтому $H_1^{\sigma n} = (-\zeta^{-q^2-q-1}, 1, -\zeta^{-q^2-q}, -\zeta^{-q}, -1, -\zeta^{-q^2-1})^q =$

$$= (-\zeta^{-q^3-q^2-q}, 1, -\zeta^{-q^3-q^2}, -\zeta^{-q^2}, 1, -\zeta^{-q^3-q}) = H_1.$$

Следовательно, $H_1 \in T$. По лемме 3.2.3 имеем $(Hn)^4 = (-\lambda_2^{-1}\lambda_5, 1, \lambda_2^{-2}\lambda_5^2, -\lambda_2^{-3}\lambda_5^3, \lambda_2^{-4}\lambda_5^4, \lambda_2^{-2}\lambda_5^2)$. Таким образом, $(H_1n)^4 = 1$ и H_1n — требуемое поднятие для элемента w.

Расщепляемые случаи.

В этом разделе мы найдем все максимальные группы $E_6(q)$ которые имеют дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. На протяжении всего раздела мы предполагаем, что T — это максимальный тор, соответствующий классу сопряженности элемента w в группе W. Мы выбираем w как в таблице 3.1. Если $w = w_{i_1}w_{i_2}\dots w_{i_k}$, где w_{i_j} — фундаментальные отражения, то мы определяем $n = n_{i_1}n_{i_2}\dots n_{i_k}$. Отметим, что n является поднятием элемента w в группе N.

Тор 4. В этом случае $w = w_3w_1$ и $C_W(w) = \langle w, w_5, w_6, w_2, w_{36}, v\rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times ((\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3) : \mathbb{Z}_2)$, где $v = w_1w_4w_{14}w_{29}$, $w_5^v = w_2$, $w_6^v = w_{36}$ и $\langle w_5, w_6\rangle \simeq \langle w_2, w_{36}\rangle \simeq \mathrm{S}_3$. Используя MAGMA видим, что $[n, n_1n_4n_{14}n_{29}] = [n, n_5] = [n, n_6] = [n, n_2] = [n, n_{36}] = 1$, отсюда $n_1n_4n_{14}n_{29}, n_5, n_6, n_2, n_{36} \in N$. Положим

$$N_1 = n_1n_3, N_2 = h_{36}n_2, N_3 = h_2n_{36}, N_4 = n_1n_4n_{14}n_{29}, N_5 = h_5h_6n_5, N_6 = h_5n_6.$$

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$ — дополнение для тора T. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_1^{-1}\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6).$$

Тогда $h_{36}^{\sigma n} = (-1, 1, 1, -1, 1, -1)^{\sigma n} = h_{36}^{\sigma} = h_{36}$. Аналогично $h_2^{\sigma n} = h_2$, $h_5^{\sigma n} = h_5$, $h_6^{\sigma n} = h_6$. Поэтому элементы h_{36}, h_2, h_5 и h_6 принадлежат тору T. Вычисления в MAGMA показывают, что

$$N_2^2 = N_3^2 = N_5^2 = N_6^2 = 1, \quad (N_2N_3)^3 = 1, (N_5N_6)^3 = 1,$$

то есть $\langle N_5, N_6\rangle \simeq \langle N_2, N_3\rangle \simeq \mathrm{S}_3$. Далее, используя MAGMA получаем, что

$$N_1^3 = 1, \quad N_4^2 = 1, \quad N_1^{N_2} = N_1^{N_3} = N_1^{N_4} = N_1^{N_5} = N_1^{N_6} = N_1.$$

Следовательно, $K = \langle N_1\rangle \times \langle N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$. Наконец, вычисления в MAGMA показывают, что $N_5^{N_4} = N_2, N_6^{N_4} = N_3$ и $K \simeq \mathbb{Z}_3 \times ((\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3) : \mathbb{Z}_2) \simeq C_W(w)$, как и утверждалось.

Тор 6. В этом случае $w = w_1w_3w_5$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_2, w_{36}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. Используя MAGMA видим, что $[n, n_2] = [n, n_{36}] = 1$. Следовательно, $n_2, n_{36} \in N$. Пусть ζ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $|\zeta| = 2(q + 1)$. Ясно, что $\zeta^{(q+1)} = -1$. Определим $H_1 = (1, 1, 1, 1, -\zeta, -1)$, $N_1 = H_1n$, $N_2 = h_{36}n_2$ и $N_3 = h_2n_{36}$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3\rangle$ — дополнение для тора T в N. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6).$$

Используя полученное равенство, видно, что $h_2^n = h_2$, $h_{36}^n = h_{36}$ и, следовательно, $h_2, h_{36} \in T$. Далее, мы имеем $H_1^n = (1,1,1,1,\zeta^{-1},-1)$. Поэтому $H_1^{\sigma n} = (1,1,1,1,\zeta^{-q},-1)$. Поскольку $\zeta^q = -\zeta^{-1}$, мы заключаем, что $H_1^{\sigma n} = (1,1,1,1,-\zeta,-1) = H_1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $(N_2)^2 = 1$, $(N_3)^2 = 1$ и $(N_2N_3)^3 = 1$. Остается проверить, что $N_1^6 = 1$ и $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = 1$. Применяя MAGMA получаем, что $n^6 = h_5$, и лемма 3.2.3 влечет равенство $(Hn)^6 = (\lambda_4^2, \lambda_2^6, \lambda_4^4, \lambda_4^6, -\lambda_4^3\lambda_6^3, \lambda_6^6)$. Следовательно, $N_1^6 = 1$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^{n_2} = (\lambda_1, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), H^{n_{36}} = (\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-2}\lambda_3, \lambda_2^{-3}\lambda_4, \lambda_2^{-2}\lambda_5, \lambda_2^{-1}\lambda_6).$$

Таким образом, $H_1^{-1}H_1^{n_2} = (1,1,1,1,1,1) = h_{36}^{-1}h_{36}^n$ и $H_1^{-1}H_1^{n_{36}} = (1,1,1,1,1,1) = h_2^{-1}h_2^n$. Поэтому $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = 1$ по лемме 1.4.3. Следовательно, $\langle N_1, N_2, N_3\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$, как и утверждалось.

Тор 9. В этом случае $w = w_1w_2w_3w_5$ и $C_W(w_1w_2w_3w_5) = \langle w_1w_3\rangle \times \langle w_2, w_5, v\rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times D_8$, где $v = w_1w_4w_{14}w_{29}, w_2^v = w_5$ и $D_8 = (w_2 \times w_5) \rtimes v$.

Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени (q^2-1) и $\lambda = \xi^{\frac{q-1}{2}}$. Заметим, что $\lambda^{q+1} = \xi^{(q^2-1)/2} = -1$. Положим $N_1 = n_1n_3, N_2 = H_2n_2, N_3 = H_3n_5, N_4 = h_1h_4n_1n_4n_{14}n_{29}$, где $H_2 = (-1,\lambda,1,-1,1,-1), H_3 = (1,1,1,1,\lambda^{-1},-1)$.

Используя MAGMA видим, что $[n, n_1n_3] = [n, n_2] = [n, n_5] = [n, N_4] = 1$, отсюда N_1, n_2, n_5, N_4 принадлежат группе N. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6).$$

Поскольку $\lambda^{q+1} = -1$, то $H_2^{\sigma n} = (-1,-\lambda^{-1},1,-1,1,-1)^\sigma = H_2$ и $H_3^{\sigma n} = (1,1,1,1,-\lambda,-1)^\sigma = H_3$, Поэтому H_2 и H_3 лежат в торе T. Хотим показать, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4\rangle$ будет дополнением для тора T.

Вычисления в MAGMA показывают, что $N_1^3 = [N_1, N_4] = 1$. Покажем, что $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = 1$. Поскольку $[n_1n_3, n_2] = [n_1n_3, n_5] = 1$, то достаточно проверить равенства $H_2^{-1}H_2^{N_1} = H_3^{-1}H_3^{N_1} = 1$. По лемме 3.2.3 получаем, что $H^{N_1} = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$. Следовательно, $H_2^{N_1} = H_2$ и $H_3^{N_1} = H_3$, как утверждалось.

Теперь покажем, что $\langle N_2, N_3, N_4\rangle \simeq D_8$. Используя MAGMA видим, что $N_4^2 = 1$. Согласно лемме 3.2.3 имеем $(Hn_2)^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_4, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, \lambda_6^2)$ и $(Hn_5)^2 =$

$(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, -\lambda_4\lambda_6, \lambda_6^2)$. Поэтому $N_2^2 = N_3^2 = 1$. Остается проверить равенство $N_2N_4 = N_4N_3$. Отметим, что $N_2N_4 = H_2n_2N_4$. С другой стороны, $N_4N_3 = H_3^{N^4}N_4n_5$. По лемме 3.2.3 получаем, что

$$H^{N_4} = (\lambda_1^{-1}\lambda_6, \lambda_5^{-1}\lambda_6^2, \lambda_3^{-1}\lambda_6^2, \lambda_3^{-1}\lambda_6^3, \lambda_2^{-1}\lambda_6^2, \lambda_6).$$

Поэтому $H_3^{N_4} = (1, -\lambda, 1, -1, 1, -1) = H_2$. Используя MAGMA видим, что $n_2N_4 = N_4n_5$ и, следовательно, $N_2N_4 = N_4N_3$. Таким образом, $K \simeq \langle N_1 \rangle \times \langle N_2, N_3, N_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times D_8 \simeq C_W(w)$.

Тор 10. В этом случае $w = w_1w_5w_3w_6$ и $C_W(w) = \langle w, w_2, w_{36}, u, v \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3$, где $u = w_2w_{26}w_{28}w_{34}, v = w_2w_{24}w_{32}w_{33}$ и $\langle w_2, w_{36} \rangle \simeq \langle u, v \rangle \simeq \mathrm{S}_3$. Положим

$$N_1 = n, N_2 = h_{36}n_2, N_3 = h_2n_{36}, N_4 = h_1h_6n_2n_{26}n_{28}n_{34}, N_5 = h_1h_3h_6n_2n_{24}n_{32}n_{33}.$$

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 \rangle$ является дополнением. Используя MAGMA видим, что $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = [N_1, N_4] = [N_1, N_5] = 1$ и $N_1^3 = 1$. Поэтому N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 лежат в группе N и $K = \langle N_1 \rangle \times \langle N_2, N_3, N_4, N_5 \rangle$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $N_2^2 = N_3^2 = N_4^2 = N_5^2 = 1, (N_2N_3)^3 = 1$ и $(N_4N_5)^3 = 1$. Отсюда получаем, что $\langle N_2, N_3 \rangle \simeq \langle N_4, N_5 \rangle \simeq \mathrm{S}_3$. Наконец, имеем равенства $[N_2, N_4] = [N_2, N_5] = [N_3, N_4] = [N_3, N_5] = 1$. Таким образом, $K \simeq C_W(w)$, как и утверждалось.

Тор 12. В этом случае $w = w_1w_4w_3w_2$ и $C_W(w) = \langle w, w_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$. Положим

$$N_1 = n_1n_4n_3n_2, N_2 = h_2h_5n_6.$$

Используя MAGMA видим, что $[N_1, N_2] = 1$, и поэтому N_2 принадлежит группе N. Более того, имеем $N_1^5 = N_2^2 = 1$, и группа $K = \langle N_1, N_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ является дополнением для тора T.

Тор 13. В этом случае $w = w_3w_2w_5w_4$ и $C_W(w) = \langle w, w_{17}w_{18}, w_{20}w_{21} \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. Пусть $N_1 = n_3n_2n_5n_4$, $N_2 = h_3h_5n_{17}n_{18}$, $N_3 = h_4h_6n_{20}n_{21}$.

Используя MAGMA видим, что $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = 1$. Поэтому N_2 и N_3 лежат в группе N. Более того, имеем $N_1^6 = 1, N_2^2 = N_3^2 = (N_2N_3)^3 = 1$. Таким образом, группа $K = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$ является дополнением для тора T.

Тор 14. В этом случае $w = w_3w_2w_4w_{14}$, $q \equiv 1 \pmod 4$ и $C_W(w) \simeq \mathrm{SL}_2(3) : \mathbb{Z}_4$. Более того, имеем $C_W(w) = \langle d, y, c\rangle$, где $d = w_6w_{15}w_{20}$, $y = w_4w_{11}w_{28}$ и $c = w_1w_2w_4w_6w_{31}w_{32}$. Отметим, что

$$d^4 = y^4 = c^3 = 1, yd = dy \text{ и } d^3y^2c = c^2y.$$

Вычисления в GAP показывают, что данные соотношения задают группу $C_W(w)$ как абстрактную группу, порожденную тремя элементами. Определим $n = n_3n_2n_4n_{14}$, $D = h_6n_6n_{15}n_{20}$, $Y = h_4n_4n_{11}n_{28}$ и $C = h_1h_6n_1n_2n_4n_6n_{31}n_{32}$.

Используя MAGMA видим, что $[n, D] = [n, Y] = [n, C] = 1$ и, следовательно, D, Y, C — элементы группы N. Пусть α — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$ и $H_1 = (-1, -1, \alpha, 1, \alpha, -1)$, $H_2 = (-1, \alpha, 1, -1, -\alpha, 1)$. Положим $N_1 = H_1D$ и $N_2 = H_2Y$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, C\rangle$ является дополнением для тора T в N. Достаточно проверить, что H_1 и H_2 принадлежат тору T, и выполняются равенства $N_1^4 = N_2^4 = C^3 = 1$, $N_1N_2 = N_2N_1$ и $N_1^3N_2^2C = C^2N_2$.

По лемме 3.2.3 получаем, что $H^n = (\lambda_1, \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_3^2\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6, \lambda_6)$.

Применяя к H_1 и H_2, видим, что $H_1^n = H_1$ и $H_2^n = H_2$. Поскольку $q \equiv 1 \pmod 4$, то $\alpha^q = \alpha$ и, следовательно, $H_1^{\sigma n} = H_1$, $H_2^{\sigma n} = H_2$. Таким образом, H_1 и H_2 лежат в T. Так как $D^4 = Y^4 = h_2h_3$, то лемма 3.2.3 влечет

$$(HD)^4 = (\lambda_1^4, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}, -\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}, \lambda_1^4\lambda_4^4\lambda_5^{-4}, \lambda_1^4, \lambda_1^2) \text{ и}$$

$$(HY)^4 = (\lambda_1^4, -\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3^{-2}\lambda_5^2\lambda_6^{-2}, -\lambda_1^3\lambda_2^{-2}\lambda_3^2\lambda_5^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1^4\lambda_5^4\lambda_6^{-4}, \lambda_1^2\lambda_5^4\lambda_6^{-4}, \lambda_1^2).$$

Из равенств видно, что $N_1^4 = N_2^4 = 1$. Используя MAGMA получаем, что $C^3 = 1$.

Из леммы 1.4.3 следует, что равенство $N_1N_2 = N_2N_1$ равносильно $H_1^{-1}H_1^Y = H_2^{-1}H_2^D[D, Y]$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^{-1}H^D = (1, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_5^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_6^{-2}) \text{ и}$$

$$H^{-1}H^Y = (1, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-2}\lambda_5\lambda_6^{-2}, \lambda_1\lambda_6^{-2}, \lambda_1\lambda_6^{-2}).$$

Таким образом, $H_1^{-1}H_1^Y = (1, \alpha, \alpha, -1, -1, -1)$ и $H_2^{-1}H_2^D = (1, -\alpha, -\alpha, -1, -1, -1)$. Поскольку $[D, Y] = h_2h_3$, мы заключаем, что $N_1N_2 = N_2N_1$.

Остается проверить равенство $N_1^3N_2^2C = C^2N_2$. Заметим, что $N_1^3N_2^2C = (H_1D)^3(H_2Y)^2C = H_1H_1^DH_1^{D^2}(H_2H_2^Y)^{D^3}D^3Y^2C$. В силу леммы 3.2.3 имеем

$$(HD)^3 = (\lambda_1^3, \lambda_2\lambda_3^2\lambda_5^{-1}, \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}\lambda_6, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^3\lambda_5^{-3}\lambda_6, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6, \lambda_1\lambda_6)D^3,$$

$$(HY)^2 = (\lambda_1^2, \lambda_1\lambda_2^2\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_3^2\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5\lambda_6^{-2}, \lambda_1\lambda_5^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1)Y^2,$$

$$H^{D^3} = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_5^{-1}, \lambda_1\lambda_2\lambda_6^{-1}, \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}, \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_6^{-1}).$$

Поэтому $H_1H_1^DH_1^{D^2} = (-1, -\alpha, 1, -1, \alpha, 1)$ и $H_2H_2^Y = (1, \alpha, -\alpha, -1, 1, -1)$. Наконец, $(H_2H_2^Y)^{D^3} = (1, \alpha, -\alpha, -1, 1, -1)$. Тогда $N_1^3N_2^2C = (-1, 1, -\alpha, 1, \alpha, -1)D^3Y^2C$. С другой стороны, мы имеем $C^2N_2 = H_2^{C^2}C^2Y$. По лемме 3.2.3 получаем, что

$$H^{C^2} = (\lambda_1^{-1}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_5^{-1}\lambda_6^2, \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6^2, \lambda_1^{-2}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_1^{-1}).$$

Таким образом, $C^2N_2 = (-1, 1, -\alpha, 1, \alpha, -1)C^2Y$. Вычисления в MAGMA показывают, что $D^3Y^2C = C^2Y$ и, следовательно, $N_1^3N_2^2C = C^2N_2$. Получаем, что K является дополнением для тора T.

Тор 15. В этом случае $w = w_1w_5w_3w_6w_2$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_{24}w_{32}w_{33}, w_{26}w_{28}w_{34}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. Пусть ξ, ζ — элементы поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такие, что $|\xi| = 2(q^3-1)$ и $|\zeta| = 2(q+1)$. Отметим, что $\xi^{q^3-1} = -1$, $\zeta^{q+1} = -1$. Положим

$$H_1 = (-1, \zeta, 1, -1, -\xi^{q-1}, -\xi^{q^2-1}),$$

$$H_2 = (\xi^{q^2+q}, \xi^{q^2+q+1}, -\xi^{2q^2+q+1}, -\xi^{2(q^2+q+1)}, \xi^{(q+1)^2}, \xi^{q^2+q}),$$

$$H_3 = (\xi^{q+1}, \xi^{q^2+q+1}, \xi^{(q+1)^2}, -\xi^{2(q^2+q+1)}, \xi^{(q+1)^2}, \xi^{q^2+q}).$$

Для удобства записи будем обозначать $n_{24}n_{32}n_{33}$ через u, а $n_{26}n_{28}n_{34}$ через v. Определим $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2h_1h_3h_6u$ и $N_3 = H_3h_1h_6v$.Хотим показать, что $K = \langle N_1, N_2, N_3\rangle$ будет дополнением для тора T в N. Используя MAGMA видим, что $[h_1h_3h_6u, n] = [h_1h_6v, n] = 1$, поэтому $h_1h_3h_6u$, h_1h_6v лежат в N согласно лемме 1.4.2. Убедимся, что элементы H_1, H_2 и H_3 лежат в торе T. Согласно лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4\lambda_6^{-1}, \lambda_5\lambda_6^{-1}).$$

Полагая $H = H_1$, получаем $H_1^n = (-1, -\zeta^{-1}, 1, -1, \xi^{1-q^2}, \xi^{q-q^2})$. Отсюда $H_1^{\sigma n} = (-1, -\zeta^{-q}, 1, -1, \xi^{q-q^3}, \xi^{q^2-q^3})$. Заметим, что $\zeta^{-q} = -\zeta$ и $\xi^{q^3} = -\xi$. Поэтому $H_1^{\sigma n} = (-1, \zeta, 1, -1, -\xi^{q-1}, -\xi^{q^2-1}) = H_1$. Далее,

$$H_2^n = (\xi^{q+1}, -\xi^{q^2+q+1}, \xi^{q^2+2q+1}, -\xi^{2(q^2+q+1)}, -\xi^{q^2+q+2}, \xi^{q+1}).$$

Поэтому $H_2^{\sigma n} = (\xi^{q^2+q}, -\xi^{q^3+q^2+q}, \xi^{q^3+2q^2+q}, -\xi^{2(q^3+q^2+q)}, -\xi^{q^3+q^2+2q}, \xi^{q^2+q})$. Поскольку $\xi^{q^3} = -\xi$, то $H_2^{\sigma n} = (\xi^{q^2+q}, \xi^{1+q^2+q}, -\xi^{1+2q^2+q}, -\xi^{2(1+q^2+q)}, \xi^{1+q^2+2q}, \xi^{q^2+q}) = H_2$. Наконец, $H_3^n = (-\xi^{q^2+1}, -\xi^{q^2+q+1}, -\xi^{q^2+q+2}, -\xi^{2(q^2+q+1)}, -\xi^{q^2+q+2}, \xi^{q+1})$, поэтому $H_3^{\sigma n} = (-\xi^{q^3+q}, -\xi^{q^3+q^2+q}, -\xi^{q^3+q^2+2q}, -\xi^{2(q^3+q^2+q)}, -\xi^{q^3+q^2+2q}, \xi^{q^2+q})$. Поскольку $\xi^{q^3} = -\xi$ и $\xi^{2q^3} = \xi^2$, то $H_3^{\sigma n} = (\xi^{1+q}, \xi^{1+q^2+q}, \xi^{1+q^2+2q}, -\xi^{2(1+q^2+q)}, \xi^{1+q^2+2q}, \xi^{q^2+q}) = H_3$. Поскольку $n^6 = h_2$, лемма 3.2.3 влечет $(H_1 n)^6 = (\lambda_4^2, -\lambda_4^3, \lambda_4^4, \lambda_4^6, \lambda_4^4, \lambda_4^2)$ и $|N_1| = 6$.

Теперь докажем, что N_2 и N_3 являются инволюциями. По лемме 3.2.3 имеем $(Hu)^2 = (\lambda_1\lambda_6^{-1}, -\lambda_2^2\lambda_4^{-1}, \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}, 1, \lambda_1^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_1^{-1}\lambda_6)$. Полагая $H = H_2h_1h_3h_6$, мы видим, что $N_2^2 = 1$. Аналогично получаем

$$(Hv)^2 = (\lambda_1\lambda_5^{-1}\lambda_6, -\lambda_2^2\lambda_4^{-1}, \lambda_3\lambda_5^{-1}, 1, \lambda_3^{-1}\lambda_5, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_6).$$

Применяя полученное равенство к $H_3h_1h_6$, получаем $N_3^2 = 1$.

Теперь покажем, что N_1 коммутирует с элементами N_2 и N_3. В силу леммы 1.4.3 это эквивалентно соотношениям о $H_1^{-1}H_1^{N_2} = H_2^{-1}H_2^{N_1}$ и $H_1^{-1}H_1^{N_3} = H_3^{-1}H_3^{N_1}$. Используя равенства для H_2^n и H_3^n, получаем

$$H_2^{-1}H_2^{N_1} = (\xi^{1-q^2}, -1, -\xi^{q-q^2}, 1, -\xi^{1-q}, \xi^{1-q^2}) = H_1^{-1}H_1^{N_2},$$

$$H_3^{-1}H_3^{N_1} = (-\xi^{q^2-q}, -1, -\xi^{1-q}, 1, -\xi^{1-q}, \xi^{1-q^2}) = H_1^{-1}H_1^{N_3},$$

что и требовалось.

Остается проверить равенство $(N_2N_3)^3 = 1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N_2N_3 = H_2h_1h_3h_6uH_3h_1h_6v = H_2h_1h_3h_6(H_3h_1h_6)^u uv = \\ = (*, \xi^{q^2+q+1}, *, -\xi^{2(q^2+q+1)}, *, *)(*, -\xi^{-(q^2+q+1)}, *, -\xi^{-2(q^2+q+1)}, *, *)uv = \\ = (*, -1, *, 1, *, *)uv \end{aligned}$$

По лемме 3.2.3 имеем $(Huv)^3 = (\lambda_4, -\lambda_2^3, \lambda_4^2, \lambda_4^3, \lambda_4^2, \lambda_4)$. Таким образом, $(N_2N_3)^3 = 1$ и K является дополнением.

Тор 17. В этом случае $w = w_1w_4w_5w_3w_{36}$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \simeq \mathbb{Z}_{10}$. Пусть ξ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $|\xi| = (q+1)(q^5-1)$. Положим $\zeta = \xi^{(q-1)/2}$. Заметим, что $\xi^{q(q^5-1)}\xi^{(q^5-1)} = 1$ и, следовательно, $\zeta^{q^6-q} = \zeta^{1-q^5}$. Определим

$$H_1 = (\zeta^{q^6+q^3-q}, \zeta^{-q^5+1}, \zeta^{-q^5+q^4+q^3+1}, \zeta^{-q^5+q^4+q^3+q^2+1}, \zeta^{q^4+q^3+q^2+1}, \zeta^{q^4+q^3+q^2+q+1}).$$

Покажем, что $H_1 \in T$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-2}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-1}\lambda_6).$$

Полагая $H = H_1$, получаем, что

$$H_1^n = (\zeta^{q^5+q^2-1}, \zeta^{q^5-1}, \zeta^{q^5+q^3+q^2-1}, \zeta^{q^5+q^3+q^2+q-1}, \zeta^{q^5+q^4+q^3+q^2+q-1}, \zeta^{q^5+q^4+q^3+q^2+q}).$$

Поэтому

$$H_1^{\sigma n} = (\zeta^{q^6+q^3-q}, \zeta^{q^6-q}, \zeta^{q^6+q^4+q^3-q}, \zeta^{q^6+q^4+q^3+q^2-q}, \zeta^{q^6+q^5+q^4+q^3+q^2-q}, \zeta^{q^6+q^5+q^4+q^3+q^2}) =$$
$$= (\zeta^{q^6+q^3-q}, \zeta^{1-q^5}, \zeta^{-q^5+q^4+q^3+1}, \zeta^{-q^5+q^4+q^3+q^2+1}, \zeta^{q^4+q^3+q^2+1}, \zeta^{q^4+q^3+q^2+q+1}) = H_1.$$

Таким образом, H_1 принадлежит тору T.

Используя MAGMA видим, что $n^{10} = h_1h_4h_6$, и по лемме 3.2.3 получаем $(Hn)^{10} = (-\lambda_2^{-1}\lambda_6^2, 1, \lambda_2^{-2}\lambda_6^4, -\lambda_2^{-3}\lambda_6^6, \lambda_2^{-4}\lambda_6^8, -\lambda_2^{-5}\lambda_6^{10})$.

Полагая $H = H_1$, получаем, что

$$\lambda_2^{-1}\lambda_6^2 = \zeta^{q^5-1}\zeta^{2q^4+2q^3+2q^2+2q+2} = \zeta^{q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1} =$$
$$= \zeta^{(q+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} = \xi^{(q^5-1)(q+1)/2} = -1.$$

Следовательно, $(H_1n)^{10} = 1$ и $\langle H_1n\rangle$ — дополнение для тора T в N.

Тор 18. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_3w_5$ и $C_W(w) = \langle w, w_{36}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$. Пусть ξ и ζ — элементы поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такие, что $\xi^{q+1} = -1$ и $\zeta^{q-1} = -1$. Определим $H_1 = (\xi, -1, -1, \xi^{-1}, -1, \xi)$ и $H_2 = (\zeta, -\zeta^2, -\zeta^2, \zeta^3, -\zeta^2, \zeta)$. Покажем, что $H_1, H_2 \in T$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_4\lambda_5^{-1}).$$

Следовательно, $H_1^{\sigma n} = (-\xi^{-q}, (-1)^q, (-1)^q, (-\xi)^q, (-1)^q, (-\xi)^{-q})$. Поскольку $\xi^{q+1} = -1$, то $-\xi^{-q} = \xi$ и $(-\xi)^q = \xi^{-1}$. Поэтому $H_1^{\sigma n} = H_1$ и $H_1 \in T$. Теперь $H_2^{\sigma n} = (-\zeta^q, -\zeta^{2q}, -\zeta^{2q}, -\zeta^{3q}, -\zeta^{2q}, -\zeta^q)$. Так как $\zeta^q = -\zeta$, то

$$H_2^{\sigma n} = (\zeta, -\zeta^2, -\zeta^2, \zeta^3, -\zeta^2, \zeta) = H_2.$$

Положим $N_1 = H_1 n_1 n_4 n_6 n_3 n_5$ и $N_2 = H_2 n_{36}$. Мы хотим доказать, что $K = \langle N_1, N_2 \rangle$ будет дополнением для T в N. Достаточно показать, что $|N_1| = 6$, $|N_2| = 2$ и $[N_1, N_2] = 1$. Используя MAGMA видим, что $n^6 = h_1 h_4 h_6$, и в силу леммы 3.2.3 получаем $(Hn)^6 = (-\lambda_2^3, \lambda_2^6, \lambda_2^6, -\lambda_2^9, \lambda_2^6, -\lambda_2^3)$. Таким образом, $N_1^6 = (H_1 n)^6 = 1$. Аналогично имеем $(Hn_{36})^2 = (-\lambda_1^2\lambda_2^{-1}, 1, \lambda_2^{-2}\lambda_3^2, -\lambda_2^{-3}\lambda_4^2, \lambda_2^{-2}\lambda_5^2, -\lambda_2^{-1}\lambda_6^2)$, so $(H_2 n_{36})^2 = 1$. Отметим, что $[n, n_{36}] = 1$, поэтому согласно лемме 1.4.3 остается доказать равенство $H_2^{-1} H_2^n = H_1^{-1} H_1^{n_{36}}$. Применяя выражения для H^n и $H^{n_{36}}$, мы получаем, что

$$H_1^{-1} H_1^{n_{36}} = (\xi^{-1}, -1, -1, \xi, -1, \xi^{-1})(-\xi, -1, -1, -\xi^{-1}, -1, -\xi) = (-1, 1, 1, -1, 1, -1)$$

и $H_2^{-1} H_2^n = (\zeta^{-1}, -\zeta^{-2}, -\zeta^{-2}, \zeta^{-3}, -\zeta^{-2}, \zeta^{-1})(-\zeta, -\zeta^2, -\zeta^2, -\zeta^3, -\zeta^2, -\zeta) =$

$$= (-1, 1, 1, -1, 1, -1).$$

Таким образом, $[N_1, N_2] = 1$ и $\langle N_1, N_2 \rangle$ — дополнение для тора T.

Торы 19, 23, 24. В этих случаях группа $C_W(w)$ является циклической, порожденной элементом w. В зависимости от номера тора мы имеем $w = w_2 w_5 w_3 w_4 w_6$, $w_1 w_4 w_6 w_3 w_2 w_5$, или $w_1 w_4 w_{14} w_3 w_2 w_6$. Определим $N_1 = n_2 n_5 n_3 n_4 n_6$, $n_1 n_4 n_6 n_3 n_2 n_5$, или $n_1 n_4 n_{14} n_3 n_2 n_6$ соответственно. Вычисления в MAGMA показывают, что во всех случаях $|N_1| = |w|$, поэтому $\langle N_1 \rangle$ — требуемое дополнение.

Тор 20. В этом случае $w = w_{20} w_5 w_4 w_3 w_2$ и $C_W(w) = \langle w \rangle \simeq \mathbb{Z}_{12}$. Положим $n = n_{20} n_5 n_4 n_3 n_2$. Пусть ξ — элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $|\xi| = |T| = (q-1)(q^2+1)(q^3+1)$ и $\zeta = \xi^{(q-1)/2}$. Определим $H_1 = (-1, -\zeta^q, -\zeta^{-q^4}, -\zeta^{-q^4-q^3}, \zeta^{-q^4-q^3-q^2-1}, \zeta^{-q^3-1})$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}\lambda_4\lambda_5\lambda_6^{-1}, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}).$$

Получаем $H_1^n = (-1, -\zeta, -\zeta^{-q^3}, -\zeta^{-q^3-q^2}, -\zeta^{q^4-q^3}, -\zeta^{q^4+q})$. Следовательно, $H_1^{\sigma n} = (-1, -\zeta^q, -\zeta^{-q^4}, -\zeta^{-q^4-q^3}, -\zeta^{q^5-q^4}, -\zeta^{q^5+q^2})$. Заметим, что $|\xi| = 2(q^5 + q^3 + q^2 + 1)(q -$

1)/2. Тогда $\zeta^{q^5+q^3+q^2+1} = -1$ и $\zeta^{q^5} = -\zeta^{-q^3-q^2-1}$. Поэтому $-\zeta^{q^5-q^4} = \zeta^{-q^4-q^3-q^2-1}$ и $-\zeta^{q^5+q^2} = \zeta^{-q^3-q^2-1+q^2}$. Таким образом, $H_1^{\sigma n} = H_1$. Используя MAGMA, получаем $n^{12} = h_2h_3$. Тогда $(Hn)^{12} = (\lambda_1^{12}, -\lambda_1^{9}, -\lambda_1^{15}, \lambda_1^{18}, \lambda_1^{12}, \lambda_1^{6})$. Следовательно, $(H_1n)^{12} = 1$ и $\langle H_1n\rangle$ — дополнение для тора T в N.

Тор 21. В этом случае $w = w_1w_5w_2w_3w_6w_{36}$ и $C_W(w) \simeq (((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_3) : Q_8) : \mathbb{Z}_3$. Более того, $C_W(w) = \langle u, v\rangle$, где $u = w_1w_2w_5w_{23}w_{26}w_{31}, v = w_1w_2w_6w_8w_{10}w_{29}$ и

$$\langle u, v\rangle \simeq \langle a, b \mid a^{12} = b^6 = a^8ba^{-8}b^{-1} = (a^6b^{-1})^3 = a^6b^2a^6b^{-2} = ba^8(a^{-1}b)^2a^{-1} = 1\rangle$$

Определим $N_1 = h_1h_2h_5 \cdot n_1n_2n_5n_{23}n_{26}n_{31}, N_2 = h_1h_5 \cdot n_1n_2n_6n_8n_{10}n_{29}$ и $N = n$. Используя MAGMA видим, что $[N, N_1] = [N, N_2] = 1$. Поэтому N_1 и N_2 принадлежат группе N. Легко проверить соотношения группы $C_W(w)$ для N_1 и N_2 используя MAGMA, но мы приведем доказательство, не содержащее компьютерных вычислений.

Определяющие соотношения $C_W(w)$ верны для элементов u, v. Подставляя $a = N_1$ и $b = N_2$, мы получим,что каждое соотношение верно с точностью до некоторого элемента $h \in T$. Поскольку $N_1 \in \mathcal{T}$ и $N_2 \in \mathcal{T}$, то каждый такой элемент $h \in \mathcal{T} \cap T = \mathcal{H} \cap T$. Так как $T \simeq (q^2+q+1)^3$, то каждый элемент тора T имеет нечетный порядок. С другой стороны, $\mathcal{H}$ — элементарная абелева 2-группа, поэтому $\mathcal{H} \cap T = 1$. Таким образом, все соотношения для $C_W(w)$ выполнены в группе $K = \langle N_1, N_2\rangle$, и K — требуемое дополнение.

Тор 22. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_3w_5w_{36}$ и $C_W(w) = \langle w, w_{36}, w_{24}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. По лемме 3.2.3 имеем

$$H^n = (\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-2}\lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_2^{-1}\lambda_4\lambda_5^{-1}).$$

Используя MAGMA, получаем $[n, n_{36}] = 1$ и $[n, n_{24}] = h_2h_3h_5$. Определим $h = (\alpha^2, \alpha, \alpha, 1, \alpha, \alpha^2)$, где $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^{q+1} = -1$. Тогда $h^{\sigma n} = (\alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}, 1, \alpha^{-1}, \alpha^{-2})^{\sigma} = (\alpha^2, -\alpha, -\alpha, 1, -\alpha, \alpha^2) = h_2h_3h_5 \cdot h$. Следовательно, лемма 1.4.2 влечет $hn_{24} \in N$.

Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени $(2q^3 + 2)$, $\lambda = -\xi^2$ и $\alpha = \xi^{-q^2+q-1}$. Отметим, что $\lambda^{-q^3} = -\xi^{-2q^3} = -\xi^2 = \lambda$. Определим

$$N_1 = H_1n, N_2 = H_2hn_{24}, N_3 = H_3n_{36}, \text{где}$$

$H_1 = (\lambda, 1, \lambda^{q+1}, \lambda^{-q^2+q+1}, \lambda^{q+1}, \lambda)$, $H_2 = (-\alpha^{-2}, 1, 1, -\alpha^2, 1, -\alpha^{-2})$, $H_3 = h_2h_3h_5$. Покажем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3\rangle$ будет дополнением для тора T. Во-первых,

$$H_1^{\sigma n} = (\lambda^{-q^2}, 1, \lambda^{-q^2+1}, \lambda^{-q^2-q+1}, \lambda^{-q^2+1}, \lambda^{-q^2})^q = (\lambda, 1, \lambda^{1+q}, \lambda^{1-q^2+q}, \lambda^{1+q}, \lambda) = H_1.$$

Более того, $H_2^{\sigma n} = (-\alpha^2, 1, 1, -\alpha^{-2}, 1, -\alpha^2)^q = (-\alpha^{-2}, 1, 1, -\alpha^2, 1, -\alpha^{-2}) = H_2$ и $H_3^{\sigma n} = H_3^q = H_3$. Следовательно, $H_1, H_2, H_3 \in T$. По лемме 3.2.3 получаем

$$H^{n_{24}} = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_1^2\lambda_4^{-1}\lambda_6^2, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6, \lambda_6),$$

$$(Hn_{24})^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_4^{-1}\lambda_6, -\lambda_1\lambda_3^2\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_1^2\lambda_6^2, -\lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5^2\lambda_6, \lambda_6^2).$$

Поэтому $N_2^2 = 1$. Используя MAGMA, получаем $N_3^2 = 1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N_2N_3 = H_2hn_{24}H_3n_{36} = H_2hH_3^{n_{24}}n_{24}n_{36} = \\ = (-1, \alpha, \alpha, -\alpha^2, \alpha, -1)(1, -1, -1, 1, -1, 1)n_{24}n_{36} = \\ = (-1, -\alpha, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha, -1)n_{24}n_{36}. \end{aligned}$$

Вычисления в MAGMA показывают, что $(n_{24}n_{36})^3 = 1$ и, следовательно,

$$(Hn_{24}n_{36})^3 = (\lambda_1^2\lambda_2^{-2}\lambda_4\lambda_6^{-1}, 1, \lambda_2^{-3}\lambda_3^3, \lambda_1\lambda_2^{-4}\lambda_4^2\lambda_6, \lambda_2^{-3}\lambda_5^3, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-2}\lambda_4\lambda_6^2).$$

Таким образом, $(N_2N_3)^3 = 1$ и $\langle N_2, N_3\rangle \simeq \mathrm{S}_3$.

Далее, согласно лемме 1.4.3 равенство $N_1N_3 = N_3N_1$ равносильно $H_3^{-1}H_3^n = H_1^{-1}H_1^{n_{36}}$. По лемме 3.2.3 получаем $H^{n_{36}} = (\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-2}\lambda_3, \lambda_2^{-3}\lambda_4, \lambda_2^{-2}\lambda_5, \lambda_2^{-1}\lambda_6)$. Тогда $H_1^{n_{36}} = H_1$ и $H_3^n = H_3$. Поэтому $N_1N_3 = N_3N_1$. Аналогично равенство $N_1N_2 = N_2N_1$ равносильно $H_1^{-1}H_1^{n_{24}} \cdot [n_{24}, n] = (H_2h)^{-1}(H_2h)^n$. По лемме 3.2.3 получаем $H^{-1}H^{n_{24}} = (1, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_1^2\lambda_4^{-2}\lambda_6^2, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_6, 1)$. Полагая $H = H_1$ и учитывая равенство $\lambda^{q^2-q+1} = -\xi^{2(q^2-q+1)} = -\alpha^{-2}$, получаем, что $H_1^{-1}H_1^{n_{24}} = (1, -\alpha^{-2}, -\alpha^{-2}, \alpha^{-4}, -\alpha^{-2}, 1)$.

С другой стороны, $H_2h = (-1, \alpha, \alpha, -\alpha^2, \alpha, -1)$, поэтому $(H_2h)^n = (-1, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}, -\alpha^{-2}, \alpha^{-1}, -1)$. Следовательно,

$$(H_2h)^{-1}(H_2h)^n = (1, \alpha^{-2}, \alpha^{-2}, \alpha^{-4}, \alpha^{-2}, 1).$$

Поскольку $[n, n_{24}] = h_2h_3h_5$, то $N_1N_2 = N_2N_1$.

Наконец, используя MAGMA видим, что $(Hn)^6 = 1$. Таким образом, $N_1^6 = 1$ и $K \simeq \langle N_1 \rangle \times \langle N_2, N_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$, как утверждалось.

Тор 25. В этом случае $w = w_1w_4w_{14}w_3w_2w_{31}$ и $C_W(w) = \langle w^2 \rangle \times \langle i, j, c \rangle$, где $i = w_3w_6w_{19}w_{26}$, $j = w_3w_6w_{14}w_{30}$, $c = w_1w_4w_6w_{13}w_{20}w_{34}$ и $\langle i, j, c \rangle \simeq \mathrm{SL}_2(3)$. Отметим, что $|T| = (q^2 - q + 1)(q^4 + q^2 + 1)$ нечетен.

Определим $N_1 = n^2$, $N_2 = h_1h_2h_5n_3n_6n_{19}n_{26}$, $N_3 = h_2h_3h_4h_5n_3n_6n_{14}n_{30}$, $N_4 = h_1h_2h_4h_6n_1n_4n_6n_{13}n_{20}n_{34}$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle$ — дополнение для тора T в N.

Используя MAGMA видим, что $[n, N_2] = [n, N_3] = [n, N_4] = 1$ и, следовательно $N_2, N_3, N_4 \in N$. Очевидно, что образ группы $\langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle$ в W равен $C_W(w)$. Теперь мы можем привести те же аргументы как в случае тора 21. Группа $C_W(w)$ задается некоторыми соотношениями на элементах w^2, i, j и c. Эти соотношения выполняются для N_1, N_2, N_3 и N_4 с точностью до некоторых элементов $h \in T \cap \mathcal{H}$. Однако, поскольку порядок тора T нечетен, то $h = 1$ для всех соотношений. Таким образом, $K \simeq C_W(w)$ и K — требуемое дополнение.

Все максимальные торы рассмотрены, тем самым теорема 3.2.2 доказана для групп $E_6(q)$.

Чтобы получить результаты для групп ${}^2E_6(q)$, можно начать с максимального тора $\overline{T}_\sigma \simeq \mathbb{Z}_{q+1}^6$ и затем использовать доказательства для группы $E_6(q)$, заменяя q на $-q$.

3.3 Исключительные группы $E_7(q)$

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа E_7. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа (присоединенного типа или односвязная) лиева типа E_7 над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$. Пусть $\overline{T}$ — максимальный тор в группе $\overline{G}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

При переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное

Таблица 3.1: Максимальные торы односвязной группы $E_6(q)$

№	Представитель w	$\lvert w\rvert$	Строение $C_W(w)$	Циклическое строение T	Доп.
1	1	1	$\mathrm{O}_5(3) : \mathbb{Z}_2$	$(q-1)^6$	–
2	w_1	2	$\mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_6$	$(q-1)^4 \times (q^2-1)$	–
3	w_1w_2	2	$D_8 \times \mathrm{S}_4$	$(q-1)^2 \times (q^2-1)^2$	–
4	w_3w_1	3	$\mathbb{Z}_3 \times ((\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3) : \mathbb{Z}_2)$	$(q-1)^3 \times (q^3-1)$	+
5	$w_2w_3w_5$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$	$(q^2-1)^3$	–
6	$w_1w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$	$(q-1) \times (q^2-1) \times (q^3-1)$	+
7	$w_1w_3w_4$	4	$\mathbb{Z}_4 \times D_8$	$(q-1)^2 \times (q^4-1)$	–
8	$w_1w_4w_6w_{36}$	2	$\mathbb{Z}_2 : ((A_4^2 : \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2)$	$(q+1)^2 \times (q^2-1)^2$	–
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_3 \times D_8$	$(q^2-1) \times (q+1)(q^3-1)$	+
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3$	$(q-1) \times (q^2+q+1) \times (q^3-1)$	+
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q^2-1) \times (q^4-1)$	–
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$	$(q-1) \times (q^5-1)$	+
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$	$(q^2-1) \times (q-1)(q^3+1)$	+
14	$w_3w_2w_4w_{14}$	4	$\mathrm{SL}_2(3) : \mathbb{Z}_4$	$(q-1)(q^2+1)^2$	±
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$	$(q^2+q+1) \times (q+1)(q^3-1)$	+
16	$w_1w_4w_6w_3w_{36}$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathrm{S}_4$	$(q+1)^2 \times (q^4-1)$	–
17	$w_1w_4w_5w_3w_{36}$	10	$\mathbb{Z}_{10}$	$(q+1)(q^5-1)$	+
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q^2+q+1) \times (q-1)(q^3+1)$	+
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$\mathbb{Z}_8$	$(q^2-1)(q^4+1)$	+
20	$w_{20}w_5w_4w_3w_2$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	$(q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	+
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{36}$	3	$((\mathbb{Z}_3^2 : \mathbb{Z}_3) : Q_8) : \mathbb{Z}_3$	$(q^2+q+1)^3$	+
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{36}$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$	$(q+1) \times (q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)$	+
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	$(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)$	+
24	$w_1w_4w_{14}w_3w_2w_6$	9	$\mathbb{Z}_9$	(q^6+q^3+1)	+
25	$w_1w_4w_{14}w_3w_2w_{31}$	6	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2-q+1) \times (q^4+q^2+1)$	+

соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. Мы нумеруем классы сопряженности группы W и корни соответствующей корневой системы как в [29]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_7, тогда $r_{16} = r_2 + r_4 + r_5$ и $r_{53} = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6$. Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i. Через U обозначим подгруппу группы W, порожденную элементами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$. Отметим, что U изоморфна группе Вейля типа E_6. Для корневой системы Φ будем обозначать через $\Phi^{sc}(q)$ и $\Phi^{ad}(q)$ односвязную и присоединенную группы с корневой системой Φ, соответственно.

Ответ на проблему 2 для групп $E_7(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.3.2. *Пусть $G = E_7(q)$ (односвязная или присоединенного типа), W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Если $G = E_7^{ad}(q)$, то элемент w имеет поднятие порядка $|w|$ в $N(G,T)$. Более того, T не имеет дополнения в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов: 1, w_1, w_1w_2, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_3w_2w_4w_{16}$, $w_1w_4w_6w_3w_{53}$, $w_3w_2w_4w_{16}w_7$;*

(2) *Если $G = E_7^{sc}(q)$, то T не имеет дополнения в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно. Более того, w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$ тогда и только тогда, когда либо q четно или элемент w удовлетворяет одному из следующих условий:*

   (а) *$|w|$ делится на 4;*

   (б) *$|w|$ нечетный;*

   (в) *w сопряжен в W с некоторым элементом из U.*

Замечание 3.3.3. *Из таблицы 3.5 следует, что элемент w или ww_0 сопряжен с одним из элементов, указанных в пункте* (1)*, тогда и только тогда, когда порядок $|w|$ делит 4.*

Мы иллюстрируем результаты теоремы в таблице 3.5, а также в таблице 3.10 с некоторой дополнительной информацией о максимальных торах.

Предварительные сведения.

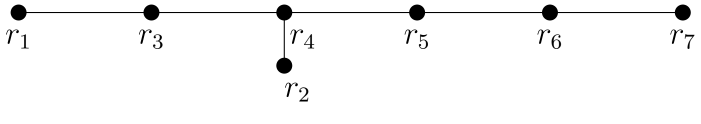
Матрица Картана (A_{ij}) корневой системы E_7 имеет вид

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группу Вейля W корневой системы E_7 можно записать в виде $W(E_7) = \langle w_{r_1}, \ldots, w_{r_7} | (w_{r_i} w_{r_j})^{m_{ij}} = 1 \rangle$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 2, & \text{если } A_{ij} = 0, \\ 3, & \text{если } A_{ij} = -1. \end{cases}$$

Группа W имеет порядок $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ и изоморфна группе $2 \times \mathrm{O}_7(2)$ (в обозначениях [25]). Диаграмма Дынкина корневой системы E_7 имеет вид



Напомним, что любой элемент H тора $\overline{T}$ представляется в виде $H = \prod\limits_{i=1}^{7} h_{r_i}(\lambda_i)$. Следовательно, элемент H определяется значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ и мы будем писать $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$.

Мы используем MAGMA [53] для вычисления произведений в $\overline{N}$. Все вычисления могут быть выполнены также и в MAGMA-калькуляторе [48]. Мы используем следующие предварительные команды:

$L := LieAlgebra(''E7'', Rationals());$

$R := RootDatum(L);$

$B := ChevalleyBasis(L);$

В таком случае L имеет присоединенный тип по умолчанию. Чтобы переключить данные для односвязных групп, можно заменить первую команду на следующую:

$$L := LieAlgebra(''E7'', Rationals() : Isogeny := ''SC'').$$

Следующие команды выдают список всех экстраспециальных пар и знаки соответствующих структурных констант:

$x, y, h := ChevalleyBasis(L); IsChevalleyBasis(L, R, x, y, h);$

$[\langle 1,3,1\rangle$, $\langle 1,10,1\rangle$, $\langle 1,15,1\rangle$, $\langle 1,17,1\rangle$, $\langle 1,22,1\rangle$, $\langle 1,24,1\rangle$, $\langle 1,28,1\rangle$, $\langle 1,29,1\rangle$, $\langle 1,31,1\rangle$, $\langle 1,35,1\rangle$, $\langle 1,36,1\rangle$, $\langle 1,40,1\rangle$, $\langle 1,41,1\rangle$, $\langle 1,45,1\rangle$, $\langle 1,49,1\rangle$, $\langle 1,62,1\rangle$, $\langle 2,4,1\rangle$, $\langle 2,10,1\rangle$, $\langle 2,11,1\rangle$, $\langle 2,17,1\rangle$, $\langle 2,18,1\rangle$, $\langle 2,24,1\rangle$, $\langle 2,25,1\rangle$, $\langle 2,31,1\rangle$, $\langle 2,50,1\rangle$, $\langle 2,54,1\rangle$, $\langle 2,57,1\rangle$, $\langle 2,59,1\rangle$, $\langle 3,4,1\rangle$, $\langle 3,11,1\rangle$, $\langle 3,18,1\rangle$, $\langle 3,25,1\rangle$, $\langle 3,32,1\rangle$, $\langle 3,38,1\rangle$, $\langle 3,43,1\rangle$, $\langle 3,44,1\rangle$, $\langle 3,48,1\rangle$, $\langle 3,52,1\rangle$, $\langle 3,61,1\rangle$, $\langle 4,5,1\rangle$, $\langle 4,12,1\rangle$, $\langle 4,19,1\rangle$, $\langle 4,22,1\rangle$, $\langle 4,29,1\rangle$, $\langle 4,36,1\rangle$, $\langle 4,46,1\rangle$, $\langle 4,51,1\rangle$, $\langle 4,55,1\rangle$, $\langle 4,60,1\rangle$, $\langle 5,6,1\rangle$, $\langle 5,13,1\rangle$, $\langle 5,35,1\rangle$, $\langle 5,41,1\rangle$, $\langle 5,57,1\rangle$, $\langle 6,7,1\rangle$, $\langle 6,45,1\rangle]$.

Непосредственная проверка показывает, что введенный ранее порядок дает такое же множество экстраспециальных пар. Поэтому вычисления в MAGMA для $\overline{N}$ соответствуют порядку и структурным константам, определенным ранее. Следующие команды определяют элементы n_i и h_i.

$G := GroupOfLieType(L);$

$n := [elt\langle G \mid i\rangle : i\ in\ [1..NumberOfPositiveRoots(R)]];$

$h := [TorusTerm(G, i, -1) : i\ in\ [1..NumberOfPositiveRoots(R)]];$

Чтобы получить список матриц отражений, можно использовать следующую команду:

$w := [Transpose(i)\ :\ i\ in\ ReflectionMatrices(R)];$

Следующий результат является основным инструментом при вычислениях степеней и коммутаторов элементов в $\overline{N}$.

Лемма 3.3.4. *Пусть все корни в корневой системе* Φ *имеют одинаковую длину. Пусть* l *– это число фундаментальных корней в* Φ *и* $k = |\Phi|$. *Предположим, что* $n \in \mathcal{T}$ *и* $\pi(n) = w$. *Пусть* $A = (a_{ij})_{l\times l}$ *– матрица* w *в базисе* $r_1, r_2, \ldots, r_l$, *и* $H = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ *– некоторый элемент в* $\overline{T}$. *Тогда выполнены следующие утверждения:*

(1) $H^n = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_l')$, *где* $\lambda_i' = \lambda_1^{a_{i1}}\lambda_2^{a_{i2}}\ldots\lambda_l^{a_{il}}$ *для* $1 \leqslant i \leqslant l$;

(2) $(Hn)^m = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_l')n^m$, *где* m *– положительное целое число,* $\lambda_i' = \lambda_1^{b_{i1}}\lambda_2^{b_{i2}}\ldots\lambda_l^{b_{il}}$ *для* $1 \leqslant i \leqslant l$ *и* b_{ij} *– элементы матрицы* $\sum\limits_{t=0}^{m-1} A^t$.

Доказательство. Доказательство является аналогичным доказательству 3.2.3, где это утверждение было доказано в случае $\Phi = E_6$. □

Поскольку мы часто используем лемму 3.3.4, проиллюстрируем ее применение следующим примером.

Пример 3.3.5. *Пусть* $\Phi = E_7$, $w = w_1w_2w_3$ *и* $n = n_1n_2n_3$. *Тогда легко видеть, что* $w_1(r_1) = -r_1$, $w_1(r_3) = r_1 + r_3$, $w_2(r_2) = -r_2$, $w_2(r_4) = r_2 + r_4$, $w_3(r_3) = -r_3$, $w_3(r_1) = r_1 + r_3$ *и* $w_3(r_4) = r_3 + r_4$.

Поэтому в этом случае матрица A *для* w *является следующей.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) \in \overline{T}$. *Тогда по лемме 3.3.4 мы можем использовать строки матрицы* A, *чтобы вычислить* H^n, *а именно:* $H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$. *Пусть теперь* $B = A^0 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$.

Тогда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $n^6 = h_2$, *поэтому*

$$(Hn)^6 = (\lambda_4^2, \lambda_4^3, \lambda_4^4, \lambda_4^6, \lambda_5^6, \lambda_6^6, \lambda_7^6)n^6 = (\lambda_4^2, -\lambda_4^3, \lambda_4^4, \lambda_4^6, \lambda_5^6, \lambda_6^6, \lambda_7^6).$$

Доказательство теоремы 3.3.1.

Поскольку случай $p = 2$ следует из замечания 1.4.1, мы предполагаем далее, что q нечетно.

Если группа $E_7(\overline{\mathbb{F}}_p)$ универсальная, то согласно [34, Таблица 1.12.6] ее центр порождается элементом $z = h_{r_2}(-1)h_{r_5}(-1)h_{r_7}(-1)$ порядка 2. Следовательно, в группе $E_7(\overline{\mathbb{F}}_p)$ присоединенного типа верно, что

$$H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_7) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_7 = \pm 1.$$

Предположим, что максимальный тор $\overline{T}$ имеет дополнение $\overline{K}$ в своем нормализаторе $\overline{N}$. Пусть N_i — прообраз элемента w_{r_i} в $\overline{K}$, где $i = 1, \ldots, 7$. Тогда $N_i = H_i n_{r_i}$ и $(N_iN_j)^{m_{ij}} = 1$.

Пусть $N_3 = H_3n_3, N_4 = H_4n_4, N_5 = H_5n_5, N_6 = H_6n_6$, где

$$H_3 = (\nu_1, \ldots, \nu_7), H_4 = (\mu_1, \ldots, \mu_7), H_5 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_7), H_6 = (\beta_1, \ldots, \beta_7).$$

В силу леммы 3.3.4 имеем

$$N_4^2 = (\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, -\mu_2\mu_3\mu_5, \mu_5^2, \mu_6^2, \mu_7^2) = 1,$$

откуда

$$\begin{cases} \mu_1^2 = \mu_3^2 = \mu_6^2 = -\mu_2\mu_3\mu_5 = 1, \\ \mu_2^2 = \mu_5^2 = \mu_7^2 = \epsilon, \text{ где } \epsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Пусть $k \in \{1, 6, 7\}$, тогда должны выполняться равенства $N_4N_k = N_kN_4$. Поскольку $[n_4, n_6] = 1$, то согласно лемме 1.4.3 при $k = 6$ имеем $H_4^{-1}H_4^{n_6} = H_6^{-1}H_6^{n_4}$. Следовательно,

$$(1, 1, 1, 1, 1, \mu_5\mu_6^{-2}\mu_7, 1) = (1, 1, 1, \beta_4^{-2}\beta_2\beta_3\beta_5, 1, 1, 1),$$

что равносильно равенству

$$(1, 1, 1, \beta_4^{-2}\beta_2\beta_3\beta_5, 1, \mu_6^2\mu_5^{-1}\mu_7^{-1}) = 1.$$

Поскольку неединичных элементов в полученном векторе максимум два, то все эти элементы обязаны равняться 1. Следовательно, $\mu_6^2 = \mu_5\mu_7$. Аналогично, при $k = 1$ и $k = 7$ получаем $\mu_1^2 = \mu_3, \mu_7^2 = \mu_6$.

Для элемента N_5 аналогично получаем

$$N_5^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2, -\alpha_4\alpha_6, \alpha_6^2, \alpha_7^2) = 1,$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = \alpha_6^2 = 1, \\ \alpha_2^2 = \alpha_7^2 = -\alpha_4\alpha_6 = \delta, \text{ где } \delta = \pm 1. \end{cases}$$

Поскольку $N_5N_k = N_kN_5$ для $k \in \{1, 2, 3, 7\}$, то

$$\begin{cases} \alpha_1^2 &= \alpha_3, \\ \alpha_2^2 &= \alpha_4, \\ \alpha_3^2 &= \alpha_1\alpha_4, \\ \alpha_7^2 &= \alpha_6. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_4 = 1$. Так как $\alpha_2^2 = \alpha_7^2$, то $\alpha_4 = \alpha_6$. Значит, $\alpha_4\alpha_6 = \alpha_2^2\alpha_7^2 = \delta^2 = 1$, откуда $\delta = -\alpha_4\alpha_6 = -1$. Следовательно, $\alpha_4 = \alpha_6 = \delta = -1$. Таким образом,

$$H_5 = (\alpha_1, \alpha_2, 1, -1, \alpha_5, -1, \alpha_7).$$

Тогда

$$N_5N_4 = H_5(H_4)^{n_5}n_5n_4 =$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, 1, -1, \alpha_5, -1, \alpha_7) \cdot (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5^{-1}\mu_4\mu_6, \mu_6, \mu_7)n_5n_4 =$$
$$(\alpha_1\mu_1, \alpha_2\mu_2, \mu_3, -\mu_4, \alpha_5\mu_5^{-1}\mu_4\mu_6, -\mu_6, \alpha_7\mu_7)n_5n_4 = Hn_5n_4.$$

В силу леммы 3.3.4 имеем

$$(N_5N_4)^3 = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, -\mu_6^3, t_7)$$

для некоторых $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Поскольку $\mu_6^2 = 1$, то $\mu_6 = \mu_6^3 = -1$.

Для элемента N_3 аналогично получаем $N_3^2 = (\nu_1^2, \nu_2^2, -\nu_1\nu_4, \nu_4^2, \nu_5^2, \nu_6^2, \nu_7^2) = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} \nu_1^2 = -\nu_1\nu_4 = \nu_4^2 = \nu_6^2 = 1, \\ \nu_2^2 = \nu_5^2 = \nu_7^2 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Поскольку $N_3N_k = N_kN_3$ для $k \in \{2, 5, 6, 7\}$, то

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nu_2^2 & = & \nu_4, \\ \nu_5^2 & = & \nu_4\nu_6, \\ \nu_6^2 & = & \nu_5\nu_7, \\ \nu_7^2 & = & \nu_6. \end{array}\right.$$

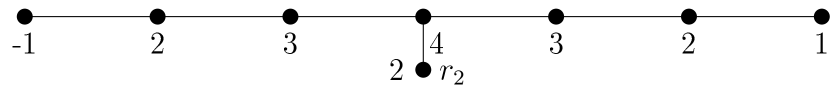
Следовательно, $\varepsilon = \nu_4 = \nu_6 = \nu_4\nu_6$, откуда, в частности, $\nu_6 = 1$. Таким образом,

$$N_3N_4 = H_3(H_4)^{n_3}n_3n_4 = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, 1, \nu_7)(\mu_1, \mu_2, \mu_3^{-1}\mu_1\mu_4, \mu_4, \mu_5, -1, \mu_7)n_3n_4 =$$
$$(\nu_1\mu_1, \nu_2\mu_2, \nu_3\mu_3^{-1}\mu_1\mu_4, \nu_4\mu_4, \nu_5\mu_5, -1, \nu_7\mu_7)n_3n_4 = Hn_3n_4.$$

В силу леммы 3.3.4 имеем $(N_3N_4)^3 = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, -1, s_7)$, для некоторых $s_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Поскольку $p \neq 2$, то получаем противоречие с равенством $(N_3N_4)^3 = 1$.

Доказательство теоремы 3.3.2.

Поскольку случай $p = 2$ следует из замечания 1.4.1, мы предполагаем далее, что q нечетно. Пусть G — конечная группа лиева типа E_7. Расширенная диаграмма Дынкина типа E_7 выглядит следующим образом.



Группа Вейля W имеет центральную инволюцию w_0. Нетрудно проверить, что $w_0 = w_1w_2w_5w_7w_{37}w_{55}w_{61}$. В группе Вейля W содержится 60 классов сопряженности и все они делятся на пары: для каждого $w \in W$ элементы w и ww_0 принадлежат разным сопряженным классам. Мы перечисляем 30 представителей классов сопряженности в таблице 3.5, оставшиеся 30 могут быть получены умножением на w_0. Информация в таблице может быть проверена с помощью GAP [52].

Существует в точности 60 классов сопряженности максимальных торов в группе G. Циклическая структура максимальных торов в универсальных группах типа E_7 была описана в [29]. Мы используем эту информацию в таблице 3.5. Чтобы из таблицы получить циклическое строение тора, который соответствует элементу ww_0, где $w \in W$, можно подставить $-q$ вместо q и затем умножить результат на -1 в строении тора, который соответствует w.

Мы разбиваем доказательство на три случая. Первый случай посвящен односвязным группам. Группы присоединенного типа составляют следующие два случая. Первый из них посвящен максимальным торам, которые не имеют дополнения в своем алгебраическом нормализаторе, второй посвящен оставшимся максимальным торам.

Односвязные группы.

Прежде всего мы показываем, что любой максимальный тор T группы $G = E_7^{sc}(q)$ не имеет дополнения в своем алгебраическом нормализаторе $N(G,T)$. Пусть $n_0 = n_1n_2n_5n_7n_{37}n_{55}n_{61}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $n_0^2 = h_2h_5h_7$, $[n_0, n_i] = 1$ для $i = 1, \ldots, 7$ и, следовательно, $[n_0, h_i] = 1$ для $i = 1, \ldots, 7$. Предположим, что T имеет дополнение K в $N(G,T)$. Поскольку $w_0 \in C_W(w)$, существует прообраз N_0 элемента w_0 в K такой, что $N_0^2 = 1$. Тогда $N_0 = Hn_0$, для некоторого $H \in T$. Поскольку w_0 отображает r в $-r$ для каждого $r \in \Phi$, из леммы 3.3.4 вытекает, что $H^{n_0} = H^{-1}$ для любого $H \in T$. Поэтому мы имеем $N_0^2 = HH^{n_0}n_0^2 = HH^{-1}h_2h_5h_7 = h_2h_5h_7$; противоречие.

Предположим, что w — некоторый элемент из второго столбца таблицы 3.2. Тогда существует поднятие для w в $N(G,T)$ такого же порядка. Примеры таких поднятий перечислены в четвертом столбце таблицы 3.2. В каждом из случаев мы предъявляем элемент $n_w \in \mathcal{T}$ для $w \in W$ такой, что $\pi(n_w) = w$. Используя MAGMA, можно проверить, что $|n_w| = |w|$ и поэтому n_w – поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma n_w}$.

Рассмотрим w такой, что $|w| = 4k$ для некоторого целого k. Поскольку поднятие N в таблице 3.2 для w лежит в $\mathcal{T}$ и $n_0 \in Z(\mathcal{T})$, мы получаем, что $(Nn_0)^{4k} = N^{4k}n_0^{4k} = (h_2h_5h_7)^{2k} = 1$. Поэтому Nn_0 – поднятие для элемента ww_0 такого же порядка.

Пусть $|ww_0| = 4k + 2$ для некоторого целого k. Предположим, что ww_0 имеет поднятие N такого же порядка в алгебраическом нормализаторе тора T. Тогда $N = Hnn_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)nn_0$ для некоторых $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ и $n \in \mathcal{T}$. Поскольку n_0 коммутирует с n, верно, что $(nn_0)^{2i} = n^{2i}(h_2h_5h_7)^i$ и $(nn_0)^{2i+1} = n^{2i+1}n_0(h_2h_5h_7)^i$, где i – целое число. Тогда

$$\begin{aligned} N^{4k+2} = (Hn_0n)^{4k+2} &= HH^{n_0n}H^{(n_0n)^2}\dots H^{(n_0n)^{4k+1}}(n_0n)^{4k+2} \\ &= H(H^{-1})^nH^{n^2}(H^{-n^2})^n\dots H^{n^{4k}}(H^{-n^{4k}})^n n^{4k+2}h_2h_5h_7. \end{aligned}$$

Пусть $w \in \langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\rangle$. Заметим, что это выполнено для первых 25 представителей в таблице 3.2. По лемме 3.3.4 заключаем, что $H^{n^i} = (*, *, *, *, *, *, \lambda_7)$ для каждого $i > 0$ и $n^{4k+2} = (*, *, *, *, *, *, 1)$. Следовательно $N^{4k+2} = (*, *, *, *, *, *, -1) \neq 1$; противоречие.

В оставшихся двух случаях (представители 27 и 29 в таблице 3.2) порядок элемента w нечетен, скажем $|w| = 2k + 1$. Тогда $(ww_0)^{2k+1} = w_0$ и $|ww_0| = 4k + 2$. Если ww_0 имеет прообраз N в $N(G, T)$ такого же порядка, то N^{2k+1} – прообраз элемента w_0 порядка 2, что невозможно в силу рассуждений выше.

Присоединенные группы: нерасщепляемые случаи.

Пусть $G = E_7^{ad}(q)$. На протяжении этого подраздела мы предполагаем, что $\overline{T}$ – максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, и T – максимальный тор группы G, соответствующий сопряженному классу элемента $w \in W$. Мы пишем $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$ для произвольного элемента группы T. Эта запись означает, что $H = \prod\limits_{i=1}^{7} h_{r_i}(\lambda_i)$. Заметим, что $Z(E_7^{sc}(q)) = \langle h_2h_5h_7\rangle$. Для простоты, мы отождествляем h_i с их образами в G и предполагаем, что $h_2h_5h_7 = 1$, то есть $(1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Напомним, что π – это естественный гомоморфизм из $\overline{N}$ на W. Основным инструментом, чтобы показать, что T не имеет дополнения в $N(G, T)$, является следующее утверждение.

Таблица 3.2: Поднятия для элементов группы $W(E_7)$

№	представитель w	$\|w\|$	поднятие для w	поднятие для ww_0
1	1	1	1	–
2	w_1	2	h_3n_1	–
3	w_1w_2	2	$h_3h_4n_1n_2$	–
4	w_3w_1	3	n_3n_1	–
5	$w_2w_3w_5$	2	$h_4n_2n_3n_5$	–
6	$w_1w_3w_5$	6	$h_4n_1n_3n_5$	–
7	$w_1w_3w_4$	4	$h_2n_1n_3n_4$	$h_2n_1n_3n_4n_0$
8	$w_1w_4w_6w_{53}$	2	$n_1n_4n_6n_{53}$	–
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$h_1h_4n_1n_2n_3n_5$	–
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$n_1n_5n_3n_6$	–
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$h_2n_1n_4n_6n_3$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_0$
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$n_1n_4n_3n_2$	–
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$n_3n_2n_5n_4$	–
14	$w_3w_2w_4w_{16}$	4	$n_3n_2n_4n_{16}$	$n_3n_2n_4n_{16}n_0$
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$h_4n_1n_5n_3n_6n_2$	–
16	$w_1w_4w_6w_3w_{53}$	4	$h_2n_1n_4n_6n_3n_{53}$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_{53}n_0$
17	$w_1w_4w_5w_3w_{53}$	10	$h_2n_1n_4n_5n_3n_{53}$	–
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$h_2n_1n_4n_6n_3n_5$	–
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$n_2n_5n_3n_4n_6$	$n_2n_5n_3n_4n_6n_0$
20	$w_{23}w_5w_4w_3w_2$	12	$h_1n_{23}n_5n_4n_3n_2$	$h_1n_{23}n_5n_4n_3n_2n_0$
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{53}$	3	$n_1n_5n_2n_3n_6n_{53}$	–
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{53}$	6	$n_1n_4n_6n_3n_5n_{53}$	–
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$n_1n_4n_6n_3n_2n_5$	$n_1n_4n_6n_3n_2n_5n_0$
24	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_6$	9	$n_1n_4n_{16}n_3n_2n_6$	–
25	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_{40}$	6	$n_1n_4n_{16}n_3n_2n_{40}$	–
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$h_2n_1n_4n_6n_3n_7$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_7n_0$
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$n_1n_4n_6n_2n_3n_7$	–
28	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	4	$n_3n_2n_4n_{16}n_7$	$n_3n_2n_4n_{16}n_7n_0$
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	$n_1n_4n_6n_3n_5n_7$	–
30	$w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$n_{39}n_3n_5n_1n_4n_6$	$n_{39}n_3n_5n_1n_4n_6n_0$

Лемма 3.3.6. *Пусть* $w \in W$ *и* $C_W(w) \geqslant \langle w_2w_5, w_{49}, w_{63}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *Предположим, что элемент* $n \in \overline{N}$ *такой, что* $\pi(n) = w$ *и* n_2n_5, n_{49}, n_{63} *лежат в* $\overline{N}_{\sigma n}$. *Тогда* $\overline{T}_{\sigma n}$ *не имеет дополнения в* $\overline{N}_{\sigma n}$.

Доказательство. Предположим обратное, что $\overline{T}_{\sigma n}$ имеет дополнение K в $\overline{N}_{\sigma n}$. Пусть N_1, N_2, N_3 – прообразы w_2w_5, w_{49} и w_{63} в K, соответственно. Тогда $N_1 = H_1n_2n_5$, $N_2 = H_2n_{49}$, $N_3 = H_3n_{63}$, где

$$H_1 = (\mu_1, \ldots, \mu_7), H_2 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_7), H_3 = (\beta_1, \ldots, \beta_7)$$

— элементы группы $\overline{T}_{\sigma n}$.

Поскольку $w_{63}^2 = 1$, получаем, что $N_3^2 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $n_{63}^2 = h_3h_5h_7$. По лемме 3.3.4

$$(Hn_{63})^2 = (1, \lambda_1^{-2}\lambda_2^2, -\lambda_1^{-3}\lambda_3^2, \lambda_1^{-4}\lambda_4^2, -\lambda_1^{-3}\lambda_5^2, \lambda_1^{-2}\lambda_6^2, -\lambda_1^{-1}\lambda_7^2).$$

В частности, $\beta_1^2 = \varepsilon\beta_2^2$ и $\beta_5^2 = -\varepsilon\beta_1^3$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Поскольку $[w_{63}, w_2w_5] = [w_{63}, w_{49}] = 1$, мы заключаем, что $[N_3, N_1] = [N_3, N_2] = 1$. Используя MAGMA, мы видим, что $[n_{63}, n_2n_5] = [n_{63}, n_{49}] = 1$. Из леммы 1.4.3 следует, что $H_3^{-1}H_3^{n_2n_5} = H_1^{-1}H_1^{n_{63}}$ и $H_3^{-1}H_3^{n_{49}} = H_2^{-1}H_2^{n_{63}}$. По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{n_{63}} = (\lambda_1^{-2}, \lambda_1^{-2}, \lambda_1^{-3}, \lambda_1^{-4}, \lambda_1^{-3}, \lambda_1^{-2}, \lambda_1^{-1}),$$

$$H^{-1}H^{n_2n_5} = (1, \lambda_2^{-2}\lambda_4, 1, 1, \lambda_4\lambda_5^{-2}\lambda_6, 1, 1),$$

$$H^{-1}H^{n_{49}} = (1, \lambda_1\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_6^{-1}, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1\lambda_6^{-1}).$$

Поэтому мы имеем

$$(1, \beta_2^{-2}\beta_4, 1, 1, \beta_4\beta_5^{-2}\beta_6, 1, 1) = (\mu_1^{-2}, \mu_1^{-2}, \mu_1^{-3}, \mu_1^{-4}, \mu_1^{-3}, \mu_1^{-2}, \mu_1^{-1}).$$

Следовательно, $\mu_1^{-3} = \mu_1^{-4}$ и поэтому $\mu_1 = 1$. Тогда $\beta_2^{-2}\beta_4 = \beta_4\beta_5^{-2}\beta_6 = 1$. Поэтому $\beta_5^2 = \beta_6\beta_2^2$. Поскольку $\beta_1^2 = \varepsilon\beta_2^2$ и $\beta_5^2 = -\varepsilon\beta_1^3$, мы имеем $\beta_6 = -\beta_1$. Равенство $H_3^{-1}H_3^{n_{49}} = H_2^{-1}H_2^{n_{63}}$ влечет, что

$$\begin{aligned}(1, \beta_1\beta_6^{-1}, \beta_1\beta_6^{-1}, \beta_1^2\beta_6^{-2}, \beta_1^2\beta_6^{-2}, \beta_1^2\beta_6^{-2}, \beta_1\beta_6^{-1})&\\ = (\alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-3}, \alpha_1^{-4}, \alpha_1^{-3}, \alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-1}).&\end{aligned}$$

Применяя $\beta_1\beta_6^{-1} = -1$ к предыдущему равенству, мы находим, что

$$(\alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-3}, \alpha_1^{-4}, \alpha_1^{-3}, \alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-1}) = (1, -1, -1, 1, 1, 1, -1).$$

Из равенства первых координат, мы видим, что $\alpha_1^2 = 1$. Поскольку с правой стороны от равенства пятая и седьмая координаты отличаются знаком, мы заключаем, что $\alpha_1^{-3} = -\alpha_1^{-1}$; противоречие с $\alpha_1^2 = 1$. ☐

Следующая лемма завершает доказательство теоремы в случаях, когда T не имеет дополнений.

Лемма 3.3.7. *Пусть w, либо w_0w совпадает с одним из следующих элементов: 1, w_1, w_1w_2, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_3w_2w_4w_{16}$, $w_1w_4w_6w_3w_{53}$, $w_3w_2w_4w_{16}w_7$. Предположим, что T – максимальный тор, который соответствует классу сопряженности элемента w в W. Тогда $N(G,T)$ не расщепляется над T и существует поднятие элемента w в $N(G,T)$ порядка $|w|$.*

Доказательство. По лемме 1.4.4 мы можем предполагать, что w – элемент из списка в предположении леммы. Используя GAP, мы находим, что в каждом из случаев существует $w' \in W$, который сопряжен с w и такой, что w_2w_5, w_{49}, $w_{63} \in C_W(w')$. Примеры таких w' для каждого w приведены в таблице 3.3. Первый столбец этой таблицы содержит номер тора в соответствии с таблицей 3.5, третий столбец содержит пример w' для w. Четвертый столбец содержит элементы $n_{w'} \in \mathcal{T}$ такие, что $[n_{w'}, n_2n_5] = [n_{w'}, n_{49}] = [n_{w'}, n_{63}] = 1$ и $\pi(n_{w'}) = w'$. Тогда лемма 1.4.2 влечет, что в каждом случае n_2n_5, n_{49} и n_{63} принадлежат группе $\overline{N}_{\sigma n_{w'}}$. Далее, из леммы 3.3.6 следует, что $\overline{N}_{\sigma n_{w'}}$ не расщепляется над $\overline{T}_{\sigma n_{w'}}$. Поэтому $N(G,T)$ не расщепляется над T по замечанию 1.3.4. Наконец, пятый столбец содержит другой прообраз n' элемента w' в $\mathcal{T}$ такой, что $|w'| = |n'|$. Это равенство может быть проверено в MAGMA. Поэтому n' – поднятие для w' в $\overline{N}_{\sigma n'}$ такого же порядка. Тогда $n'n_0$ – поднятие для $w'w_0$ и лемма доказана. ☐

Таблица 3.3: Представители сопряженных классов, удовлетворяющие условию леммы 3.3.6

№	w	w'	прообраз для w'	поднятие для w'
1	1	1	1	1
2	w_1	w_7	n_7	h_6n_7
3	w_1w_2	w_2w_5	n_2n_5	$h_4n_2n_5$
5	$w_2w_3w_5$	$w_3w_5w_2$	$n_3n_5n_2$	$h_4n_3n_5n_2$
7	$w_1w_3w_4$	$w_2w_4w_{16}$	$h_4n_2n_4n_{16}$	$h_6n_2n_4n_{16}$
8	$w_1w_4w_6w_{53}$	$w_2w_5w_{49}w_{63}$	$n_2n_5n_{49}n_{63}$	$n_2n_5n_{49}n_{63}$
11	$w_1w_4w_6w_3$	$w_2w_{63}w_4w_{16}$	$h_4n_2n_{63}n_4n_{16}$	$h_6n_2n_{63}n_4n_{16}$
14	$w_3w_2w_4w_{16}$	$w_3w_2w_4w_{16}$	$h_4n_3n_2n_4n_{16}$	$n_3n_2n_4n_{16}$
16	$w_1w_4w_6w_3w_{53}$	$w_2w_8w_{32}w_{57}w_{60}$	$h_1n_2n_8n_{32}n_{57}n_{60}$	$h_6n_2n_8n_{32}n_{57}n_{60}$
28	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	$h_4n_3n_2n_4n_{16}n_7$	$n_3n_2n_4n_{16}n_7$

Присоединенные группы: расщепляемые случаи.

В этом подразделе мы покажем, что максимальные торы группы G, которые не рассмотрены в предыдущем подразделе, имеют дополнения в своем алгебраическом нормализаторе. Напомним, что $w_0 = w_1w_2w_5w_7w_{37}w_{55}w_{61}$ – центральная инволюция группы W, $n_0 = n_1n_2n_5n_7n_{37}n_{55}n_{61}$. Как и выше, мы отождествляем h_i с их образами в G, в частности $h_2h_5h_7 = 1$.

Мы разделяем доказательство на две части: сначала рассматриваются максимальные торы, которые требуют специального подхода в каждом случае, затем рассматриваются оставшиеся торы при помощи общей идеи.

Лемма 3.3.8. *Предположим, что либо w, либо ww_0 сопряжен в W с одним из следующим элементов: w_3w_1, $w_1w_3w_5$, $w_1w_2w_3w_5$, $w_2w_5w_3w_4w_6$, $w_{23}w_5w_4w_3w_2$, $w_1w_4w_6w_3w_7$ или $w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$. Если T – максимальный тор, соответствующий сопряженному классу элемента w, тогда T имеет дополнение в $N(G,T)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательно все случаи из предположения леммы.

Тор 4. В этом случае $w = w_3w_1$ и

$$C_W(w) = \langle ww_0\rangle \times \langle w_2, w_{50}, w_7, w_6, w_5\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_6\,.$$

Здесь мы используем, что

$$\mathrm{S}_6 \simeq \langle a, b, c, d, e \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (cd)^3 = (de)^3$$
$$= [a, c] = [a, d] = [a, e] = [b, d] = [b, e] = [c, e] = 1\rangle,$$

и w_2, w_{50}, w_7, w_6, w_5 удовлетворяют этому множеству соотношений.

Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Положим

$$H_2 = (1, \alpha, 1, 1, \alpha, -1, -\alpha), H_3 = (1, \alpha, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha),$$

$$H_4 = H_5 = (-1, \alpha, 1, -1, \alpha, 1, \alpha) \text{ и } H_6 = (-1, \alpha, 1, -1, \alpha, -1, \alpha).$$

Пусть $n = n_3n_1$, $N_1 = nn_0$, $N_2 = H_2n_2$, $N_3 = H_3n_{50}$, $N_4 = H_4n_7$, $N_5 = H_5n_6$ и $N_6 = H_6n_5$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Поскольку $H_i^{-1}H_i^{n_0} = H_i^{-2} = 1$ для каждого $i \in \{2\ldots 6\}$, лемма 1.4.3 влечет, что $[n_0, N_2] = [n_0, N_3] = [n_0, N_4] = [n_0, N_5] = [n_0, N_6] = 1$. Используя MAGMA, мы видим, что $N_1^6 = 1$ и $[n_3n_1, n_2] = [n_3n_1, n_{50}] = [n_3n_1, n_7] = [n_3n_1, n_6] = [n_3n_1, n_5] = 1$, поэтому n_2, n_{50}, n_7, n_6, n_5 принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$.

По лемме 3.3.4 имеем $H^n = (\lambda_1^{-1}\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$. Поэтому $H_i^n = H_i$ для $i \in \{2, \ldots, 6\}$. Откуда получаем, что

$$H_i^{\sigma n} = (1, (-1)^{(q-1)/2}, 1, 1, (-1)^{(q-1)/2}, 1, (-1)^{(q-1)/2})H_i = H_i,$$

где $i \in \{2, \ldots, 6\}$ и, следовательно, $H_i \in \overline{T}_{\sigma n}$. Из леммы 1.4.3 следует, что $[n_3n_1, N_i] = 1$, где $i \in \{2, \ldots, 6\}$. Поэтому $K \simeq \langle N_1\rangle \times \langle N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle$.

Теперь докажем, что $N_2^2 = (N_2N_3)^3 = [N_2, N_4] = [N_2, N_5] = [N_2, N_6] = 1$. Поскольку $n_2^2 = h_2$, находим, что $(Hn_2)^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_4, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, \lambda_6^2, \lambda_7^2)$. Поэтому $N_2^2 = h_2h_5h_7 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_2, n_7] = [n_2, n_6] = [n_2, n_5] = 1$. Согласно лемме 1.4.3, чтобы доказать, что $[N_2, N_4] = [N_2, N_5] = [N_2, N_6] = 1$, достаточно проверить, что $H_4^{n_2} = H_4$, $H_5^{n_2} = H_5$, $H_6^{n_2} = H_6$ и $H_2 = H_2^{n_7} = H_2^{n_6} = H_2^{n_5}$. По лемме 3.3.4

мы видим, что

$$H^{n_2} = (\lambda_1, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7), H^{n_5} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6, \lambda_7),$$

$$H^{n_6} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_7) \text{ и } H^{n_7} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_6\lambda_7^{-1}).$$

Применяя эти равенства к H_2, H_4, H_5 и H_6, мы получаем, что N_2 коммутирует с N_4, N_5 и N_6. Наконец, заметим, что $N_2N_3 = H_2H_3^{n_2}n_2n_{50}$ и $H_2H_3^{n_2} = H_2(1, -\alpha, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha) = 1$. Поэтому $(N_2N_3)^3 = (n_2n_{50})^3 = 1$.

Теперь докажем, что $N_3^2 = (N_3N_4)^3 = 1$ и $[N_3, N_5] = [N_3, N_6] = 1$. Используя MAGMA, мы находим $n_{50}^2 = h_1h_2h_4h_6$. Лемма 3.3.4 влечет, что

$$\begin{aligned}(Hn_{50})^2 = (-\lambda_1^2\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_7, -\lambda_2^3\lambda_4^{-1}\lambda_7, \lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^{-2}\lambda_7^2, -\lambda_2^3\lambda_4^{-1}\lambda_7^3, \lambda_2^2\lambda_4^{-2}\lambda_5^2\lambda_7^2,\\ -\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_6^2\lambda_7, \lambda_7^2).\end{aligned}$$

Следовательно, $N_3^2 = h_2h_5h_7 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_{50}, n_6] = [n_{50}, n_5] = 1$. Из равенств выше, мы видим, что $H_3^{n_6} = H_3$ и $H_3^{n_5} = H_3$. Лемма 3.3.4 влечет, что $H^{-1}H^{n_{50}} = (t, t, t^2, t^3, t^2, t, 1)$, где $t = \lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_7$. Поэтому $H_5^{-1}H_5^{n_{50}} = H_6^{-1}H_6^{n_{50}} = 1$. По лемме 1.4.3 мы имеем, что N_3 коммутирует с N_5 и N_6. Заметим, что $N_3N_4 = H_3H_4^{n_{50}}n_{50}n_7$. Мы знаем, что $H_4 = H_5$ и $H_5^{n_{50}} = H_5$, поэтому $H_3H_4^{n_{50}} = H_3H_4 = h_1h_2h_4h_6h_7$. Используя MAGMA, мы видим, что $(h_1h_2h_4h_6h_7n_{50}n_7)^3 = 1$ и, следовательно, $(N_3N_4)^3 = 1$.

Теперь мы докажем, что $N_4^2 = (N_4N_5)^3 = 1$ и $[N_4, N_6] = 1$. Сначала заметим, что $N_4^2 = (H_4n_7)^2 = H_4H_4^{n_7}h_7$. Из равенства для H^{n_7} мы получаем, что $H_4^{n_7} = H_4h_7$ и поэтому $N_4^2 = 1$. Поскольку $N_4N_5 = H_4H_5^{n_7}n_7n_6$ и $H_4H_5^{n_7} = H_4H_4^{n_7} = h_7$, мы имеем $(N_4N_5)^3 = (h_7n_7n_6)^3 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[n_7, n_5] = 1$, поэтому $[N_4, N_6] = 1$ эквивалентно $H_4^{-1}H_4^{n_5} = H_6^{-1}H_6^{n_7}$. Из равенств для H^{n_7} и H^{n_5}, мы имеем $H_4 = H_4^{n_5}$ и $H_6 = H_6^{n_7}$. Следовательно, N_4 и N_6 коммутируют.

Наконец, мы проверим, что $N_5^2 = N_6^2 = (N_5N_6)^3 = 1$. Поскольку $N_5^2 = H_5H_5^{n_6}h_6$ и $N_6^2 = H_6H_6^{n_5}h_5$, мы имеем $N_5^2 = N_6^2 = 1$. Заметим, что $N_5N_6 = H_5H_6^{n_6}n_6n_5 = H_5(-1, \alpha, 1, -1, \alpha, 1, \alpha)n_6n_5 = h_2h_5h_7n_6n_5 = n_6n_5$, поэтому $(N_5N_6)^3 = (n_6n_5)^3 = 1$. Значит $\langle N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\rangle \simeq \mathrm{S}_6$ и, следовательно, $K \simeq C_W(w)$.

Тор 6. В этом случае $w = w_1w_3w_5$ сопряжен с $w' = w_1w_2w_3$, и $C_W(w') = \langle w'\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_5, w_6, w_7\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$.

Пусть $n = n_1n_2n_3$ и $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Используя MAGMA, мы видим, что $[n, n_5] = [n, n_6] = [n, n_7] = 1$ и $n_5, n_6, n_7 \in \overline{N}_{\sigma n}$. Положим

$$H_2 = (-1, \alpha, 1, -1, \alpha, -1, \alpha), H_3 = H_4 = (-1, \alpha, 1, -1, \alpha, 1, \alpha).$$

По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7).$$

Тогда $H_2^{\sigma n} = (-1, \alpha, 1, -1, \alpha, -1, \alpha)^\sigma = H_2$ и $H_2 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Нетрудно видеть, что $h_6 \in \overline{T}_{\sigma n}$ и, следовательно, $H_3, H_4 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Пусть $N_2 = H_2n_5, N_3 = H_3n_6, N_4 = H_4n_7$. Мы утверждаем, что $\langle N_2, N_3, N_4\rangle \simeq \mathrm{S}_4$.

По лемме 3.3.4 имеем

$$H^{n_5} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6, \lambda_7), H^{n_6} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_7),$$

$$H^{n_7} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_6\lambda_7^{-1}).$$

Тогда $N_2^2 = H_2H_2^{n_5}n_5^2 = h_2h_7h_5 = 1$. Аналогично получаем, что $N_3^2 = N_4^2 = h_2h_5h_7 = 1$. Более того, имеем

$$N_2N_3 = H_2H_3^{n_5}n_5n_6 = H_2(-1, \alpha, 1, -1, \alpha, 1, \alpha)n_5n_6 = h_6n_5n_6, \text{ и}$$

$$N_3N_4 = H_3H_4^{n_6}n_6n_7 = H_3(-1, \alpha, 1, -1, \alpha, -1, \alpha)n_6n_7 = h_6n_6n_7.$$

Вычисления в MAGMA показывают, что $(h_6n_5n_6)^3 = (h_6n_6n_7)^3 = 1$. Следовательно, $(N_2N_3)^3 = (N_3N_4)^3 = 1$ и $\langle N_2, N_3, N_4\rangle \simeq \mathrm{S}_4$.

Предположим, что $q \equiv 3 \pmod 4$. Пусть $\beta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\beta^{q+1} = -1$,

$$H_1 = (1, \beta, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha), H_0 = (1, \alpha\beta, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha).$$

Тогда $\alpha^q = -\alpha$ и $H_1^{\sigma n} = (1, \beta^{-1}, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha)^\sigma = (1, -\beta, 1, 1, \alpha, -1, -\alpha) = H_1$. Поэтому мы имеем $H_1 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Поскольку $H_0 = H_1(1, \alpha, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $(1, \alpha, 1, 1, 1, 1, 1)^{\sigma n} = (1, \alpha^{-1}, 1, 1, 1, 1, 1)^\sigma = (1, \alpha, 1, 1, 1, 1, 1)$, мы также получаем, что $H_0 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Пусть $N_1 = H_1n$ и $N_0 = H_0n_0$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_0, N_2, N_3, N_4\rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $n^6 = h_2$. По лемме 3.3.4 имеем $(Hn)^6 = (\lambda_4^2, -\lambda_4^3, \lambda_4^4, \lambda_4^6, \lambda_5^6, \lambda_6^6, \lambda_7^6)$. Следовательно $N_1^6 = h_2 h_5 h_7 = 1$.

Используя равенства выше, находим

$$H_1^{-1}H_1^{n_5} = H_1^{-1}H_1^{n_6} = H_1^{-1}H_1^{n_7} = 1, H_1^{-1}H_1^{N_0} = (1, \beta^{-2}, 1, 1, -1, 1, -1).$$

Более того, мы видим, что $H_2^{-1}H_2^n = H_3^{-1}H_3^n = H_4^{-1}H_4^n = 1$ и $H_0^{-1}H_0^n = (1, -\beta^{-2}, 1, 1, 1, 1, 1)$. Следовательно, по лемме 1.4.3 получаем, что $[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = [N_1, N_4] = [N_1, N_0] = 1$.

Теперь имеем $H_2^{-2} = H_3^{-2} = H_4^{-2} = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$. С другой стороны $H_0^{-1}H_0^{n_5} = H_0^{-1}H_0^{n_6} = H_0^{-1}H_0^{n_7} = 1$ и, следовательно, лемма 1.4.3 влечет, что $[N_0, N_2] = [N_0, N_3] = [N_0, N_4] = 1$. Поэтому $K \simeq \langle N_1 \rangle \times \langle N_0 \rangle \times \langle N_2, N_3, N_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$ является дополнением для $\overline{T}_{\sigma n}$.

Предположим, что $q \equiv 1 \pmod 4$. Пусть $\alpha, \delta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такие, что $\alpha^2 = -1$ и $\delta^{q-1} = -1$. Заметим, что $\alpha^q = \alpha$ и $\delta^q = -\delta$. Положим

$$H_1 = (1, 1, 1, 1, \alpha, -1, -\alpha) \text{ и } H_0 = (\delta^4, \alpha\delta^6, \delta^8, \delta^{12}, \delta^9, \delta^6, \delta^3).$$

Тогда $H_1^{\sigma n} = (1, 1, 1, 1, \alpha, -1, -\alpha)^\sigma = H_1$ и поэтому $H_1 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Теперь

$$\begin{aligned} H_0^{\sigma n} &= (\delta^{-8}\delta^{12}, -\alpha\delta^6, \delta^4\delta^{-8}\delta^{12}, \delta^{12}, \delta^9, \delta^6, \delta^3)^\sigma \\ &= (\delta^4, -\alpha\delta^6, \delta^8, \delta^{12}, -\delta^9, \delta^6, -\delta^3) = H_0 \end{aligned}$$

и, следовательно, $H_0 \in \overline{T}_{\sigma n}$.

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_0 \rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$. Как было показано выше, мы имеем $(Hn)^6 = (\lambda_4^2, -\lambda_4^3, \lambda_4^4, \lambda_4^6, \lambda_5^6, \lambda_6^6, \lambda_7^6)$. Поэтому $N_1^6 = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$.

Из вычислений выше получаем $H_2^{-1}H_2^n = H_3^{-1}H_3^n = H_4^{-1}H_4^n = 1$.

Поскольку $H^{-1}H^n = (\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-2}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-2}\lambda_4, 1, 1, 1, 1)$, находим

$$H_0^{-1}H_0^n = (1, -1, 1, 1, 1, 1, 1) = h_2.$$

Напомним, что

$$H^{-1}H^{n_5} = (1, 1, 1, 1, \lambda_4\lambda_5^{-2}\lambda_6, 1, 1), H^{-1}H^{n_6} = (1, 1, 1, 1, 1, \lambda_5\lambda_6^{-2}\lambda_7, 1),$$

$H^{-1}H^{n_7} = (1,1,1,1,1,1,\lambda_6\lambda_7^{-2})$. Тогда $H_1^{-1}H_1^{n_5} = H_1^{-1}H_1^{n_6} = H_1^{-1}H_1^{n_7} = 1$ и

$$H_1^{-1}H_1^{N_0} = H_1^{-2} = (1,1,1,1,-1,1,-1) = h_5h_7 = h_2.$$

Следовательно, по лемме 1.4.3 мы получаем

$$[N_1, N_2] = [N_1, N_3] = [N_1, N_4] = [N_1, N_0] = 1.$$

Далее $H_0^{-1}H_0^{n_5} = H_0^{-1}H_0^{n_6} = H_0^{-1}H_0^{n_7} = 1$ и по лемме 1.4.3 мы получаем $[N_0, N_2] = [N_0, N_3] = [N_0, N_4] = 1$. Следовательно $K \simeq \langle N_1\rangle \times \langle N_0\rangle \times \langle N_2, N_3, N_4\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$.

Тор 9. В этом случае $w = w_1w_2w_3w_5$, и $C_W(w) = \langle w_0w^2\rangle \times \langle w_7\rangle \times \langle w_5, w_{58}w_{59}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times D_8$.

Пусть $n = h_4n_1n_2n_3n_5$ и $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Обозначим $N_1 = n_0n^2$, $N_2 = H_1n_7$, $N_3 = H_1h_6n_5$ и $N_4 = H_1h_1h_4n_{58}n_{59}$, где $H_1 = (-1,\alpha,1,-1,-\alpha,1,\alpha)$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4\rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Используя MAGMA, видим, что $[n, n_7] = [n, h_6n_5] = [n, h_1h_4n_{58}n_{59}] = 1$, поэтому n_7, h_6n_5 и $h_1h_4n_{58}n_{59}$ принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$. Теперь проверим, что $H_1 \in \overline{T}_{\sigma n}$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6, \lambda_7).$$

Применяя это равенство к H_1, находим

$$H_1^n = (-1, -\alpha^{-1}, 1, -1, -(-\alpha)^{-1}, 1, \alpha) = H_1.$$

Тогда $H_1^\sigma = (-1, \alpha^q, 1, -1, (-\alpha)^q, 1, \alpha^q) = (1, \alpha^{q-1}, 1, 1, \alpha^{q-1}, 1, \alpha^{q-1})H_1 = H_1$ и поэтому $H_1 \in \overline{T}_{\sigma n}$. Значит N_2, N_3 и N_4 принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $N_1^6 = 1$. Теперь проверим, что $[N_1, N_2] = 1$, $[N_1, N_3] = 1$ и $[N_1, N_4] = 1$. Используя MAGMA, находим $[N_1, n_7] = [N_1, h_6n_5] = [N_1, h_1h_4n_{58}n_{59}] = 1$. По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{N_1} = (\lambda_3^{-1}, \lambda_2^{-2}, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}, \lambda_4^{-2}, \lambda_5^{-2}, \lambda_6^{-2}, \lambda_7^{-2}).$$

Поэтому $H_1^{-1}H_1^{N_1} = h_2h_5h_7 = 1$ и, следовательно, N_1 коммутирует с N_2, N_3 и N_4 в силу леммы 1.4.3. Значит $K \simeq \langle N_1\rangle \times \langle N_2, N_3, N_4\rangle$.

Теперь докажем, что $N_2^2 = 1$ и $[N_2, N_3] = [N_2, N_4] = 1$. Поскольку $n_7^2 = h_7$, имеем $N_2^2 = H_1 H_1^{n_7} h_7$. По лемме 3.3.4 $H^{n_7} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_6\lambda_7^{-1})$ и поэтому $H_1^{n_7} = h_7 H_1$. Значит $N_2^2 = h_2 h_5 h_7 h_7^2 = 1$. Используя MAGMA, видим, что $[n_7, h_6 n_5] = h_7$ и $[n_7, h_1 h_4 n_{58} n_{59}] = 1$. По лемме 3.3.4

$$H^{n_5} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_4\lambda_5^{-1}\lambda_6, \lambda_6, \lambda_7),$$

$$H^{n_{58}n_{59}} = (\lambda_1\lambda_6^{-1}, \lambda_5\lambda_6^{-2}, \lambda_3\lambda_6^{-2}, \lambda_4\lambda_6^{-3}, \lambda_2\lambda_6^{-2}, \lambda_6^{-1}, \lambda_6^{-1}\lambda_7).$$

Применяя эти равенства к H_1, находим, что $H_1^{n_5} = H_1$, $H_1^{n_{58}n_{59}} = h_2 h_5 H_1 = h_7 H_1$. Мы получили ранее, что $H_1^{n_7} = H_1 h_7$, поэтому $h_7 H_1^{n_5} = H_1^{n_7} = H_1^{n_{58}n_{59}}$. Из леммы 1.4.3 следует, что $[N_2, N_3] = [N_2, N_4] = 1$.

Теперь мы покажем, что $\langle N_3, N_4\rangle \simeq D_8$. Для этого проверим равенства $N_3^2 = N_4^2 = (N_3 N_4)^4 = 1$. Используя MAGMA, мы видим, что $(h_6 n_5)^2 = 1$ и $(h_1 h_4 n_{58} n_{59})^2 = h_7$. По лемме 3.3.4

$$(H h_6 n_5)^2 = (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_4\lambda_6, \lambda_6^2, \lambda_7^2),$$

$$(H h_1 h_4 n_{58} n_{59})^2 = (\lambda_1^2\lambda_6^{-1}, \lambda_2\lambda_5\lambda_6^{-2}, \lambda_3^2\lambda_6^{-2}, \lambda_4^2\lambda_6^{-3}, \lambda_2\lambda_5\lambda_6^{-2}, 1, -\lambda_6^{-1}\lambda_7^2).$$

Применяя эти равенства к H_1, находим $N_3^2 = N_4^2 = 1$. Поскольку

$$\begin{aligned}(H_1 h_6 n_5)(H_1 h_1 h_4 n_{58} n_{59}) &= (H_1 H_1^{n_5})(h_6 n_5 h_1 h_4 n_{58} n_{59}) \\ &= (H_1^2)(h_6 n_5 h_1 h_4 n_{58} n_{59}) = h_6 n_5 H_1 h_1 h_4 n_{58} n_{59},\end{aligned}$$

мы заключаем, что $(N_3 N_4)^4 = (h_6 n_5 h_1 h_4 n_{58} n_{59})^4 = 1$.

Поэтому $K \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times D_8 \simeq C_W(w)$ и, следовательно, K – требуемое дополнение.

Тор 13. В этом случае $w = w_3 w_2 w_5 w_4$, и $C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$. Используя GAP, видим, что

$$\begin{aligned}C_W(w) \simeq \langle a, b, c, d \mid a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = [a, b] = [a, c] = [a, d] \\ = (bd)^2 = (bc)^4 = (cd)^3 = 1\rangle,\end{aligned}$$

и w, w_7, $w_{23}w_{24}$, $w_{20}w_{21}$ – элементы группы $C_W(w)$, которые удовлетворяют этому множеству соотношений.

Пусть $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такие, что $\alpha^2 = -1$ и $\beta^{q-1} = (-1)^{(q+1)/2}$. Пусть $n = n_3n_2n_5n_4$, $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2n_7$, $N_3 = h_4h_6n_{23}n_{24}$ и $N_4 = h_3h_5n_{20}n_{21}$, где $H_1 = (-1, \alpha, 1, -1, -\alpha, 1, \alpha)$ и $H_2 = (1, \alpha, -1, 1, \alpha, 1, \beta)$.

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Сначала проверим, что H_1 и H_2 принадлежат $\overline{T}_{\sigma n}$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6, \lambda_6, \lambda_7).$$

Поэтому $H_1^n = H_1$ и $H_2^n = (1, -\alpha, -1, 1, -\alpha, 1, \beta)$. Тогда

$$H_1^{\sigma n} = H_1(1, (-1)^{(q-1)/2}, 1, 1, (-1)^{(q-1)/2}, 1, (-1)^{(q-1)/2}) = H_1$$

и $H_2^{\sigma n} = (1, \alpha(-1)^{(q+1)/2}, -1, 1, \alpha(-1)^{(q+1)/2}, 1, \beta^q)$. Из равенства выше $\beta^q = \beta(-1)^{(q+1)/2}$, поэтому $H_2^{\sigma n} = H_2$ и, следовательно, H_1, H_2 принадлежат $\overline{T}_{\sigma n}$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $[n, n_7] = [n, N_3] = [n, N_4] = 1$ и, следовательно, N_1, N_2, N_3 и N_4 лежат в $\overline{N}_{\sigma n}$. Поскольку $n^6 = 1$, лемма 3.3.4 влечет, что $(Hn)^6 = (\lambda_1^6, \lambda_1^3\lambda_6^3, \lambda_1^6\lambda_6^3, \lambda_1^6\lambda_6^6, \lambda_1^3\lambda_6^6, \lambda_6^6, \lambda_7^6)$. Поэтому $N_1^6 = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$. Теперь мы докажем, что N_1 коммутирует с N_2, N_3 и N_4. По лемме 1.4.3 достаточно проверить, что $H_1^{-1}H_1^{N_3} = H_1^{-1}H_1^{N_4} = 1$ и $H_1^{-1}H_1^{n_7} = H_2^{-1}H_2^n$. По лемме 3.3.4 получаем, что

$$H^{-1}H^{N_3} = (1, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_1\lambda_6^{-2}\lambda_7^2, \lambda_1\lambda_6^{-2}\lambda_7^2, \lambda_1\lambda_6^{-2}\lambda_7^2, 1),$$

$$H^{-1}H^{N_4} = (\lambda_1^{-2}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_5, \lambda_1^{-2}\lambda_6, \lambda_1^{-2}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_5^{-1}\lambda_6, 1, 1),$$

$$H^{-1}H^{n_7} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \lambda_6\lambda_7^{-2}).$$

Поэтому $H_1^{-1}H_1^{N_3} = 1$, $H_1^{-1}H_1^{N_4} = 1$ и $H_1^{-1}H_1^{n_7} = h_7$. Ранее мы получили, что $H_2^n = (1, -\alpha, -1, 1, -\alpha, 1, \beta) = h_2h_5H_2 = h_7H_2$ и, следовательно, $H_2^{-1}H_2^n = H_1^{-1}H_1^{n_7}$. Поэтому $K \simeq \langle N_1 \rangle \times \langle N_2, N_3, N_4 \rangle$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $N_3^2 = N_4^2 = (N_3N_4)^3 = 1$, поэтому осталось проверить, что $N_2^2 = (N_2N_3)^4 = (N_2N_4)^2 = 1$. Поскольку $n_7^2 = h_7$, $(n_7N_3)^4 = h_2h_3$ и $(n_7N_4)^2 = h_7$, лемма 3.3.4 влечет, что

$$(Hn_7)^2 = (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_5^2, \lambda_6^2, -\lambda_6),$$

$$(Hn_7N_3)^4 = (\lambda_1^4, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_6^{-2}, -\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_6^{-2}, \lambda_1^4\lambda_4^4\lambda_6^{-4}, \lambda_1^4\lambda_5^4\lambda_6^{-4}, \lambda_1^4, \lambda_1^2),$$

$$(Hn_7N_4)^2 = (\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_5, \lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_6, \lambda_1^{-2}\lambda_4^2\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_5\lambda_6, \lambda_6^2, -\lambda_6).$$

Применяя эти равенства к H_2 получаем $N_2^2 = h_2h_5h_7 = 1$, $(N_2N_3)^4 = 1$ и $(N_2N_4)^2 = h_2h_5h_7 = 1$. Поэтому $K \simeq C_W(w)$ и, следовательно, K – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$.

Тор 19. В этом случае $w = w_2w_5w_3w_4w_6$, и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_{63}\rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Пусть $n = n_2n_5n_3n_4n_6$. Применяя MAGMA, видим, что $[n, n_{63}] = 1$ и, следовательно, $n_{63} \in \overline{N}_{\sigma n}$.

Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Положим $H_2 = (-1, \alpha, 1, -1, -\alpha, 1, \alpha)$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_7).$$

Используя это равенство, видим, что $H_2^{\sigma n} = H_2^{\sigma} = H_2$ и, следовательно, $H_2 \in \overline{T}_{\sigma n}$.

Пусть $N_2 = H_2n_{63}$. Мы утверждаем, что $K = \langle n, n_0, N_2\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $n^8 = 1$. Поскольку $H_2^n = H_2$, мы имеем $H_2^{-1}H_2^n = 1$, и равенство $nN_2 = N_2n$ следует из леммы 1.4.3. Поэтому $K \simeq \langle n\rangle \times \langle n_0, N_2\rangle$.

По лемме 3.3.4 $H^{n_{63}} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-2}\lambda_2, \lambda_1^{-3}\lambda_3, \lambda_1^{-4}\lambda_4, \lambda_1^{-3}\lambda_5, \lambda_1^{-2}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_7)$. Тогда $N_2^2 = H_2H_2^{n_{63}}h_2h_3 = 1$. Наконец, имеем

$$H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2} = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$$

и, следовательно, $N_2n_0 = n_0N_2$ по лемме 1.4.3. Поэтому $K = \langle n\rangle \times \langle n_0\rangle \times \langle N_2\rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, как и утверждалось.

Тор 20. В этом случае $w = w_{23}w_5w_4w_3w_2$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_{63}\rangle \simeq \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Пусть α – элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$ и $n = n_{23}n_5n_4n_3n_2$. Положим $N_1 = h_1n$ и $N_2 = H_2n_{63}$, где $H_2 = (-1, -\alpha, 1, 1, \alpha, -1, \alpha)$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}\lambda_4\lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}\lambda_4\lambda_7, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_7, \lambda_7)$$

Используя это равенство, видим, что $H_2^n = h_2h_3H_2$ и поэтому $H_2^{n\sigma}h_2h_3 = H_2$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[N_1, n_{63}] = h_2h_3$. Следовательно, $H_2^{n\sigma}[N_1, n_{63}] = H_2$ и $N_2 \in \overline{N}_{\sigma n}$ в силу леммы 1.4.2.

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, N_2, n_0\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $N_1^{12} = 1$. По лемме 3.3.4

$$H^{n_{63}} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-2}\lambda_2, \lambda_1^{-3}\lambda_3, \lambda_1^{-4}\lambda_4, \lambda_1^{-3}\lambda_5, \lambda_1^{-2}\lambda_6, \lambda_1^{-1}\lambda_7).$$

Тогда $N_2^2 = H_2H_2^{n_{63}}h_2h_3 = 1$. Далее имеем, что

$$H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2} = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$$

и, следовательно, $N_2n_0 = n_0N_2$ по лемме 1.4.3. Поэтому $K \simeq \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, как и утверждалось.

Тор 26. В этом случае $w = w_1w_4w_6w_3w_7$, и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_{59}\rangle \simeq \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Положим $n = n_1n_4n_6n_3n_7$, $N_1 = h_2n$ и $N_2 = H_2h_3n_{59}$, где $H_2 = (1, \alpha, 1, 1, -\alpha, -1, \alpha)$. Вычисления в MAGMA показывают, что $[N_1, h_3n_{59}] = 1$ и, следовательно, $h_3n_{59} \in \overline{N}_{\sigma n}$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_5, \lambda_5, \lambda_5\lambda_7^{-1}, \lambda_6\lambda_7^{-1}).$$

Используя это равенство, видим, что $H_2^{\sigma n} = H_2^\sigma = H_2$. Поэтому $H_2 \in \overline{N}_{\sigma n}$ и $N_2 \in \overline{N}_{\sigma n}$.

Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, n_0, N_2\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $N_1^{12} = 1$. Поскольку $H_2^n = H_2$, имеем $H_2^{-1}H_2^n = 1$. Следовательно, равенство $N_1N_2 = N_2N_1$ следует из леммы 1.4.3.

По лемме 3.3.4

$$H^{n_{59}} = (\lambda_1\lambda_2\lambda_5^{-1}, \lambda_2^2\lambda_5^{-1}, \lambda_2^2\lambda_3\lambda_5^{-2}, \lambda_2^3\lambda_4\lambda_5^{-3}, \lambda_2^3\lambda_5^{-2}, \lambda_2^2\lambda_5^{-2}\lambda_6, \lambda_2\lambda_5^{-1}\lambda_7).$$

Тогда $N_2^2 = H_2H_2^{n_{59}}h_1h_4 = 1$. Далее, мы видим, что $H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2} = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$ и в силу леммы 1.4.3 имеем $N_2n_0 = n_0N_2$. Поэтому мы заключаем, что $K = \langle N_1\rangle \times \langle N_2\rangle \times \langle n_0\rangle \simeq \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, как и утверждалось.

Тор 30. В этом случае $w = w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$ и $C_W(w) = \langle w\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_{53}\rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Положим $n = n_{39}n_3n_5n_1n_4n_6$. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_{53}] = 1$ и, следовательно, $n_{53} \in \overline{N}_{\sigma n}$.

Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$ и $H_2 = (1, \alpha, -1, -1, -\alpha, 1, -\alpha)$. По лемме 3.3.4

$$H^n = (\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_7^{-1}, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_7^{-1}, \lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-2}\lambda_5^2\lambda_7^{-1}, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-2}\lambda_5^2\lambda_7^{-1},$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4^{-2}\lambda_5^2\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5^2\lambda_6^{-1}, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_5).$$

Используя это равенство, получаем, что $H_2^{\sigma n} = (1, -\alpha, -1, -1, \alpha, 1, \alpha)^\sigma = H_2$ и, следовательно, $H_2 \in \overline{T}_{\sigma n}$.

Пусть $N_1 = n$ и $N_2 = H_2 n_{53}$. Мы утверждаем, что $K = \langle N_1, n_0, N_2 \rangle$ – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ in $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $N_1^8 = 1$. Поскольку $H_2^n = H_2$, имеем $H_2^{-1}H_2^n = 1$, и равенство $N_1N_2 = N_2N_1$ следует из леммы 1.4.3. По лемме 3.3.4

$$H^{n_{53}} = (\lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_7, \lambda_2^{-1}\lambda_7^2, \lambda_2^{-2}\lambda_3\lambda_7^2, \lambda_2^{-3}\lambda_4\lambda_7^3, \lambda_2^{-2}\lambda_5\lambda_7^2, \lambda_2^{-1}\lambda_6\lambda_7, \lambda_7).$$

Тогда $N_2^2 = H_2H_2^{n_{53}}h_1h_4h_6 = H_2(-1, \alpha, -1, 1, -\alpha, -1, -\alpha)h_1h_4h_6 = 1$. Далее $H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2} = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1) = 1$, и в силу леммы 1.4.3 мы имеем $N_2n_0 = n_0N_2$. Поэтому $K = \langle N_1 \rangle \times \langle N_2 \rangle \times \langle n_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, как и утверждалось. □

Лемма 3.3.9. *Предположим, что w, либо ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов: $w_1w_5w_3w_6$, $w_1w_4w_3w_2$, $w_1w_5w_3w_6w_2$, $w_1w_4w_5w_3w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3w_5$, $w_1w_5w_2w_3w_6w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3w_5w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3w_2w_5$, $w_1w_4w_6w_{16}w_3w_2w_6$, $w_1w_4w_{16}w_3w_2w_{40}$, $w_1w_4w_6w_2w_3w_7$, $w_1w_4w_6w_3w_5w_7$. Тогда T имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе.*

Доказательство. Наша стратегия одинакова во всех случаях. Для каждого элемента w выберем $n \in \mathcal{T}$ такой, что $\pi(n) = w$ и предъявим множество соотношений, определяющих $C_W(w)$. Затем мы проверяем, что порождающие подгруппы в $\overline{N}_{\sigma n}$ удовлетворяют этому множеству соотношений и порождают дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$. Все данные приведены в таблице 3.4. В качестве примера мы рассмотрим случай $w = w_1w_5w_3w_6$, который соответствует Тору 10 в таблице 3.5. В этом случае $C_W(w) = \langle ww_0 \rangle \times \langle w_2, w_{53} \rangle \times \langle w_2w_{32}w_{35}w_{46}, w_2w_{28}w_{42}w_{43} \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3$. Используя GAP, находим, что $C_W(w)$ имеет следующее копредставление:

$$\langle a, b, c, d, e \mid a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = [a, b] = [a, c] = [a, d] = [a, e]$$
$$= (bc)^3 = (de)^3 = [b, d] = [b, e] = [c, d] = [c, e] = 1 \rangle$$

Более того, можно проверить, что ww_0, w_2, w_{53}, $w_2w_{32}w_{35}w_{46}$, $w_2w_{28}w_{42}w_{43}$ удовлетворяют этому множеству соотношений. Рассмотрим элементы $a = n_0n$, $b = h_{53}n_2$, $c = h_2n_{53}$, $d = h_1h_6n_2n_{32}n_{35}n_{46}$ и $e = h_1h_3h_6n_2n_{28}n_{42}n_{43}$. Тогда вычисления в MAGMA показывают, что a, b, c, d и e удовлетворяют соотношениям для $C_W(w)$, поэтому $K = \langle a, b, c, d, e\rangle$ – гомоморфный образ группы $C_W(w)$. С другой стороны имеем $\pi(K) = C_W(w)$ и, следовательно, $K \simeq C_W(w)$. Пусть $n = n_1n_5n_3n_6$. Тогда, вычисления показывают, что $[n, a] = [n, b] = [n, c] = [n, d] = [n, e] = 1$, откуда $a, b, c, d, e \in \overline{N}_{\sigma n}$ в силу леммы 1.4.2. Поэтому K – дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Остальные случаи могут быть проверены таким же образом. Первый столбец таблицы 3.4 содержит номер тора в соответствии с таблицей 3.5. Второй столбец для каждого элемента w содержит множество соотношений $S(w)$, которые определяют группу $C_W(w)$. Третий столбец содержит примеры порождающих дополнения. Все такие порождающие лежат в $\mathcal{T}$. Поэтому, в каждом случае можно проверить, используя MAGMA, что порождающие удовлетворяют соотношениям из $S(w)$. Естественный прообраз w в $\mathcal{T}$ обозначается через n. В каждом из случаев мы выбираем элемент $x \in \mathcal{T}$ и рассматриваем группы $\overline{T}_{\sigma x}$ и $\overline{N}_{\sigma x}$. Обычно $x = n$, но иногда они отличаются. Чтобы проверить, что порождающий y лежит в $\overline{N}_{\sigma x}$, достаточно проверить, что $[x, y] = 1$ и применить лемму 1.4.2. Поэтому элементы из третьего столбца порождают дополнение для $\overline{T}_{\sigma x}$ и, следовательно, $N(G, T)$ расщепляется над T по замечанию 1.3.4.

Для удобства мы добавили все проверяемые равенства в [49].

Таблица 3.4: Расщепляемые нормализаторы максимальных торов группы $E_7^{ad}(q)$

№	определяющие соотношения для группы $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
10	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1$, $[a, b] = [a, c] = [a, d] = [a, e] = 1$, $(bc)^3 = (de)^3 = [b, d] = [b, e] = 1$,	$x = n$, $a = n_0n$, $b = h_{53}n_2$, $c = h_2n_{53}$, $d = h_1h_6n_2n_{32}n_{35}n_{46}$,

Продолжение таблицы 3.4

№	определяющие соотношения для группы $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
	$[c,d]=[c,e]=1$	$e=h_1h_3h_6n_2n_{28}n_{42}n_{43}$
12	$a^{10}=[a,b]=[a,c]=1,$ $b^2=c^2=(bc)^3=1$	$x=n$, $a=n_0n$, $b=h_7n_6$, $c=h_6n_7$
15	$a^6=b^2=c^2=d^2=(cd)^3=1,$ $[a,b]=[a,c]=[a,d]=1,$ $[b,c]=[b,d]=1$	$a=x=h_4n$, $b=n_0$, $c=h_4n_{32}n_{35}n_{46}$, $d=h_1h_4h_6n_{28}n_{42}n_{43}$
17	$a^{10}=b^2=[a,b]=1$	$a=x=h_2n$, $b=n_0$
18	$a^6=b^2=c^2=1,$ $[a,b]=[a,c]=[b,c]=1$	$a=x=h_2n$, $b=n_0$, $c=h_3h_7n_{53}$
21	$a^3=b^2=c^3=d^4=1,$ $[a,b]=[a,c]=[a,d]=1,$ $[b,c]=[b,d]=1,$ $c^{-1}a(d^{-1}c^{-1})^2d^{-1}=1,$ $da^{-1}c^{-1}d(dc^{-1})^2d^{-1}cd^{-1}c^{-1}=1$	$a=x=n$, $b=n_0$, $c=n_5n_6$, $d=h_1h_3h_4n_1n_4n_8n_{22}$
22	такие же как и в Торе 15	$a=x=h_1n$, $b=n_0$, $c=h_{33}n_{53}$, $d=h_{53}n_{33}$
23	$a^{12}=b^2=[a,b]=1$	$a=x=n$, $b=n_0$
24	$a^9=b^2=[a,b]=1$	$a=x=n$, $b=n_0$
25	$a^6=[a,b]=[a,c]=[a,d]=1,$ $d^3=c^{-1}bcb=b^2c^{-2}=1,$ $bdc^{-1}d^{-1}=bcdbd^{-1}=1$	$x=n$, $a=x^2n_0$, $b=h_1h_2h_5n_3n_6n_{22}n_{32}$, $c=h_2h_3h_4h_5n_3n_6n_{16}n_{38}$, $d=h_1h_2h_4h_6n_1n_4n_6n_{15}n_{23}n_{46}$
27	$a^{30}=1$	$x=n$, $a=xn_0$
29	$a^{14}=1$	$x=n$, $a=xn_0$

□

Таблица 3.5: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $E_7^{ad}(q)$

№	представитель w	$\lvert w\rvert$	циклическое строение $(2, q-1).T$	
1	1	1	$(q-1)^7$	−
2	w_1	2	$(q-1)^5 \times (q^2-1)$	−
3	w_1w_2	2	$(q-1)^3 \times (q^2-1)^2$	−
4	w_3w_1	3	$(q-1)^4 \times (q^3-1)$	+
5	$w_2w_3w_5$	2	$(q-1) \times (q^2-1)^3$	−
6	$w_1w_3w_5$	6	$(q-1)^2 \times (q^2-1) \times (q^3-1)$	+
7	$w_1w_3w_4$	4	$(q-1)^3 \times (q^4-1)$	−
8	$w_1w_4w_6w_{53}$	2	$(q-1) \times (q+1)^2 \times (q^2-1)^2$	−
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$(q-1) \times (q^2-1) \times (q+1)(q^3-1)$	+
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$(q-1) \times (q^3-1)^2$	+
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$(q-1) \times (q^2-1) \times (q^4-1)$	−
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$(q-1)^2 \times (q^5-1)$	+
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$(q-1) \times (q^2-1) \times (q-1)(q^3+1)$	+
14	$w_3w_2w_4w_{16}$	4	$(q-1) \times ((q-1)(q^2+1))^2$	−
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$(q^3-1) \times (q+1)(q^3-1)$	+
16	$w_1w_4w_6w_3w_{53}$	4	$(q-1) \times (q+1)^2 \times (q^4-1)$	−
17	$w_1w_4w_5w_3w_{53}$	10	$(q-1) \times (q+1)(q^5-1)$	+
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$(q-1) \times (q^6-1)$	+
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$(q-1) \times (q^2-1)(q^4+1)$	+
20	$w_{23}w_5w_4w_3w_2$	12	$(q-1) \times (q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	+
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{53}$	3	$(q^2+q+1)^2 \times (q^3-1)$	+
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{53}$	6	$(q^3+1) \times (q^3-1) \times (q+1)$	+
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$(q^3-1)(q^4-q^2+1)$	+
24	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_6$	9	$(q-1)(q^6+q^3+1)$	+
25	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_{40}$	6	$(q^2-q+1) \times (q-1)(q^4+q^2+1)$	+

Продолжение таблицы 3.5

№	представитель w	$\lvert w\rvert$	циклическое строение $(2, q-1).T$	
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$(q^3-1)\times(q^4-1)$	+
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$(q^5-1)(q^2+q+1)$	+
28	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	4	$(q-1)(q^2+1)\times(q^2-1)\times(q^2+1)$	−
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	q^7-1	+
30	$w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$(q^4+1)\times(q-1)(q^2+1)$	+

Теорема 3.3.2 доказана.

3.4 Исключительные группы $E_8(q)$

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа E_8. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа лиева типа E_8 над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$. Пусть $\overline{T}$ — максимальный тор в группе $\overline{G}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $p=2$.*

При переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. Мы нумеруем классы сопряженности группы W и корни соответствующей корневой системы как в [29]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7, r_8\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_8, тогда $r_{18} = r_2 + r_4 + r_5$, $r_{26} = r_2 + r_4 + r_5 + r_6$, $r_{46} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$, $r_{69} = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6$, $r_{74} = r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + 2r_6 + 2r_7 + r_8$ и $r_{120} = 2r_1 + 3r_2 + 4r_3 + 6r_4 + 5r_5 + 4r_6 + 3r_7 + 2r_8$. Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i. Через U обозначим подгруппу группы W, порожденную элементами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$. Отметим, что U изоморфна группе Вейля типа E_6.

Ответ на проблему 2 для групп $E_8(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.4.2. *Пусть $G = E_8(q)$, W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *T не имеет дополнения в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов:*

1, w_1, w_1w_2, w_3w_1, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{69}$, $w_1w_2w_3w_5$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_3w_2w_5w_4$, $w_3w_2w_4w_{18}$, $w_1w_4w_6w_3w_{69}$, $w_2w_5w_3w_4w_6$, $w_{26}w_5w_4w_3w_2$, $w_1w_4w_6w_3w_7$, $w_3w_2w_4w_{18}w_7$, $w_{46}w_3w_5w_1w_4w_6$, $w_2w_3w_5w_7$, $w_{74}w_3w_2w_5w_4$, $w_8w_1w_4w_6w_3$, $w_1w_2w_3w_6w_8w_7$, $w_1w_4w_3w_7w_6w_8$, $w_4w_8w_2w_5w_7w_{120}$, $w_2w_3w_4w_8w_7w_{18}$, $w_2w_3w_4w_5w_6w_8$, $w_2w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$, $w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18}$, $w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74}$;

(2) *элемент w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$.*

Мы иллюстрируем результаты теоремы в таблице 3.9, а также в общей таблице 3.10.

Доказательство теоремы 3.4.1.

Поскольку случай $p = 2$ следует из замечания 1.4.1, мы предполагаем далее, что q нечетно. Матрица Картана (A_{ij}) корневой системы E_8 имеет вид

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группа Вейля W имеет порядок $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ и изоморфна группе $2.O_8^+(2) : 2$ (в обозначениях [25]).

Группу W можно записать в виде $W(E_8) = \langle w_{r_1}, \ldots, w_{r_8} | (w_{r_i} w_{r_j})^{m_{ij}} = 1 \rangle$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 2, & \text{если } A_{ij} = 0, \\ 3, & \text{если } A_{ij} = -1. \end{cases}$$

Поскольку фундаментальная группа $\Delta(E_8) = 1$, то универсальная группа совпадает с группой присоединенного типа. Тогда согласно [34, Теорема 1.12.1] имеем

$$H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_8) = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_8 = 1.$$

Предположим, что максимальный тор $\overline{T}$ имеет дополнение $\overline{K}$ в своем нормализаторе $\overline{N}$. Пусть N_i — прообраз элемента w_{r_i} в $\overline{K}$, где $i = 1, \ldots, 8$. Тогда $N_i = H_i n_{r_i}$ для некоторых H_i из тора $\overline{T}$ и $(N_i N_j)^{m_{ij}} = 1$. Пусть $N_3 = H_3 n_3, N_4 = H_4 n_4, N_5 = H_5 n_5$, где

$$H_3 = (\nu_1, \ldots, \nu_7), H_4 = (\mu_1, \ldots, \mu_7), H_5 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_7).$$

Поскольку $\overline{K}$ является дополнением, то должны выполняться равенства $N_4 N_k = N_k N_4$ при $k \in \{1, 6, 7, 8\}$, а также $N_4^2 = 1$.

В силу леммы 3.3.4 имеем

$$N_4^2 = (\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, -\mu_2\mu_3\mu_5, \mu_5^2, \mu_6^2, \mu_7^2, \mu_8^2) = 1,$$

откуда

$$\begin{cases} \mu_i^2 &= 1, \quad i \neq 4, \\ \mu_2\mu_3\mu_5 &= -1. \end{cases}$$

Из равенств $N_4 N_k = N_k N_4$ в силу леммы 1.4.3 получаем, что

$$\begin{cases} \mu_1^2 &= \mu_3, \\ \mu_6^2 &= \mu_5\mu_7, \\ \mu_7^2 &= \mu_6\mu_8, \\ \mu_8^2 &= \mu_7. \end{cases}$$

Следовательно, $\mu_3 = \mu_7 = 1$, $\mu_5 = \mu_7^{-1} = 1$, $\mu_2 = -\mu_3^{-1}\mu_5^{-1} = -1$. Таким образом,

$$H_4 = (\mu_1, -1, 1, \mu_4, 1, \mu_6, 1, \mu_8).$$

Для элемента $N_3 = H_3 n_3$ по лемме 3.3.4 имеем

$$N_3^2 = (\nu_1^2, \nu_2^2, -\nu_1\nu_4, \nu_4^2, \nu_5^2, \nu_6^2, \nu_7^2, \nu_8^2) = 1,$$

откуда

$$\begin{cases} \nu_i^2 &= 1, \quad i \neq 3, \\ \nu_1\nu_4 &= -1. \end{cases}$$

Поскольку $N_3N_k = N_kN_3$ при $k \in \{2, 5, 6, 7, 8\}$, то в силу леммы 1.4.3 получаем, что

$$\begin{cases} \nu_2^2 &= \nu_4, \\ \nu_5^2 &= \nu_4\nu_6, \\ \nu_6^2 &= \nu_5\nu_7, \\ \nu_7^2 &= \nu_6\nu_8, \\ \nu_8^2 &= \nu_7. \end{cases}$$

Следовательно, $\nu_4 = \nu_7 = 1$, $\nu_6 = \nu_4^{-1} = 1$, $\nu_8 = \nu_6^{-1} = 1$, $\nu_5 = \nu_7^{-1} = 1$, $\nu_1 = -\nu_4^{-1} = -1$. Таким образом,

$$H_3 = (-1, \nu_2, \nu_3, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Поскольку $\overline{K}$ является дополнением, то должно выполняться равенство $(N_3N_4)^3 = 1$. Следовательно,

$$N_3N_4 = H_3n_3H_4n_4 = H_3(H_4)^{n_3}n_3n_4 =$$
$$(-1, \nu_2, \nu_3, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot (\mu_1, -1, 1, \mu_4, 1, \mu_6, 1, \mu_8)^{n_3}n_3n_4 =$$
$$(-1, \nu_2, \nu_3, 1, 1, 1, 1, 1) \cdot (\mu_1, -1, \mu_1\mu_4, \mu_4, 1, \mu_6, 1, \mu_8)n_3n_4 =$$
$$(-\mu_1, -\nu_2, \nu_3\mu_1\mu_4, \mu_4, 1, \mu_6, 1, \mu_8)n_3n_4 = Hn_3n_4.$$

Поскольку сопряжение элементом n_3n_4 не меняет элементы в векторе H за исключением третьего и четвертого, то, в частности,

$$(N_3N_4)^3 = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \mu_6^3, 1, \mu_8^3) = 1,$$

для некоторых $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Следовательно, $\mu_6^3 = \mu_8^3 = 1$. Поскольку $\mu_6^2 = \mu_8^2 = 1$, то $\mu_6 = \mu_8 = 1$.

Проделаем тоже самое для элемента N_5. По лемме 3.3.4 имеем $N_5^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2, -\alpha_4\alpha_6, \alpha_6^2, \alpha_7^2, \alpha_8^2) = 1$, откуда

$$\begin{cases} \alpha_i^2 &= 1, \quad i \neq 5, \\ \alpha_4\alpha_6 &= -1. \end{cases}$$

Поскольку $N_5N_k = N_kN_5$, где $k \in \{1,2,3,7,8\}$, то

$$\begin{cases} \alpha_1^2 & = & \alpha_3, \\ \alpha_2^2 & = & \alpha_4, \\ \alpha_3^2 & = & \alpha_1\alpha_4, \\ \alpha_7^2 & = & \alpha_6\alpha_8, \\ \alpha_8^2 & = & \alpha_7. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_7 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_4^{-1} = 1$, $\alpha_6 = -\alpha_4^{-1} = -1$, $\alpha_8 = \alpha_6^{-1} = -1$. Таким образом,

$$H_5 = (1, \alpha_2, 1, 1, \alpha_5, -1, 1, -1).$$

Тогда

$N_5N_4 = H_5n_5H_4n_4 = H_5(H_4)^{n_5}n_5n_4 =$

$(1, \alpha_2, 1, 1, \alpha_5, -1, 1, -1) \cdot (\mu_1, -1, 1, \mu_4, 1, 1, 1, 1)^{n_5}n_5n_4 =$

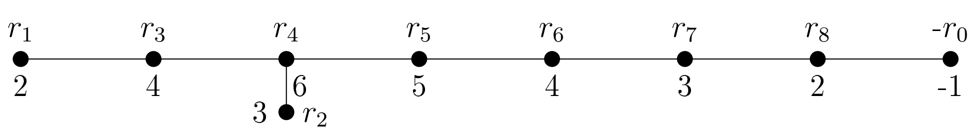
$(1, \alpha_2, 1, 1, \alpha_5, -1, 1, -1) \cdot (\mu_1, -1, 1, \mu_4, \mu_4, 1, 1, 1)n_5n_4 =$

$(\mu_1, -\alpha_2, 1, \mu_4, \mu_4\alpha_5, -1, 1, -1)n_5n_4 = Hn_5n_4.$

Следовательно, $(N_5N_4)^3 = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, -1, 1, -1)$, для некоторых $s_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Поскольку $p \neq 2$, то получаем противоречие с равенством $(N_5N_4)^3 = 1$.

Доказательство теоремы 3.4.2.

Поскольку случай $p = 2$ следует из замечания 1.4.1, мы предполагаем далее, что q нечетно. Расширенная диаграмма Дынкина типа E_8 является следующей



Группа Вейля W изоморфна группе $(2.\mathrm{O}_8^+(2)) : 2$ (в обозначениях [25]). Поэтому W имеет центральную инволюцию w_0. Нетрудно проверить, что $w_0 = w_1w_2w_5w_7w_{44}w_{71}w_{89}w_{120}$. В группе W всего 112 классов сопряженности. В отличии от типа E_7, в данном случае возможно, что $w \in W$ и ww_0 сопряжены в W. Всего в группе W имеется 22 класса сопряженности с таким условием. Все остальные классы делятся на пары такие, что один класс в паре получается умножением всех элементов второго на w_0. Эта информация может быть проверена в GAP. Мы приводим 67 представителей сопряженных классов в таблице 3.9, оставшиеся 45 представителей могут быть получены умножением на w_0.

Замечание 3.4.3. *Приведем два комментария к [29, таблица I]. Представители классов сопряженности группы W в этой таблице были получены из [21].*

1. *В соответствии с [21, таблица 11], элемент с номером 50 имеет допустимую диаграмму $D_5 \times A_2$. Элемент $u = w_2w_3w_5w_4w_8w_6w_{120}$ имеет такую диаграмму и мы выбираем его для дальнейших вычислений. В [29, таблица I] представитель $u' = w_2w_3w_5w_4w_8w_6w_{35}$ не имеет такую диаграмму, но и сопряжен с $u'w_0$ в W. Следовательно, представитель u' соответствует максимальному тору порядка $(q-1)(q^3+1)(q^4+1)$.*

2. *В соответствии с [21, таблица 11], элемент с номером 51 имеет допустимую диаграмму $D_5(a_1) \times A_2$. Заметим, что в [29, таблица I] представитель $v' = w_{26}w_5w_4w_3w_2w_7w_8$ содержит опечатку, поскольку v' имеет такую же допустимую диаграмму как и u'.*

   Элемент $v = w_{26}w_5w_4w_3w_2w_{120}w_8$ имеет диаграмму $D_5(a_1) \times A_2$ и мы выбираем его для дальнейших вычислений. Заметим, что циклическое строение соответствующего максимального тора в [29, таблица I] является правильным и имеет вид $(q^2+1)(q^6-1)$.

Обозначим $n_0 = h_2h_5h_7n_1n_2n_5n_7n_{44}n_{71}n_{89}n_{120}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $n_0^2 = 1$, $[n_0, n_i] = 1$ для $i = 1, \ldots, 8$ и, следовательно, $n_0 \in Z(\mathcal{T})$. Мы разделяем доказательство на два случая. Сначала рассматриваются максимальные торы, которые не имеют дополнений в своем алгебраическом нормализаторе. Если максимальный тор T не имеет дополнения и соответствует сопряженному классу элемента $w \in W$, то мы предъявляем поднятие для w такого же порядка. Затем рассматриваются оставшиеся торы и для каждого из них предъявляются порождающие с точностью до сопряжений для их дополнений.

Нерасщепляемые случаи.

На протяжении этого подраздела мы предполагаем, что T – максимальный тор, соответствующий сопряженному классу элемента $w \in W$. Мы пишем $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8)$ для произвольного элемента группы T. Эта запись означает, что $H = \prod\limits_{i=1}^{8} h_{r_i}(\lambda_i)$. Основной инструмент, чтобы показать, что T не имеет дополнения в $N(G,T)$ – это следующее утверждение, которое является аналогом леммы 3.3.6.

Лемма 3.4.4. *Пусть* $w \in W$, *и* $C_W(w) \geqslant \langle w_2w_5, w_{61}, w_{97}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *Предположим, что элемент* $n \in \overline{N}$ *таков, что* $\pi(n) = w$ *и элементы* n_2n_5, n_{61}, n_{97} *лежат в* $\overline{N}_{\sigma n}$. *Тогда* $\overline{T}_{\sigma n}$ *не имеет дополнения в* $\overline{N}_{\sigma n}$.

Доказательство. Предположим обратное, что $\overline{T}_{\sigma n}$ имеет дополнение K в $\overline{N}_{\sigma n}$. Пусть N_1, N_2, N_3 – это прообразы элементов w_2w_5, w_{61} и w_{97} в K, соответственно. Тогда $N_1 = H_1n_2n_5$, $N_2 = H_2n_{49}$, $N_3 = H_3n_{63}$, где

$$H_1 = (\mu_1, \ldots, \mu_8), H_2 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_8), H_3 = (\beta_1, \ldots, \beta_8),$$

– элементы группы $\overline{T}_{\sigma n}$.

Поскольку $w_{61}^2 = 1$, имеем $N_2^2 = 1$. Вычисления в MAGMA показывают, что $n_{61}^2 = h_2h_3h_7$. По лемме 3.3.4

$$Hn_{61}^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_6^{-1}\lambda_8, -\lambda_1\lambda_3^2\lambda_6^{-1}\lambda_8, \lambda_1^2\lambda_4^2\lambda_6^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^2\lambda_5^2\lambda_6^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^2\lambda_8^2, \\ - \lambda_1\lambda_6^{-1}\lambda_7^2\lambda_8, \lambda_8^2).$$

Поэтому $\alpha_1\alpha_2^2\alpha_8 = -\alpha_6$, $\alpha_1^2 = \alpha_8^2 = 1$, $\alpha_4^2 = \alpha_5^2 = \alpha_6^2$. Поскольку $[n_2n_5, n_{61}] = 1$, из леммы 1.4.3 следует, что $H_1^{-1}H_1^{n_{61}} = H_2^{-1}H_2^{n_2n_5}$. По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{n_{61}} = (1, \lambda_1\lambda_6^{-1}\lambda_8, \lambda_1\lambda_6^{-1}\lambda_8, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^2\lambda_6^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1\lambda_6^{-1}\lambda_8, 1),$$

$$H^{-1}H^{n_2n_5} = (1, \lambda_2^{-2}\lambda_4, 1, 1, \lambda_4\lambda_5^{-2}\lambda_6, 1, 1, 1).$$

Применяя равенства к H_1 и H_2, получаем, что

$$(1, \mu_1\mu_6^{-1}\mu_8, \mu_1\mu_6^{-1}\mu_8, \mu_1^2\mu_6^{-2}\mu_8^2, \mu_1^2\mu_6^{-2}\mu_8^2, \mu_1^2\mu_6^{-2}\mu_8^2, \mu_1\mu_6^{-1}\mu_8, 1) \\ = (1, \alpha_2^{-2}\alpha_4, 1, 1, \alpha_4\alpha_5^{-2}\alpha_6, 1, 1, 1).$$

Тогда $\mu_1\mu_6^{-1}\mu_8 = 1$ и, следовательно, $\alpha_2^2 = \alpha_4$ и $\alpha_5^2 = \alpha_4\alpha_6$. Поскольку $\alpha_5^2 = \alpha_4^2 = \alpha_6^2$, заключаем, что $\alpha_4 = \alpha_6$. Теперь равенство $\alpha_1\alpha_2^2\alpha_8 = -\alpha_6$ влечет, что $\alpha_1\alpha_8 = -1$.

Поскольку $[n_{97}, n_{61}] = 1$, из леммы 1.4.3 следует, что $H_3^{-1}H_3^{n_{61}} = H_2^{-1}H_2^{n_{97}}$. По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{n_{97}} = (\lambda_1^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^{-3}\lambda_8^3, \lambda_1^{-4}\lambda_8^4, \lambda_1^{-3}\lambda_8^3, \lambda_1^{-2}\lambda_8^2, \lambda_1^{-1}\lambda_8, 1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&(\alpha_1^{-2}\alpha_8^2, \alpha_1^{-2}\alpha_8^2, \alpha_1^{-3}\alpha_8^3, \alpha_1^{-4}\alpha_8^4, \alpha_1^{-3}\alpha_8^3, \alpha_1^{-2}\alpha_8^2, \alpha_1^{-1}\alpha_8, 1)\\ &\qquad = (1, \beta_1\beta_6^{-1}\beta_8, \beta_1\beta_6^{-1}\beta_8, \beta_1^2\beta_6^{-2}\beta_8^2, \beta_1^2\beta_6^{-2}\beta_8^2, \beta_1^2\beta_6^{-2}\beta_8^2, \beta_1\beta_6^{-1}\beta_8, 1).\end{aligned}$$

Сравнивая вторые и третьи координаты, находим, что $\alpha_1^{-2}\alpha_8^2 = \alpha_1^{-3}\alpha_8^3$ и, следовательно, $\alpha_1^{-1}\alpha_8 = 1$. Поскольку $\alpha_1^2 = 1$, получаем противоречие с $\alpha_1\alpha_8 = -1$. □

Теперь рассмотрим случаи, где лемма 3.4.4 может быть применена.

Лемма 3.4.5. *Пусть w, либо ww_0 – элемент из второго столбца таблицы 3.6. Если максимальный тор T соответствует классу сопряженности элемента w, тогда T не имеет дополнения в $N(G,T)$. При этом элемент w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$.*

Доказательство. По лемме 1.4.4, мы можем предполагать, что w – один из элементов второго столбца таблицы 3.6. Используя GAP, находим, что в каждом случае существует $w' \in W$, который сопряжен с w и такой, что w_2w_5, w_{61}, $w_{97} \in C_W(w')$. Примеры таких w' для каждого w приведены в таблице 3.6. Первый столбец этой таблицы содержит номера торов в соответствии с таблицей 3.9, третий содержит примеры w' для w. Четвертый столбец содержит элементы $n_{w'} \in \mathcal{T}$ такие, что $[n_{w'}, n_2n_5] = [n_{w'}, n_{61}] = [n_{w'}, n_{97}] = 1$ и $\pi(n_{w'}) = w'$. Тогда лемма 1.4.2 влечет, что n_2n_5, n_{61} и n_{97} принадлежат $\overline{N}_{\sigma n_{w'}}$ в каждом случае. Теперь из леммы 3.4.4 получаем, что $\overline{N}_{\sigma n_{w'}}$ не расщепляется над $\overline{T}_{\sigma n_{w'}}$. По замечанию 1.3.4, T не имеет дополнения в $N(G,T)$. Наконец, пятый столбец содержит другой прообраз n' для w' в $\mathcal{T}$ такой, что $|w'| = |n'|$. Равенство порядков может быть проверено в MAGMA. Поэтому n' – поднятие w' в $\overline{N}_{\sigma n'}$. Поскольку $n_0 \in Z(\mathcal{T})$, то $n'n_0$ – требуемое поднятие для $w'w_0$ и лемма доказана. □

Таблица 3.6: Представители сопряженных классов, удовлетворяющие условию леммы 3.4.4

№	w	$w' \in w^W$	прообраз для w', поднятие для w'
1	1	1	1, 1
2	w_1	w_2	n_2, h_4n_2
3	w_1w_2	w_2w_5	n_2n_5, $h_4n_2n_5$
4	w_3w_1	w_3w_{99}	n_3n_{99}, n_3n_{99}
5	$w_2w_3w_5$	$w_3w_5w_2$	$n_3n_5n_2$, $h_4n_3n_5n_2$
6	$w_1w_3w_5$	$w_{61}w_{99}w_3$	$n_{61}n_{99}n_3$, $h_6n_{61}n_{99}n_3$
7	$w_1w_3w_4$	$w_2w_4w_{18}$	$h_4n_2n_4n_{18}$, $h_6n_2n_4n_{18}$
8	$w_1w_4w_6w_{69}$	$w_2w_5w_{61}w_{97}$	$n_2n_5n_{61}n_{97}$, $n_2n_5n_{61}n_{97}$
9	$w_1w_2w_3w_5$	$w_2w_5w_3w_{99}$	$n_2n_5n_3n_{99}$, $h_4n_2n_5n_3n_{99}$
11	$w_1w_4w_6w_3$	$w_2w_{97}w_4w_{18}$	$h_4n_2n_{97}n_4n_{18}$, $h_6n_2n_{97}n_4n_{18}$
13	$w_3w_2w_5w_4$	$w_3w_{99}w_{88}w_{95}$	$n_3n_{99}n_{88}n_{95}$, $n_3n_{99}n_{88}n_{95}$
14	$w_3w_2w_4w_{18}$	$w_3w_2w_4w_{18}$	$h_4n_3n_2n_4n_{18}$, $n_3n_2n_4n_{18}$
16	$w_1w_4w_6w_3w_{69}$	$w_2w_3w_{61}w_{98}w_{99}$	$n_2n_3n_{61}n_{98}n_{99}$, $h_4n_2n_3n_{61}n_{98}n_{99}$
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	$w_3w_7w_4w_{18}w_{98}$	$h_4n_3n_7n_4n_{18}n_{98}$, $h_4n_3n_7n_4n_{18}n_{98}$
20	$w_{26}w_5w_4w_3w_2$	$w_2w_3w_4w_{18}w_{102}$	$h_4n_2n_3n_4n_{18}n_{102}$, $h_6n_2n_3n_4n_{18}n_{102}$
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	$w_2w_7w_4w_{18}w_{102}$	$h_4n_2n_7n_4n_{18}n_{102}$, $h_6n_2n_7n_4n_{18}n_{102}$

Продолжение таблицы 3.6

№	w	$w' \in w^W$	прообраз для w', поднятие для w'
28	$w_3w_2w_4w_{18}w_7$	$w_3w_2w_4w_{18}w_7$	$h_4n_3n_2n_4n_{18}n_7$, $n_3n_2n_4n_{18}n_7$
30	$w_{46}w_3w_5w_1w_4w_6$	$w_2w_3w_{120}w_{86}w_{87}w_{99}$	$h_4n_2n_3n_{120}n_{86}n_{87}n_{99}$, $n_2n_3n_{120}n_{86}n_{87}n_{99}$
31	$w_2w_3w_5w_7$	$w_2w_5w_{61}w_{98}$	$n_2n_5n_{61}n_{98}$, $h_4h_8n_2n_5n_{61}n_{98}$
32	$w_{74}w_3w_2w_5w_4$	$w_3w_{61}w_4w_{18}w_{98}$	$h_4n_3n_{61}n_4n_{18}n_{98}$, $h_1h_2n_3n_{61}n_4n_{18}n_{98}$
33	$w_8w_1w_4w_6w_3$	$w_3w_7w_5w_{61}w_{99}$	$n_3n_7n_5n_{61}n_{99}$, $h_4n_3n_7n_5n_{61}n_{99}$
35	$w_1w_2w_3w_6w_8w_7$	$w_2w_7w_{61}w_4w_{18}w_{98}$	$h_4n_2n_7n_{61}n_4n_{18}n_{98}$, $h_6n_2n_7n_{61}n_4n_{18}n_{98}$
37	$w_4w_8w_2w_5w_7w_{120}$	$w_2w_3w_7w_4w_{18}w_{61}$	$h_4n_2n_3n_7n_4n_{18}n_{61}$, $n_2n_3n_7n_4n_{18}n_{61}$
42	$w_2w_3w_4w_5w_6w_8$	$w_3w_7w_{61}w_4w_{18}w_{98}$	$h_4n_3n_7n_{61}n_4n_{18}n_{98}$, $n_3n_7n_{61}n_4n_{18}n_{98}$
48	$w_2w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$	$w_2w_3w_7w_4w_{18}w_{61}w_{98}$	$h_4n_2n_3n_7n_4n_{18}n_{61}n_{98}$, $n_2n_3n_7n_4n_{18}n_{61}n_{98}$

Оставшиеся случаи рассматриваются в следующей лемме.

Лемма 3.4.6. *Пусть w, либо ww_0 – один из следующих элементов: $w_1w_4w_3 \cdot w_7w_6w_8$, $w_2w_3w_4w_8w_{120}w_{18}$, $w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18}$, $w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74}$.*

Предположим, что T – максимальный тор, который соответствует сопряженному классу элемента w. Тогда T не имеет дополнения в $N(G,T)$, но w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$.

Доказательство. Рассмотрим каждый случай для w отдельно.

Тор 36. В этом случае $w = w_1w_4w_3w_7w_6w_8$, и

$$C_W(w) = \langle w_1w_4w_3, w_7w_6w_8, w_0, w_6w_8w_{69}w_{91}, w_{20}w_{24}w_{29}w_{35}\rangle \\ \simeq (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

при этом

$$\langle w_1w_4w_3, w_7w_6w_8, w_0, w_6w_8w_{69}w_{91}\rangle \\ = \langle w_1w_4w_3\rangle \times \langle w_7w_6w_8\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_6w_8w_{69}w_{91}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Обозначим $n = n_1n_4n_3n_7n_6n_8$. Пусть $N_1 = H_1n_1n_4n_3$, $N_2 = H_2n_7n_6n_8$ и $N_3 = H_3n_6n_8n_{69}n_{91}$ – прообразы $w_1w_4w_3$, $w_7w_6w_8$ и $w_6w_8w_{69}w_{91}$ в K, где $H_1 = (\alpha_i)$, $H_2 = (\beta_i)$ и $H_3 = (\mu_i)$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $[n, n_1n_4n_3] = [n, n_7n_6n_8] = [n, n_6n_8n_{69}n_{91}] = 1$. По лемме 1.4.2 имеем $n_1n_4n_3, n_7n_6n_8, n_6n_8n_{69}n_{91} \in \overline{N}_{\sigma n}$ и $H_1, H_2, H_3 \in \overline{T}_{\sigma n}$.

Поскольку $(w_7w_6w_8)^4 = 1$, имеем $N_2^4 = 1$. Используя MAGMA, видим, что $(n_7n_6n_8)^4 = h_6h_8$ и, следовательно, лемма 3.3.4 влечет, что

$$(Hn_7n_6n_8)^4 = (\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \lambda_4^4, \lambda_5^4, -\lambda_5^3, \lambda_5^2, -\lambda_5).$$

Поэтому $\beta_5 = -1$ и $\beta_1^4 = 1$.

Поскольку $[n_1n_4n_3, n_7n_6n_8] = 1$, из леммы 1.4.3 следует, что $H_1^{-1}H_1^{n_7n_6n_8} = H_2^{-1}H_2^{n_1n_4n_3}$. Используя MAGMA, видим, что

$$H^{-1}H^{n_7n_6n_8} = (1, 1, 1, 1, 1, \lambda_5\lambda_6^{-2}\lambda_7, \lambda_5\lambda_6^{-1}\lambda_8^{-1}, \lambda_7\lambda_8^{-2}),$$

$$H^{-1}H^{n_1n_4n_3} = (\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}\lambda_4, 1, \lambda_1\lambda_3^{-2}\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}\lambda_5, 1, 1, 1, 1).$$

Поэтому имеем, что $\beta_4 = \beta_1\beta_3$, $\beta_3^2 = \beta_1\beta_4$ и $\beta_1\beta_2\beta_5 = \beta_3\beta_4$. Следовательно, $\beta_3^2 = \beta_1\beta_4 = \beta_1(\beta_1\beta_3)$. Значит $\beta_3 = \beta_1^2$ и $\beta_4 = \beta_1\beta_3 = \beta_1^3$. Поскольку $\beta_5 = -1$ и $\beta_1^4 = 1$, получаем, что $\beta_1\beta_2(-1) = \beta_3\beta_4 = \beta_1^5 = \beta_1$. Поэтому $\beta_2 = -1$.

Поскольку $[n_6n_8n_{69}n_{91}, n_7n_6n_8] = 1$, лемма 1.4.3 влечет, что $H_3^{-1}H_3^{n_7n_6n_8} = H_2^{-1}H_2^{n_6n_8n_{69}n_{91}}$. Используя MAGMA, видим, что

$$H^{-1}H^{n_6n_8n_{69}n_{91}} = (\lambda_2^{-2}\lambda_5, *, *, *, *, *, *, *).$$

Поэтому $\beta_2^{-2}\beta_5 = 1$; противоречие с $\beta_2 = \beta_5 = -1$.

Теперь приведем поднятие для w. Вычисления в MAGMA показывают, что $(h_5n)^4 = 1$. Поэтому h_5n – требуемое поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma h_5 n}$.

Тор 41. В этом случае $w = w_2w_3w_4w_8w_{120}w_{18}$ и

$$C_W(w) = \langle w^2w_0\rangle \times \langle i, j, k\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times (\mathrm{SL}_2(3) : \mathbb{Z}_4),$$

где $i = w_6w_{19}w_{26}$, $j = w_4w_{13}w_{40}$ и $k = w_1w_2w_4w_6w_{48}w_{51}$. Используя GAP, можно проверить, что

$$\langle i, j, k\rangle \simeq \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^3 = [a, b] = ca^3b^2cb^3 = 1\rangle$$

и i, j, k удовлетворяют этим соотношениям.

Положим $n = n_2n_3n_4n_8n_{120}n_{18}$ и $a = h_6n_6n_{19}n_{26}$. Тогда, используя MAGMA, видим, что $[n, a] = 1$ и, следовательно, $a \in \overline{N}_{\sigma n}$. Предположим, что существует дополнение K для $\overline{T}_{\sigma n}$. Пусть $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2a$ и $N_0 = H_0h_2h_3h_5n_0$ – прообразы элементов w, i и w_0 в K, где $H_1 = (\mu_i)$, $H_0 = (\beta_i)$ и $H_2 = (\alpha_i)$.

Поскольку $[n, a] = 1$, лемма 3.3.4 влечет $H_1^{-1}H_1^a = H_2^{-1}H_2^n$. По этой же лемме находим, что

$$H^{-1}H^n = (\lambda_8^{-2}, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_8^{-3}, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_6\lambda_8^{-4}, \lambda_3^2\lambda_4^{-2}\lambda_6\lambda_8^{-6}, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6\lambda_8^{-5},$$
$$\lambda_8^{-4}, \lambda_8^{-3}, \lambda_7\lambda_8^{-3}),$$

$$H^{-1}H^a = (1, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_6^{-1}\lambda_7, \lambda_1\lambda_5^{-1}\lambda_7, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}\lambda_7^2, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6^{-1}\lambda_7^2,$$
$$\lambda_1\lambda_6^{-2}\lambda_7^2, 1, 1).$$

Поэтому заключаем, что $\alpha_7\alpha_8^3 = \alpha_8^3 = \alpha_8^2 = 1$. Значит $\alpha_7 = \alpha_8 = 1$. Тогда

$$(1, \mu_2^{-1}\mu_3\mu_6^{-1}\mu_7, \mu_1\mu_5^{-1}\mu_7, \mu_1\mu_2^{-1}\mu_3\mu_5^{-1}\mu_6^{-1}\mu_7^2, \mu_1\mu_2^{-1}\mu_3\mu_5^{-1}\mu_6^{-1}\mu_7^2, \mu_1\mu_6^{-2}\mu_7^2, 1, 1)$$
$$= (1, \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5, \alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6, \alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6, \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_5^{-1}\alpha_6, 1, 1, 1).$$

Поскольку произведение второй и третьей координат на левой стороне равенства равно четвертой координате, имеем $(\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5)(\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6) = \alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6$, откуда $\alpha_1\alpha_5 =$

$\alpha_2\alpha_3$. Более того, четвертая и пятая координаты совпадают с левой стороны равенства, откуда $\alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6 = \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_5^{-1}\alpha_6$ и, следовательно, $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_4^2\alpha_5^{-1}$.

Используя MAGMA, видим, что $a^4 = h_2h_3$ и, следовательно, лемма 3.3.4 влечет, что

$$(Ha)^4 = (\lambda_1^4, -\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}\lambda_7^2, -\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_5^{-2}\lambda_7^2, \lambda_1^4\lambda_4^4\lambda_5^{-4}\lambda_7^4, \lambda_1^4\lambda_7^4, \lambda_1^2\lambda_7^4, \lambda_7^4, \lambda_8^4).$$

Поэтому, заключаем, что $-\alpha_1^{-1} = \alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^{-2}\alpha_7^2$, $\alpha_1^2 = 1$. Поскольку $\alpha_7 = 1$, имеем $-\alpha_1\alpha_5^2 = \alpha_2^2\alpha_3^2$. Однако, мы знаем, что $\alpha_1\alpha_5 = \alpha_2\alpha_3$ и, следовательно, $\alpha_1 = -1$. Теперь из $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_4^2\alpha_5^{-1}$ получаем, что $\alpha_5^2 = -\alpha_4^2$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $[a, n_0] = 1$. По лемме 1.4.3 заключаем, что $H_0^{-1}H_0^a = H_2^{-1}H_2^{n_0}$. Тогда

$$H_2^{-1}H_2^{n_0} = (\alpha_1^{-2}, \alpha_2^{-2}, \alpha_3^{-2}, \alpha_4^{-2}, \alpha_5^{-2}, \alpha_6^{-2}, \alpha_7^{-2}, \alpha_8^{-2}).$$

Применяя равенство выше для $H^{-1}H^a$, видим, что

$$H_0^{-1}H_0^a = (*, *, *, \beta_1\beta_2^{-1}\beta_3\beta_5^{-1}\beta_6^{-1}\beta_7^2, \beta_1\beta_2^{-1}\beta_3\beta_5^{-1}\beta_6^{-1}\beta_7^2, *, *, *).$$

Поскольку $\alpha_4^2 = -\alpha_5^2$, получаем противоречие.

Используя MAGMA, видим, что $n^{12} = 1$ и поэтому n – поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma n}$. Тогда nn_0 – поднятие для ww_0.

Тор 49. В этом случае $w = w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18}$ и

$$\begin{aligned} C_W(w) = \langle w_0\rangle \times \langle w\rangle \times \langle w_{11}w_{12}, w_4w_{17}, w_{76}w_{86}\rangle \\ \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times (((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Положим $n = h_4n_2n_3n_4n_7n_{120}n_8n_{18}$. Заметим, что $w_{15}w_{119}w_8 \in C_W(w)$. Используя MAGMA, видим, что $[h_2n_{15}n_{119}n_8, n] = 1$ и, следовательно, $h_2n_{15}n_{119}n_8 \in \overline{N}_{\sigma n}$.

Предположим, что существует дополнение K для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Тогда $N_0 = H_0n_0$, $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2h_2n_{15}n_{119}n_8$ принадлежит K для некоторых H_0, $H_1 = (\mu_i)$ и $H_2 = (\alpha_i)$.

Поскольку $[n, h_2n_{15}n_{119}n_8] = 1$, из леммы 1.4.3 вытекает, что $H_2^{-1}H_2^{N_1} = H_1^{-1}H_1^{N_2}$.

По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{N_1} = (\lambda_7^{-2}\lambda_8^2, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_5\lambda_7^{-3}\lambda_8^3, \lambda_1\lambda_4^{-1}\lambda_6\lambda_7^{-4}\lambda_8^4, \lambda_3^2\lambda_4^{-2}\lambda_6\lambda_7^{-6}\lambda_8^6,$$
$$\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_5^{-1}\lambda_6\lambda_7^{-5}\lambda_8^5, \lambda_7^{-4}\lambda_8^4, \lambda_6\lambda_7^{-4}\lambda_8^2, \lambda_7^{-1}),$$

$$H^{-1}H^{N_2} = (\lambda_8^{-2}, \lambda_8^{-3}, \lambda_8^{-4}, \lambda_8^{-6}, \lambda_8^{-5}, \lambda_8^{-4}, \lambda_6\lambda_7^{-2}\lambda_8^{-2}, \lambda_6\lambda_7^{-1}\lambda_8^{-2}).$$

После применения этих равенств к $H_2^{-1}H_2^{N_1} = H_1^{-1}H_1^{N_2}$ видим, что третья и шестая координаты на правой стороне совпадают, поэтому получаем $\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6\alpha_7^{-4}\alpha_8^4 = \alpha_7^{-4}\alpha_8^4$ и, следовательно, $\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6 = 1$. Более того, квадрат второй координаты равен четвертой координате, откуда находим $(\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5\alpha_7^{-3}\alpha_8^3)^2 = \alpha_3^2\alpha_4^{-2}\alpha_6\alpha_7^{-6}\alpha_8^6$ и, следовательно, $\alpha_2^{-2}\alpha_5^2 = \alpha_6$. Наконец, поскольку пятая координата равна произведению первой и второй координат, заключаем, что

$$(\alpha_7^{-2}\alpha_8^2)(\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_5\alpha_7^{-3}\alpha_8^3) = \alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_5^{-1}\alpha_6\alpha_7^{-5}\alpha_8^5.$$

Следовательно, $\alpha_4^{-1}\alpha_5^2 = \alpha_6$.

Поскольку $[h_2n_{15}n_{119}n_8, n_0] = 1$, имеем $H_0^{-1}H_0^{N_2} = H_2^{-1}H_2^{N_0} = H_2^{-2} = (\alpha_1^{-2}, \alpha_2^{-2}, \alpha_3^{-2}, \alpha_4^{-2}, \alpha_5^{-2}, \alpha_6^{-2}, \alpha_7^{-2}, \alpha_8^{-2})$. Используем такие же равенства координат на правой стороне этого равенства как и в предыдущем абзаце и получаем, что $\alpha_3^2 = \alpha_6^2$, $\alpha_2^4 = \alpha_4^2$ и $\alpha_1^2\alpha_2^2 = \alpha_5^2$. Выше было получено, что $\alpha_5^2\alpha_2^{-2} = \alpha_6$, поэтому $\alpha_1^2 = \alpha_6$.

Вычисления в MAGMA показывают, что $(h_2n_{15}n_{119}n_8)^4 = h_2h_5$. По лемме 3.3.4

$$(Hh_2n_{15}n_{119}n_8)^4 = (\lambda_1^4\lambda_6^{-2}, -\lambda_2^4\lambda_6^{-3}, \lambda_3^4\lambda_6^{-4}, \lambda_4^4\lambda_6^{-6}, -\lambda_5^4\lambda_6^{-5}, 1, 1, 1).$$

Поэтому $\alpha_2^4 = -\alpha_6^3$. С другой стороны, поскольку $\alpha_2^4 = \alpha_4^2$, имеем $\alpha_4^2 = -\alpha_6^3$. Возведя в квадрат равенство $\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_6 = 1$, получаем $\alpha_1^2(-\alpha_6^{-1}) = 1$; противоречие с равенством $\alpha_1^2 = \alpha_6$.

Поскольку $(h_6n)^4 = 1$ и, следовательно, h_6n – требуемое поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma h_6 n}$. Тогда h_6nn_0 – поднятие для ww_0.

Тор 59. В этом случае $w = w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74}$ и

$$C_W(w) = \langle w_1w_{99}, w_2w_5, w_4w_{17}, w_6w_{35}, w_9w_{79}\rangle$$
$$\simeq (\mathbb{Z}_4.((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) : A_6)) : \mathbb{Z}_2.$$

Более того, группа $C_W(w)$ изоморфна следующей группе:

$$\langle a, b, c, d, e \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = (ab)^2 = (ac)^3 = (ad)^3 = (ae)^4$$
$$= (bc)^4 = (bd)^3 = (be)^2 = (cd)^2 = (ce)^3 = (de)^2 = aceaecbacb = 1\rangle,$$

при этом элементы w_1w_{99}, w_2w_5, w_4w_{17}, w_6w_{35}, w_9w_{79} удовлетворяют определяющему набору соотношений.

Пусть $n = h_4n_2n_3n_4n_7n_{120}n_{18}n_8n_{74}$. Используя MAGMA, видим, что $[n, h_3h_5n_1n_{99}] = [n, h_4h_7n_2n_5] = [n, h_3h_8n_9n_{79}] = 1$. Поэтому $h_3h_5n_1n_{99}$, $h_4h_7n_2n_5$, $h_3h_8n_9n_{79} \in \overline{N}_{\sigma n}$. Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 – прообразы w, a, b и e в K, соответственно. Тогда $N_1 = H_1n$, $N_2 = H_2h_3h_5n_1n_{99}$, $N_3 = H_3h_4h_7n_2n_5$ и $N_4 = H_4h_3h_8n_9n_{79}$, где $H_1 = (\mu_i)$, H_2, $H_3 = (\beta_i)$ и $H_4 = (\alpha_i)$ являются элементами группы $\overline{T}_{\sigma n}$.

Поскольку $b^2 = 1$, имеем $N_3^2 = 1$. Используя MAGMA, видим, что $(h_4h_7n_2n_5)^2 = 1$. По лемме 3.3.4

$$(HN_3)^2 = (\lambda_1^2, \lambda_4, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \lambda_4\lambda_6, \lambda_6^2, \lambda_7^2, \lambda_8^2).$$

Поэтому $\beta_4 = \beta_6 = 1$ и $\beta_1^2 = \beta_3^2 = \beta_7^2 = \beta_8^2 = 1$.

Поскольку $[a, b] = 1$ и $[h_3h_5n_1n_{99}, h_4h_7n_2n_5] = 1$, из леммы 1.4.3 вытекает $H_3^{-1}H_3^{N_2} = H_2^{-1}H_2^{N_3}$. По лемме 3.3.4

$$H^{-1}H^{N_2} = (\lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_4^{-1}\lambda_6\lambda_7^{-1}, t^2, t^2, t^4, t^3, t^2, t^2, t), \text{ где } t = \lambda_3\lambda_4^{-1}\lambda_6\lambda_7^{-1};$$

$$H^{-1}H^{N_3} = (1, \lambda_2^{-2}\lambda_4, 1, 1, \lambda_4\lambda_5^{-2}\lambda_6, 1, 1, 1).$$

Применяя полученные равенства к H_2 и H_3, находим, что $\beta_1^{-2}\beta_3^2\beta_4^{-1}\beta_6\beta_7^{-1} = \beta_3\beta_4^{-1}\beta_6\beta_7^{-1} = 1$. Поскольку $\beta_4 = \beta_6 = \beta_1^2 = \beta_3^2 = 1$, заключаем, что $\beta_3 = 1$ и, следовательно, $\beta_7 = 1$.

Поскольку $[w, b] = 1$, лемма 3.3.4 влечет

$$H_3^{-1}H_3^{N_1} = H_1^{-1}H_1^{N_3}.$$

По этой же лемме имеем

$$H^{-1}H^{N_1} = (*, *, *, *, *, *, *, \lambda_1^{-1}).$$

Применяя последнее соотношение к H_3 и используя равенство для $H^{-1}H^{N_3}$, находим, что

$$(*, *, *, *, *, *, *, \beta_1^{-1}) = (*, *, *, *, *, *, *, 1),$$

следовательно, $\beta_1 = 1$.

Поскольку $[b, e] = 1$ и $[h_4h_7n_2n_5, h_3h_8n_9n_{79}] = h_2h_8$, лемма 3.3.4 влечет, что $H_3^{-1}H_3^{N_4} = H_4^{-1}H_4^{N_3}h_2h_8$. По этой же лемме имеем

$$H^{-1}H^{N_4} = (\lambda_1^{-2}\lambda_4\lambda_7^{-1}, \lambda_1^{-1}\lambda_3\lambda_7^{-1}, \lambda_1^{-2}\lambda_4\lambda_7^{-1}, \lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_7^{-2}, \lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_7^{-2},$$
$$\lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_7^{-2}, \lambda_1^{-2}\lambda_3^2\lambda_7^{-2}, \lambda_1^{-1}\lambda_3\lambda_7^{-1}).$$

Поскольку $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_7 = 1$, получаем, что $H_3^{-1}H_3^{N_4} = 1$. Вычисляя $H_4^{-1}H_4^{N_3}$, находим, что $h_2h_8 = (1, \alpha_2^{-2}\alpha_4, 1, 1, \alpha_4\alpha_5^{-2}\alpha_6, 1, 1, 1)$; противоречие.

Используя MAGMA, видим, что $n^4 = 1$, поэтому n – поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma n}$ такого же порядка. Тогда nn_0 – требуемое поднятие для ww_0. $\square$

Расщепляемые случаи.

Мы рассматриваем все случаи в одном ключе. Сначала докажем следующую лемму для максимальных торов нечетного порядка.

Лемма 3.4.7. *Пусть* $w \in W$ *и элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *порождают группу* $C_W(w)$. *Предположим, что* $n \in \overline{N}$ *такой, что* $\pi(n) = w$ *и существуют* $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathcal{T}$ *такие, что* $\pi(y_i) = x_i$. *Если* $|\overline{T}_{\sigma n}|$ *нечетен, то* $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle$ *– дополнение для* $\overline{T}_{\sigma n}$ *в* $\overline{N}_{\sigma n}$.

Доказательство. Поскольку $x_1, x_2, \ldots, x_m$ порождают $C_W(w)$, существует множество определяющих соотношений S для $C_W(w)$ такое, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют S. Поэтому каждое соотношение из S выполняется и для $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с точностью до некоторых элементов группы $\overline{T}_{\sigma n}$. Пусть h – один из таких элементов. По предположению леммы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – элементы $\mathcal{T}$, откуда $h \in \mathcal{T}$. Поскольку $\mathcal{T} \cap \overline{T}_{\sigma n} \leqslant \mathcal{H}$, имеем $h \in \overline{T}_{\sigma n} \cap \mathcal{H}$. Однако $\mathcal{H}$ – элементарная абелева 2-группа и, следовательно, $\mathcal{H} \cap \overline{T}_{\sigma n} = 1$. Поэтому все соотношения из S верны и для $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle$, и, следовательно, эта группа является дополнением для $\overline{T}_{\sigma n}$. $\square$

Наша стратегия одинакова во всех случаях. Для элемента w мы находим $n \in \mathcal{T}$ такой, что $\pi(n) = w$ и множество соотношений, определяющих группу $C_W(w)$. Затем мы приводим элементы в $\overline{N}_{\sigma n}$, которые удовлетворяют этому множеству соотношений. Все данные приведены в таблице 3.7. Как иллюстрирующий пример, рассмотрим случай $w = w_1w_5w_3w_6$, который соответствует Тору 10 в таблице 3.9. В этом случае

$$C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3) : \mathbb{Z}_2).$$

Можно проверить в GAP, что группа $C_W(w)$ изоморфна следующей группе, заданной множеством соотношений:

$$\begin{aligned}\langle a, b, c, d, e, f, g, i, j \mid a^3 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = g^2 = i^2 = j^2 = R(a)\\ = R(b) = [c, e] = [c, f] = [c, g] = [c, i] = [d, e] = [d, f] = [d, g] = [d, i]\\ = [e, g] = [e, i] = [f, g] = [f, i] = (cd)^3 = (ef)^3 = (gi)^3 = jcje = jdjf\\ = jgjbg = jijbi = 1\rangle.\end{aligned}$$

Для краткости мы используем запись $R(x)$, которая обозначает, что x коммутирует со всеми другими порождающими. Теперь, если взять $a = w$, $b = w_0$, $c = w_2$, $d = w_{69}$, $e = w_8$, $f = w_{120}$, $g = w_2w_{37}w_{40}w_{57}$, $i = w_2w_{32}w_{51}w_{52}$ и $j = w_1w_{34}w_{36}w_{84}$, то все эти элементы лежат в $C_W(w)$ и удовлетворяют соотношениям, приведенным выше. Наконец, положим $a = n_1n_5n_3n_6$, $b = n_0$, $c = h_{69}n_2$, $d = h_2n_{69}$, $e = h_{120}n_8$, $f = h_8n_{120}$, $g = h_1h_6n_2n_{37}n_{40}n_{57}$, $i = h_1h_3h_6n_2n_{32}n_{51}n_{52}$, $j = h_2h_8n_1n_{34}n_{36}n_{84}$ и $K = \langle a, b, c, d, e, f, g, i, j\rangle$. Тогда $\pi(K) = C_W(w)$. Вычисления в MAGMA показывают, что порождающие группы K удовлетворяют множеству соотношений для $C_W(w)$, поэтому $K \simeq C_W(w)$. С другой стороны, a коммутирует с другими порождающими группы K, поэтому $a, b, c, d, e, f, g, i, j$ лежат в $\overline{N}_{\sigma a}$ по лемме 1.4.2. Следовательно, $\overline{N}_{\sigma a}$ расщепляется над $\overline{T}_{\sigma a}$.

Другие случаи проверяются подобным образом. Разделим информацию на две части. Таблица 3.7 содержит информацию для максимальных торов четного порядка. Первый столбец таблицы 3.7 содержит номера торов в соответствии с таблицей 3.9. Второй столбец для каждого w содержит множество соотношений $S(w)$, которые определяют $C_W(w)$. Как и выше, мы используем запись $R(x)$, которая обозначает, что x коммутирует со всеми остальными порождающими. Третий столбец содержит примеры элементов, которые порождают дополнение. Все такие порождающие лежат в $\mathcal{T}$. Поэтому, нетрудно проверить в MAGMA, что эти порождающие удовлетворяют соотношениям из $S(w)$. Естественный прообраз элемента w в $\mathcal{T}$ обозначается через n. В каждом случае мы выбираем элемент x, который определяет группу $\overline{T}_{\sigma x}$. Обычно $x = n$, но иногда они отличаются. Чтобы проверить, что порождающий y лежит в $\overline{N}_{\sigma x}$, достаточно проверить, что $[x, y] = 1$ и применить лемму 1.4.2.

В таблице 3.8 приведена информация для максимальных торов нечетного порядка. Первый столбец этой таблицы содержит номера максимальных торов в соответствии с таблицей 3.9. Второй столбец содержит примеры элементов, которые порождают дополнение. Все такие порождающие лежат в $\mathcal{T}$. Естественный прообраз элемента w в $\mathcal{T}$ обозначается через n. Используя MAGMA, видим, что для каждого порождающего y верно, что $[n, y] = 1$ и, следовательно, в каждом случае $y \in \overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2. Лемма 3.4.7 влечет, что во всех этих случаях приведенные элементы порождают соответствующие дополнения.

Для удобства все проверяемые равенства выложены в [50].

Таблица 3.7: Расщепляемые нормализаторы максимальных торов четного порядка группы $E_8(q)$

№	определяющие соотношения для $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
10	$a^3 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1$, $g^2 = i^2 = j^2 = 1$, $R(a)$, $R(b)$, $[c, e] = [c, f] = [c, g] = [c, i] = 1$, $[d, e] = [d, f] = [d, g] = [d, i] = 1$, $[e, g] = [e, i] = [f, g] = [f, i] = 1$, $(cd)^3 = (ef)^3 = (gi)^3 = 1$, $jcje = jdjf = jgjbg = jijbi = 1$	$a = x = n$, $b = n_0$, $c = h_{69}n_2$, $d = h_2n_{69}$, $e = h_{120}n_8$, $f = h_8n_{120}$, $g = h_1h_6n_2n_{37}n_{40}n_{57}$, $i = h_1h_3h_6n_2n_{32}n_{51}n_{52}$, $j = h_2h_8n_1n_{34}n_{36}n_{84}$
12	$a^{10} = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1$, $R(a)$, $(bc)^3 = (bd)^2 = (be)^2 = 1$,	$x = n$, $a = nn_0$, $b = h_2h_5n_6$, $c = h_2h_5h_6n_7$, $d = h_2h_5h_6h_7n_8$,

Продолжение таблицы 3.7

№	определяющие соотношения для $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
	$(cd)^3 = (ce)^2 = (de)^3 = 1$	$e = h_6h_8n_{120}$
15	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1$, $R(a)$, $R(b)$, $(cd)^3 = (ef)^3 = 1$, $(ce)^2 = (cf)^2 = (de)^2 = (df)^2 = 1$	$a = x = h_4n$, $b = n_0$, $c = h_{120}n_8$, $d = h_8n_{120}$, $e = h_1h_4h_6n_{32}n_{51}n_{52}$, $f = h_4n_{37}n_{40}n_{57}$
17	$a^{10} = b^2 = c^2 = d^2 = (cd)^3 = 1$, $R(a)$, $R(b)$	$a = x = h_2n$, $b = n_0$, $c = h_2h_5h_7n_8$, $d = h_8n_{120}$
18	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = 1$, $(de)^3 = [c,d] = [c,e] = 1$, $R(a)$, $R(b)$,	$a = x = h_2n$, $b = n_0$, $c = h_2h_3h_5n_{69}$, $d = h_2h_5h_7n_8$, $e = h_8n_{120}$
21	$a^2 = b^2 = c^2 = d^{12} = e^6 = 1$, $(bc)^3 = [b,d] = [b,e] = 1$, $[c,d] = [c,e] = 1$, $R(a)$, $[d^8,e] = (d^6e^{-1})^3 = 1$, $d^6e^2d^6e^{-2} = ed^8(d^{-1}e)^2d^{-1} = 1$	$x = n$, $a = n_0$, $b = h_{120}n_8$, $c = h_8n_{120}$, $d = h_4h_5n_1n_2n_6n_4n_{17}n_{26}$, $e = h_6n_1n_2n_6n_{18}n_{33}n_{45}$
22	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1$, $R(a)$, $R(b)$, $(cd)^3 = (ef)^3 = 1$, $(ce)^2 = (cf)^2 = (de)^2 = (df)^2 = 1$	$a = x = h_1h_4h_6n$, $b = n_0$, $c = h_{120}n_8$, $d = h_8n_{120}$, $e = h_{69}n_{32}$, $f = h_{32}n_{69}$
23	$a^{12} = b^2 = c^2 = d^2 = (cd)^3 = 1$, $R(a)$, $R(b)$	$a = x = n$, $b = n_0$, $c = h_{120}n_8$, $d = h_8n_{120}$
24	$a^{18} = b^2 = c^2 = (bc)^3 = 1$, $[a,b] = [a,c] = 1$	$x = n$, $a = xn_0$, $b = h_{120}n_8$, $c = h_8n_{120}$
25	$a^6 = b^2 = c^2 = (bc)^3 = 1$, $R(a)$, $d^4 = e^3 = 1$, $ded^{-1}ede = (e^{-1}d)^3 = 1$, $[b,d] = [b,e] = [c,d] = [c,e] = 1$	$x = n$, $a = x^2n_0$, $b = h_{120}n_8$, $c = h_8n_{120}$, $d = h_1h_2h_5n_3n_6n_{25}n_{37}$, $e = h_1h_2h_4h_6n_1n_4n_6n_{17}n_{26}n_{57}$

Продолжение таблицы 3.7

№	определяющие соотношения для $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
27	$a^{30} = b^2 = aba^{-1}b^{-1} = 1$	$x = n$, $a = xn_0$, $b = h_6h_8n_{120}$
29	$a^{14} = b^2 = aba^{-1}b^{-1} = 1$	$x = n$, $a = xn_0$, $b = h_1h_4h_6h_8n_{120}$
34	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1$, $(de)^3 = [c, d] = [c, e] = 1$, $R(a)$, $R(b)$, $fcfa^3c = fdfa^3bd = fefa^3be = 1$	$a = x = h_4h_7n$, $b = n_0$, $c = h_1h_2h_4h_6n_2$, $d = h_3h_4n_{32}n_{51}n_{52}$, $e = h_1h_4h_6n_{37}n_{40}n_{57}$, $f = h_4h_5h_6h_7n_1n_{28}n_{42}n_{84}$
38	$a^{10} = b^2 = c^2 = (bc)^4 = 1$, $[a, b] = [a, c] = 1$	$x = h_3h_7n$, $a = xn_0$, $b = h_8n_{97}n_{98}$, $c = h_2h_5h_7n_8$
39	$a^6 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $R(a)$, $R(b)$, $[c, d] = 1$	$a = x = h_3h_8n$, $b = n_0$, $c = h_3h_5h_7n_1$, $d = h_4h_5h_7h_8n_{120}$
40	$a^6 = b^6 = c^2 = d^2 = (cd)^3 = 1$, $R(a)$, $[b, c] = [b, d] = 1$	$a = x = h_3n$, $b = n_7n_8n_0$, $c = h_3h_5n_{23}n_{24}$, $d = h_2h_5n_{105}n_{106}$
43	$a^2 = b^{18} = c^4 = 1$, $b^{-1}(c^{-1}b)^2c^{-1}b^{-1} = 1$, $R(a)$, $(b^{-1}c^{-1})^2c^{-1}(bcb^2)^3c^{-1}b^{-2}cbc = 1$	$x = h_7n$, $a = n_0$, $b = h_1h_4h_5h_7n_1n_6n_{63}n_4n_8n_{19}n_{51}$, $c = h_4n_1n_4n_3n_{32}$
44	$a^{30} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_4n$, $b = n_0$
45	$a^{20} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_5n$, $b = n_0$
46	$a^{14} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_8n$, $b = n_0$
47	$a^8 = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_2n$, $b = n_0$
50	$a^{24} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = n$, $b = n_0$
51	$a^{12} = b^6 = [a, b] = 1$	$a = x = h_1n$, $b = h_2h_5h_7n_1n_2n_5n_8n_7n_{44}n_{71}n_{89}$
52	$a^{12} = b^2 = c^2 = 1$, $R(a)$, $R(b)$	$a = x = h_7n$, $b = n_0$, $c = h_2h_5h_7n_8$
53	$a^{18} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_7n$, $b = n_0$
54	$a^6 = b^2 = c^4 = d^3 = 1$,	$a = x = h_{120}n$, $b = n_0$,

Продолжение таблицы 3.7

№	определяющие соотношения для $C_W(w)$	порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma x}$ в $\overline{N}_{\sigma x}$
	$cdc^{-1}dcd = (d^{-1}c)^3 = 1$, $R(a)$, $R(b)$	$c = h_1h_2h_5n_3n_6n_{25}n_{37}$, $d = h_1h_2h_4h_6n_1n_4n_6n_{17}n_{26}n_{57}$
55	$a^{12} = b^2 = [a, b] = 1$	$a = x = h_1n$, $b = n_0$
60	$a^{12} = b^2 = c^2 = (bc)^3 = 1$, $[a, b] = [a, c] = 1$	$a = x = h_4n$, $b = h_1h_3h_4h_6h_7n_{69}n_{70}$, $c = h_2h_7n_{78}n_{79}$
61	$a^8 = b^4 = c^3 = (bc)^4 = 1$, $acabc^{-1}bcb^{-1}a^4b$, $R(a)$	$a = x = n$, $b = h_2n_2n_{109}n_{10}n_{11}$, $c = h_2h_5h_8n_1n_2n_7n_{29}n_{18}n_{44}n_{56}n_{119}$

Таблица 3.8: Расщепляемые нормализаторы максимальных торов нечетного порядка группы $E_8(q)$

№	Порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$
56	$a = n^2n_0$, $b = h_1h_4n_1n_4n_{18}n_{44}$, $c = h_1h_3h_5h_6h_7h_8n_1n_2n_{64}n_{116}n_{26}n_{28}n_{32}n_{120}$
57	$a = n$, $b = h_2h_3h_4h_5h_7n_1n_2n_5n_{44}n_{28}n_{45}n_{56}n_{114}$, $c = h_1h_2h_3h_4h_5h_6n_1n_4n_6n_8n_{58}n_{63}n_{96}n_{113}$
58	$a = nn_0$, $b = h_1h_5h_8n_{49}n_{67}$
62	$a = n$, $b = h_4h_5h_6h_8n_1n_5n_{20}n_{71}n_{10}n_{38}n_{44}n_{67}$, $c = h_1h_2h_3h_5h_6h_8n_1n_5n_{20}n_{78}n_{18}n_{33}n_{49}n_{63}$, $d = h_1h_2h_3h_6h_7h_8n_8n_{99}n_{59}n_{120}$
63	$a = n^2$, $b = h_3h_5n_2n_{32}n_{10}n_{63}$, $c = h_2h_4n_4n_2$, $d = h_1h_2h_5h_6h_7h_8n_8n_{104}n_{58}n_{120}$, $e = n_{61}n_{67}$
64	$a = n$
65	$a = n$
66	$a = n$

Продолжение таблицы 3.8

№	Порождающие дополнения для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$
67	$a = n$, $b = h_3h_5h_6n_{18}n_{45}n_{92}n_{112}$, $c = h_2h_3h_4n_2n_{29}n_4n_{17}$

Таблица 3.9: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $E_8(q)$

№	представитель w	$\lvert w\rvert$	тор T	
1	1	1	$(q-1)^8$	−
2	w_1	2	$(q-1)^6 \times (q^2-1)$	−
3	w_1w_2	2	$(q-1)^4 \times (q^2-1)^2$	−
4	w_3w_1	3	$(q-1)^5 \times (q^3-1)$	−
5	$w_2w_3w_5$	2	$(q-1)^2 \times (q^2-1)^3$	−
6	$w_1w_3w_5$	6	$(q-1)^3 \times (q^2-1) \times (q^3-1)$	−
7	$w_1w_3w_4$	4	$(q-1)^4 \times (q^4-1)$	−
8	$w_1w_4w_6w_{69}$	2	$(q-1)^2 \times (q+1)^2 \times (q^2-1)^2$	−
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$ $\times(q+1)(q^3-1)$	−
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$(q-1)^2 \times (q^3-1)^2$	+
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$(q-1)^2 \times (q^2-1) \times (q^4-1)$	−
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$(q-1)^3 \times (q^5-1)$	+
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$ $\times(q-1)(q^3+1)$	−
14	$w_3w_2w_4w_{18}$	4	$(q-1)^2 \times ((q-1)(q^2+1))^2$	−
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$(q-1) \times (q^3-1)$ $\times(q+1)(q^3-1)$	+
16	$w_1w_4w_6w_3w_{69}$	4	$(q-1)^2 \times (q+1)^2 \times (q^4-1)$	−
17	$w_1w_4w_5w_3w_{69}$	10	$(q-1)^2 \times (q+1)(q^5-1)$	+
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$(q-1)^2 \times (q^6-1)$	+

Продолжение таблицы 3.9

№	представитель w	$\|w\|$	тор T	
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$(q-1)^2 \times (q^2-1)(q^4+1)$	$-$
20	$w_{26}w_5w_4w_3w_2$	12	$(q-1)^2 \times (q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	$-$
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{69}$	3	$(q-1) \times (q^2+q+1)^2 \times (q^3-1)$	$+$
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{69}$	6	$(q-1) \times (q^3+1) \times (q^3-1)$ $\times(q+1)$	$+$
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$(q-1) \times (q^3-1)(q^4-q^2+1)$	$+$
24	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_6$	9	$(q-1) \times (q-1)(q^6+q^3+1)$	$+$
25	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_{48}$	6	$(q-1) \times (q^2-q+1)$ $\times(q-1)(q^4+q^2+1)$	$+$ $+$
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$(q-1) \times (q^3-1) \times (q^4-1)$	$-$
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$(q-1) \times (q^5-1)(q^2+q+1)$	$+$
28	$w_3w_2w_4w_{18}w_7$	4	$(q^2-1) \times ((q^2+1)(q-1))^2$	$-$
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	$(q-1) \times (q^7-1)$	$+$
30	$w_{46}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$(q-1)(q^4+1) \times (q-1)(q^2+1)$	$-$
31	$w_2w_3w_5w_7$	2	$(q^2-1)^4$	$-$
32	$w_{74}w_3w_2w_5w_4$	6	$(q^2-1)^2 \times (q+1)(q^3-1)$	$-$
33	$w_8w_1w_4w_6w_3$	4	$(q^2-1)^2 \times (q^4-1)$	$-$
34	$w_1w_5w_3w_6w_2w_8$	6	$(q+1)(q^3-1) \times (q+1)(q^3-1)$	$+$
35	$w_1w_2w_3w_6w_8w_7$	12	$(q+1)(q^3-1) \times (q^4-1)$	$-$
36	$w_1w_4w_3w_7w_6w_8$	4	$(q^4-1) \times (q^4-1)$	$-$
37	$w_4w_8w_2w_5w_7w_{120}$	4	$(q^2-1)^2 \times (q^2+1)^2$	$-$
38	$w_1w_8w_2w_4w_5w_6$	10	$(q^2-1) \times (q+1)(q^5-1)$	$+$
39	$w_1w_2w_4w_6w_5w_7$	6	$(q^2-1) \times (q^6-1)$	$+$
40	$w_2w_3w_5w_7w_4w_8$	6	$(q^2-1) \times (q^6-1)$	$+$
41	$w_2w_3w_4w_8w_7w_{18}$	12	$(q-1)(q^2+1) \times (q^2+1)(q^3-1)$	$-$
42	$w_2w_3w_4w_5w_6w_8$	8	$(q^2-1) \times (q^2-1)(q^4+1)$	$-$
43	$w_1w_5w_8w_2w_3w_6w_{69}$	6	$(q^2+q+1)^2 \times (q+1)(q^3-1)$	$+$

Продолжение таблицы 3.9

№	представитель w	$\|w\|$	тор T	
44	$w_1w_5w_7w_2w_3w_6w_8$	30	$(q+1)(q^2+q+1)(q^5-1)$	+
45	$w_1w_4w_2w_3w_6w_8w_7$	20	$(q+1)(q^2+1)(q^5-1)$	+
46	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7w_{120}$	14	$(q+1)(q^7-1)$	+
47	$w_1w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	8	(q^8-1)	+
48	$w_2w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$	8	$(q^2-1)\times(q^2+1)\times(q^4+1)$	−
49	$w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18}$	4	$(q^2+1)^2\times(q^4-1)$	−
50	$w_2w_3w_5w_4w_8w_6w_{120}$	24	$(q+1)(q^3-1)(q^4+1)$	+
51	$w_{26}w_5w_4w_3w_2w_{120}w_8$	12	$(q^2+1)(q^6-1)$	+
52	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5w_8$	12	$(q^2-1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)$	+
53	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_6w_8$	18	$(q^2-1)(q^6+q^3+1)$	+
54	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_{48}w_8$	6	$(q^2-q+1)^2\times(q+1)(q^3-1)$	+
55	$w_2w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	12	$(q^2-1)(q^6+1)$	+
56	$w_1w_2w_3w_5w_6w_8w_{120}w_{69}$	3	$(q^2+q+1)^4$	+
57	$w_1w_4w_2w_3w_6w_8w_7w_{120}$	5	$(q^4+q^3+q^2+q+1)^2$	+
58	$w_1w_3w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$	9	$(q^2+q+1)\times(q^6+q^3+1)$	+
59	$w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74}$	4	$(q^2+1)^4$	−
60	$w_2w_3w_5w_7w_4w_6w_8w_{114}$	12	$(q^2+1)\times(q^6+1)$	+
61	$w_4w_6w_8w_{113}w_3w_5w_{32}w_7$	8	$(q^4+1)^2$	+
62	$w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_8w_{120}$	12	$(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)$ $\times(q^2+q+1)$	+
63	$w_1w_4w_6w_8w_3w_{32}w_5w_{120}$	6	$(q^4+q^2+1)\times(q^2+q+1)$ $\times(q^2-q+1)$	+
64	$w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	30	$q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$	+
65	$w_1w_4w_6w_8w_{32}w_5w_7w_{120}$	24	q^8-q^4+1	+
66	$w_1w_4w_6w_8w_{32}w_2w_5w_7$	20	$q^8-q^6+q^4-q^2+1$	+
67	$w_2w_{32}w_5w_7w_1w_4w_6w_{65}$	12	$(q^4-q^2+1)^2$	+

Теорема 3.4.2 доказана.

Объединенные результаты.

В этом разделе мы объединяем результаты теорем 3.2.2, 3.5 и 3.4.2 в одной таблице. Информация для лиевых типов E_7 и E_8 взята из таблиц 3.5 и 3.9, соответственно. Символ '+' используется, если соответствующий тор имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе, иначе используется символ '–' в соответствующей ячейке таблицы. Символ '±' для случая 14 означает, что алгебраический нормализатор расщепляется над тором тогда и только тогда, когда $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$.

Таблица 3.10: Расщепляемость нормализаторов в $E_l(q)$, где $l \in \{6, 7, 8\}$

тор	представ.	E_6^ε	E_7	E_8	тор	представ.	E_8
1	1	–	–	–	35	$\alpha\beta\gamma\zeta\vartheta\eta$	–
2	α	–	–	–	36	$\alpha\delta\gamma\eta\zeta\vartheta$	–
3	$\alpha\beta$	–	–	–	37	$\delta\vartheta\beta\varepsilon\eta\lambda$	–
4	$\gamma\alpha$	+	+	–	38	$\alpha\vartheta\beta\delta\varepsilon\zeta$	+
5	$\beta\gamma\varepsilon$	–	–	–	39	$\alpha\beta\delta\zeta\varepsilon\eta$	+
6	$\alpha\gamma\varepsilon$	+	+	–	40	$\beta\gamma\varepsilon\eta\delta\vartheta$	+
7	$\alpha\gamma\delta$	–	–	–	41	$\beta\gamma\delta\vartheta\eta\rho$	–
8	$\alpha\delta\zeta\mu$	–	–	–	42	$\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\vartheta$	–
9	$\alpha\beta\gamma\varepsilon$	+	+	–	43	$\alpha\varepsilon\vartheta\beta\gamma\zeta\mu$	+
10	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta$	+	+	+	44	$\alpha\varepsilon\eta\beta\gamma\zeta\vartheta$	+
11	$\alpha\delta\zeta\gamma$	–	–	–	45	$\alpha\delta\beta\gamma\zeta\vartheta\eta$	+
12	$\alpha\delta\gamma\beta$	+	+	+	46	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\eta\lambda$	+
13	$\gamma\beta\varepsilon\delta$	+	+	–	47	$\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	+
14	$\gamma\beta\delta\rho$	±	–	–	48	$\beta\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda$	–
15	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta\beta$	+	+	+	49	$\beta\gamma\delta\eta\lambda\vartheta\rho$	–
16	$\alpha\delta\zeta\gamma\mu$	–	–	–	50	$\beta\gamma\varepsilon\delta\vartheta\zeta\lambda$	+
17	$\alpha\delta\varepsilon\gamma\mu$	+	+	+	51	$\pi\varepsilon\delta\gamma\beta\lambda\vartheta$	+

Продолжение таблицы 3.10

тор	представ.	E_6^{ε}	E_7	E_8	тор	представ.	E_8
18	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon$	$+$	$+$	$+$	52	$\alpha\delta\zeta\gamma\beta\varepsilon\vartheta$	$+$
19	$\beta\varepsilon\gamma\delta\zeta$	$+$	$+$	$-$	53	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\zeta\vartheta$	$+$
20	$\pi\varepsilon\delta\gamma\beta$	$+$	$+$	$-$	54	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\nu\vartheta$	$+$
21	$\alpha\varepsilon\beta\gamma\zeta\mu$	$+$	$+$	$+$	55	$\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	$+$
22	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\mu$	$+$	$+$	$+$	56	$\alpha\beta\gamma\varepsilon\zeta\vartheta\lambda\mu$	$+$
23	$\alpha\delta\zeta\gamma\beta\varepsilon$	$+$	$+$	$+$	57	$\alpha\delta\beta\gamma\zeta\vartheta\eta\lambda$	$+$
24	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\zeta$	$+$	$+$	$+$	58	$\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda$	$+$
25	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\nu$	$+$	$+$	$+$	59	$\beta\gamma\delta\eta\lambda\rho\vartheta\kappa$	$-$
26	$\alpha\delta\zeta\gamma\eta$		$+$	$-$	60	$\beta\gamma\varepsilon\eta\delta\zeta\vartheta\psi$	$+$
27	$\alpha\delta\zeta\beta\gamma\eta$		$+$	$+$	61	$\delta\zeta\vartheta\omega\gamma\varepsilon\xi\eta$	$+$
28	$\gamma\beta\delta\rho\eta$		$-$	$-$	62	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\vartheta\lambda$	$+$
29	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\eta$		$+$	$+$	63	$\alpha\delta\zeta\vartheta\gamma\xi\varepsilon\lambda$	$+$
30	$\tau\gamma\varepsilon\alpha\delta\zeta$		$+$	$-$	64	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	$+$
31	$\beta\gamma\varepsilon\eta$			$-$	65	$\alpha\delta\zeta\vartheta\xi\varepsilon\eta\lambda$	$+$
32	$\kappa\gamma\beta\varepsilon\delta$			$-$	66	$\alpha\delta\zeta\vartheta\xi\beta\varepsilon\eta$	$+$
33	$\vartheta\alpha\delta\zeta\gamma$			$-$	67	$\beta\xi\varepsilon\eta\alpha\delta\zeta\upsilon$	$+$
34	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta\beta\vartheta$			$+$			

3.5 Исключительные группы $F_4(q)$

В данном разделе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\overline{G}$ типа F_4. Ответ на проблему 1 дает следующая теорема.

Теорема 3.5.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа лиева типа F_4 над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$. Пусть $\overline{T}$ — максимальный тор в группе $\overline{G}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

При переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ — фундаментальная система корней корневой системы F_4. Мы полагаем, что $r_8 = r_1 + r_2 + r_3$, $r_{16} = r_2 + 2r_3 + 2r_4$ и $r_{21} = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 2r_4$. Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i.

Ответ на проблему 2 для групп $F_4(q)$ содержится в следующей теореме, где найдены минимальные добавления к максимальным торам в их алгебраических нормализаторах.

Теорема 3.5.2. *Пусть $G = F_4(q)$, W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Предположим, что максимальный тор T группы G соответствует элементу w из W и M — добавление к T в $N(G, T)$ минимального порядка. Тогда $|M \cap T| \leqslant 8$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) $|M \cap T| = 1$ тогда и только тогда, когда либо q четно, либо порядок элемента w не делит 4. Другими словами, T имеет дополнение в $N(G, T)$ только в этих случаях.

(2) $|M \cap T| = 2$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов: w_3, $w_{16}w_3$, w_3w_2, $w_2w_1w_{16}$ или $w_{16}w_3w_2$.

(3) $|M \cap T| = 4$ тогда и только тогда, когда q нечетно и w сопряжен в W с одним из следующих элементов: 1, w_0, w_6w_3, $w_8w_{16}w_3w_2$, w_2 при $q \equiv 1 \pmod 4$ или w_0w_2 при $q \equiv 3 \pmod 4$.

(4) $|M \cap T| = 8$ тогда и только тогда, когда либо $q \equiv 3 \pmod 4$ и w сопряжен с w_2, либо $q \equiv 1 \pmod 4$ и w сопряжен с w_2w_0.

Для алгебраических групп лиева типа F_4 в работе [9] найдены минимальные порядки поднятий для элементов, принадлежащих так называемым регулярным или эллиптическим классам сопряженности группы W. В частности, авторы заметили, что существует эллиптический элемент порядка 4 такой, что любое его поднятие имеет порядок 8. В следующей теореме найдены минимальные порядки поднятий для всех элементов группы Вейля в соответствующих алгебраических нормализаторах.

Теорема 3.5.3. *Пусть* $G = F_4(q)$ *и* W *— группа Вейля группы* G*. Пусть* T *— максимальный тор группы* G*, соответствующий элементу* w *из* W*. Тогда* w *имеет поднятие в* $N(G,T)$ *порядка* $|w|$*, за исключением следующих случаев:*

(1) q *нечетно и* w *сопряжен с* $w_{16}w_3w_2$ *или* $w_{21}w_8w_3w_2$*.*

(2) $q \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ *и* w *сопряжен с* w_3w_2 *или* $w_2w_1w_{16}$*.*

Результаты теорем 3.5.2 и 3.5.3 проиллюстрированы в таблицах 3.11 и 3.12, соответственно. Отметим, что обе теоремы верны для групп $F_4(2)$ и $2.F_4(2)$ (в обозначениях [25]). В случае $q > 2$ существует только одна конечная группа лиева типа F_4 над полем порядка q. Отметим также, что если элемент группы $N(G,T)$ является поднятием для w, то очевидно он также является поднятием и в группе $N_{\overline{G}}(\overline{T})$.

Предварительные сведения.

Матрица Картана (A_{ij}) корневой системы F_4 имеет вид

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группа Вейля $W(F_4)$ разрешима и ее порядок равен $2^7 \cdot 3^2$. Ее можно записать в виде $W(F_4) = \langle w_{r_1}, \ldots, w_{r_4} | (w_{r_i}w_{r_j})^{n_{ij}} = 1 \rangle$, где

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 2, & \text{если } r_i \text{ и } r_j \text{ не соединены ребром,} \\ 3, & \text{если } r_i \text{ и } r_j \text{ соединены ребром кратности 1,} \\ 4, & \text{если } r_i \text{ и } r_j \text{ соединены ребром кратности 2.} \end{cases}$$

Поскольку $\Delta(F_4) = 1$, то универсальная и присоединенная группы вида $F_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ совпадают.

Для вычисления произведений элементов в группе $\overline{N}$ мы используем MAGMA [53]. Все вычисления могут быть выполнены также и в онлайн MAGMA-калькуляторе [48]. В работе использовалась версия Magma V2.25-5. Все подготовительные команды могут быть найдены в [51]. Наши вычисления для $\overline{N}$ соответствуют порядку и структурным константам, определенным в ранее. Для вычислений в группе W мы используем GAP[52]. Отметим, что любое используемое вычисление в данной работе с помощью MAGMA и GAP может быть проверено непосредственно.

Следующее утверждение является основным инструментом при вычислении степеней и коммутаторов элементов в $\overline{N}$.

Лемма 3.5.4. *Пусть Φ — система корней типа F_4 и r_1, r_2, r_3, r_4 — ее фундаментальные корни. Пусть $r \in \Phi$, w_r — отражение и $A = (a_{ij})$ — матрица элемента w_r в базисе r_1, r_2, r_3, r_4. Предположим, что $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — элемент группы $\overline{T}$, и определим*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} \\ a_{31}/2 & a_{32}/2 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}/2 & a_{42}/2 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

(1) $H^{n_r} = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4)$, *где* $\lambda'_i = \lambda_1^{b_{i1}} \cdot \lambda_2^{b_{i2}} \cdot \lambda_3^{b_{i3}} \cdot \lambda_4^{b_{i4}}$;

(2) Если $a, b \in \mathcal{T}$ *и* $H^a = (\lambda_1^{c_{11}}\lambda_2^{c_{12}}\lambda_3^{c_{13}}\lambda_4^{c_{14}}, \lambda_1^{c_{21}}\lambda_2^{c_{22}}\lambda_3^{c_{23}}\lambda_4^{c_{24}}, \lambda_1^{c_{31}}\lambda_2^{c_{32}}\lambda_3^{c_{33}}\lambda_4^{c_{34}}, \lambda_1^{c_{41}}\lambda_2^{c_{42}}\lambda_3^{c_{43}}\lambda_4^{c_{44}})$, $H^b = (\lambda_1^{d_{11}}\lambda_2^{d_{12}}\lambda_3^{d_{13}}\lambda_4^{d_{14}}, \lambda_1^{d_{21}}\lambda_2^{d_{22}}\lambda_3^{d_{23}}\lambda_4^{d_{24}}, \lambda_1^{d_{31}}\lambda_2^{d_{32}}\lambda_3^{d_{33}}\lambda_4^{d_{34}}, \lambda_1^{d_{41}}\lambda_2^{d_{42}}\lambda_3^{d_{43}}\lambda_4^{d_{44}})$, *то*

$$H^{ab} = (\lambda_1^{e_{11}}\lambda_2^{e_{12}}\lambda_3^{e_{13}}\lambda_4^{e_{14}}, \lambda_1^{e_{21}}\lambda_2^{e_{22}}\lambda_3^{e_{23}}\lambda_4^{e_{24}}, \lambda_1^{e_{31}}\lambda_2^{e_{32}}\lambda_3^{e_{33}}\lambda_4^{e_{34}}, \lambda_1^{e_{41}}\lambda_2^{e_{42}}\lambda_3^{e_{43}}\lambda_4^{e_{44}}),$$

где матрица (e_{ij}) *является произведением матриц* (c_{ij}) *и* (d_{ij});

(3) $(Hn)^m = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4)n^m$, *где m — целое положительное число,* $\lambda'_i = \lambda_1^{c_{i1}} \cdot \lambda_2^{c_{i2}} \cdot \lambda_3^{c_{i3}} \cdot \lambda_4^{c_{i4}}$ *и c_{ij} — элементы матрицы* $\sum\limits_{t=0}^{m-1} B^t$.

Доказательство. (1). Поскольку $h_s(\lambda)^{n_r} = h_{w_r(s)}(\lambda)$, то

$H^{n_r} = h_{r_1}(\lambda_1)^{n_r} h_{r_2}(\lambda_2)^{n_r} h_{r_3}(\lambda_3)^{n_r} h_{r_4}(\lambda_4)^{n_r} =$

$$h_{w_r(r_1)}(\lambda_1)^{n_r} h_{w_r(r_2)}(\lambda_2)^{n_r} h_{w_r(r_3)}(\lambda_3)^{n_r} h_{w_r(r_4)}(\lambda_4)^{n_r}.$$

По определению, $w_r(r_i) = a_{1i}r_1 + a_{2i}r_2 + a_{3i}r_3 + a_{4i}r_4$. Если $s = w_r(r_1)$, то

$$\chi_{s,\lambda_1}(a) = \lambda_1^{\frac{2(s,a)}{(s,s)}} = \lambda_1^{\frac{a_{11}2(r_1,a)}{(s,s)}} \lambda_1^{\frac{a_{21}2(r_2,a)}{(s,s)}} \lambda_1^{\frac{a_{31}2(r_3,a)}{(s,s)}} \lambda_1^{\frac{a_{41}2(r_4,a)}{(s,s)}}.$$

Поскольку $(s,s) = (r_1,r_1) = (r_2,r_2) = 2(r_3,r_3) = 2(r_4,r_4)$, имеем

$$\chi_{s,\lambda_1}(a) = \chi_{r_1,\lambda_1^{a_{11}}}(a)\chi_{r_2,\lambda_1^{a_{21}}}(a)\chi_{r_3,\lambda_1^{a_{31}/2}}(a)\chi_{r_4,\lambda_1^{a_{41}/2}}(a)$$

и, следовательно, $h_{w_r(r_1)}(\lambda_1)^{n_r} = (\lambda_1^{a_{11}}, \lambda_1^{a_{21}}, \lambda_1^{a_{31}/2}, \lambda_1^{a_{41}/2})$. Аналогично получаем, что $h_{w_r(r_2)}(\lambda_2)^{n_r} = (\lambda_2^{a_{12}}, \lambda_2^{a_{22}}, \lambda_2^{a_{32}/2}, \lambda_2^{a_{42}/2})$. В силу равенств

$$(w_r(r_3), w_r(r_3)) = (r_1,r_1)/2 = (r_2,r_2)/2 = (r_3,r_3) = (r_4,r_4),$$

имеем

$$\chi_{w_r(r_3),\lambda_3}(a) = \chi_{r_1,\lambda_3^{2a_{13}}}(a)\chi_{r_2,\lambda_3^{2a_{23}}}(a)\chi_{r_3,\lambda_3^{a_{33}}}(a)\chi_{r_4,\lambda_3^{a_{43}}}(a).$$

Тогда $h_{w_r(r_3)}(\lambda_3)^{n_r} = (\lambda_3^{2a_{13}}, \lambda_3^{2a_{23}}, \lambda_3^{a_{33}}, \lambda_3^{a_{43}})$ и, аналогично $h_{w_r(r_4)}(\lambda_4)^{n_r} = (\lambda_4^{2a_{14}}, \lambda_4^{2a_{24}}, \lambda_4^{a_{34}}, \lambda_4^{a_{44}})$. Наконец, находим, что

$$H^{n_r} = (\lambda_1^{a_{11}}, \lambda_1^{a_{21}}, \lambda_1^{a_{31}/2}, \lambda_1^{a_{41}/2})(\lambda_2^{a_{12}}, \lambda_2^{a_{22}}, \lambda_2^{a_{32}/2}, \lambda_2^{a_{42}/2})(\lambda_3^{2a_{13}}, \lambda_3^{2a_{23}}, \lambda_3^{a_{33}}, \lambda_3^{a_{43}})\cdot$$
$$\cdot(\lambda_4^{2a_{14}}, \lambda_4^{2a_{24}}, \lambda_4^{a_{34}}, \lambda_4^{a_{44}}) = (\lambda_1^{b_{11}}\lambda_2^{b_{12}}\lambda_3^{b_{13}}\lambda_4^{b_{14}}, \lambda_1^{b_{21}}\lambda_2^{b_{22}}\lambda_3^{b_{23}}\lambda_4^{b_{24}}, \lambda_1^{b_{31}}\lambda_2^{b_{32}}\lambda_3^{b_{33}}\lambda_4^{b_{34}}, \lambda_1^{b_{41}}\lambda_2^{b_{42}}\lambda_3^{b_{43}}\lambda_4^{b_{44}}),$$

что и требовалось показать.

(2). Поскольку $H^{ab} = (H^b)^a$, получаем, что

$$H^{ab} = (\lambda_1^{d_{11}}\lambda_2^{d_{12}}\lambda_3^{d_{13}}\lambda_4^{d_{14}}, \lambda_1^{d_{21}}\lambda_2^{d_{22}}\lambda_3^{d_{23}}\lambda_4^{d_{24}}, \lambda_1^{d_{31}}\lambda_2^{d_{32}}\lambda_3^{d_{33}}\lambda_4^{d_{34}}, \lambda_1^{d_{41}}\lambda_2^{d_{42}}\lambda_3^{d_{43}}\lambda_4^{d_{44}})^a.$$

Согласно пункту (1), если λ_1' — первая координата H^{ab}, то

$$\lambda_1' = (\lambda_1^{d_{11}}\lambda_2^{d_{12}}\lambda_3^{d_{13}}\lambda_4^{d_{14}})^{c_{11}}\cdot(\lambda_1^{d_{21}}\lambda_2^{d_{22}}\lambda_3^{d_{23}}\lambda_4^{d_{24}})^{c_{12}}\cdot(\lambda_1^{d_{31}}\lambda_2^{d_{32}}\lambda_3^{d_{33}}\lambda_4^{d_{34}})^{c_{13}}\cdot(\lambda_1^{d_{41}}\lambda_2^{d_{42}}\lambda_3^{d_{43}}\lambda_4^{d_{44}})^{c_{14}} =$$
$$= \lambda_1^{d_{11}c_{11}+d_{21}c_{12}+d_{31}c_{13}+d_{41}c_{14}}\lambda_2^{d_{21}c_{12}+d_{22}c_{22}+d_{32}c_{13}+d_{42}c_{14}}\cdot$$
$$\cdot\, \lambda_3^{d_{13}c_{11}+d_{23}c_{12}+d_{33}c_{13}+d_{43}c_{14}}\lambda_4^{d_{14}c_{11}+d_{24}c_{12}+d_{34}c_{13}+d_{44}c_{14}}.$$

Таким образом, если (e_{ij}) — элементы матрицы, являющейся произведением матриц (c_{ij}) и (d_{ij}), то $\lambda_1' = \lambda_1^{e_{11}}\lambda_2^{e_{12}}, \lambda_3^{e_{13}}\lambda_4^{e_{14}}$. Выражения для других координат элемента H^{ab} получаются аналогичным образом.

(3). Заметим, что $(Hn)^m = H^{n^0}H^{n^1}H^{n^2}\dots H^{n^{m-1}}n^m$. Из пункта (2) следует, что

$$H^{n^i} = (\lambda_1^{b_{11}^i}\lambda_2^{b_{12}^i}\lambda_3^{b_{13}^i}\lambda_4^{b_{14}^i}, \lambda_1^{b_{21}^i}\lambda_2^{b_{22}^i}\lambda_3^{b_{23}^i}\lambda_4^{b_{24}^i}, \lambda_1^{b_{31}^i}\lambda_2^{b_{32}^i}\lambda_3^{b_{33}^i}\lambda_4^{b_{34}^i}, \lambda_1^{b_{41}^i}\lambda_2^{b_{42}^i}\lambda_3^{b_{43}^i}\lambda_4^{b_{44}^i}),$$

где b_{jk}^i — элементы матрицы B^i. Перемножая выражения для H^{n^i} для всех $i \in \{0,\dots,m-1\}$, получаем требуемое равенство для $(Hn)^m$. □

Поскольку мы часто используем лемму 3.5.4 при доказательстве основных результатов, проиллюстрируем ее применение на следующем примере.

Пример 3.5.5. *Рассмотрим элементы $w = w_3w_2$ и $n = n_3n_2$. Несложно понять, что матрицы A и B для w имеют следующий вид.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — произвольный элемент тора $\overline{T}$. Тогда по лемме 3.5.4(1) мы можем использовать строки матрицы B, чтобы вычислить H^n. А именно,

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4, \lambda_4).$$

Теперь вычисляем матрицу $C = B^0 + B + B^2 + B^3$:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко посчитать, что $n^4 = h_3$. Тогда в силу леммы 3.5.4(3) получаем, что

$$(Hn)^4 = (\lambda_1^4, \lambda_1^4\lambda_4^4, \lambda_1^2\lambda_4^4, \lambda_4^4)n^4 = (\lambda_1^4, \lambda_1^4\lambda_4^4, -\lambda_1^2\lambda_4^4, \lambda_4^4).$$

В частности, если α — элемент из поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$, то $((\alpha,1,1,1)n)^4 = 1$.

В качестве приложения леммы 3.5.4 мы докажем вспомогательный результат, который часто используется нами при доказательстве отсутствия дополнений. Он основывается на том факте, что элемент $w = w_{21}w_8w_3w_2$ не имеет поднятий в $\overline{N}$ порядка $|w|$.

Лемма 3.5.6. *Пусть* $w = w_{21}w_8w_3w_2$ *и* $n = n_{21}n_8n_3n_2$*. Рассмотрим произвольный элемент* $H \in \overline{T}$*. Тогда выполнены следующие утверждения:*

(1) $(Hn)^4 = n^4 = h_3$.

(2) Если $u \in \overline{N}$*, то* $(Hn^u)^4 = h_3^u$.

Доказательство. В силу леммы 3.5.4(1) получаем, что $H^n = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^2\lambda_4^{-2}, \lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-1}, \lambda_4^{-1})$. Тогда из леммы 3.5.4(3) следует, что $(Hn)^4 = n^4$. Используя MAGMA, находим, что $n^4 = h_3$. Если $u \in \overline{N}$, то $(Hn^u)^4 = ((H^{u^{-1}}n)^u)^4 = ((H^{u^{-1}}n)^4)^u = h_3^u$. □

Доказательство теоремы 3.5.1.

Поскольку случай $p = 2$ следует из замечания 1.4.1, то далее мы считаем, что q нечетно. Предположим, что максимальный тор $\overline{T}$ имеет дополнение $\overline{K}$ в своем нормализаторе $\overline{N}$. Пусть N_i — прообраз элемента w_{r_i} в $\overline{K}$, где $i = 1, \ldots, 4$. Тогда $N_i = H_i n_{r_i}$ и $(N_iN_j)^{n_{ij}} = 1$. Пусть

$$\begin{aligned} H_1 &= (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4), \quad H_2 = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \\ H_3 &= (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad H_4 = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4). \end{aligned}$$

Поскольку $[n_2, n_4] = 1$, то по лемме 1.4.3 получаем, что $H_2^{-1}H_2^{n_4} = H_4^{-1}H_4^{n_2}$.

В силу леммы 3.5.4 имеем

$$H^{n_2} = (\lambda_1, \lambda_2^{-1}\lambda_1\lambda_3^2, \lambda_3, \lambda_4), \quad H^{n_4} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^{-1}\lambda_3).$$

Следовательно,

$$(1, 1, 1, \rho_4^{-2}\rho_3) = (1, \nu_2^{-2}\nu_1\nu_3^2, 1, 1),$$

откуда, в частности, следует $\rho_4^2 = \rho_3$. Далее,

$$1 = N_2^2 = H_2(H_2)^{n_2}h_2(-1) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \cdot (\rho_1, \rho_2^{-1}\rho_1\rho_3^2, \rho_3, \rho_4)h_2(-1) = (\rho_1^2, -\rho_1\rho_3^2, \rho_3^2, \rho_4^2).$$

Получаем, что $\rho_1^2 = \rho_3^2 = \rho_4^2 = 1$ и $\rho_1\rho_3^2 = -1$. Таким образом, $\rho_1 = -1$ и $\rho_3 = \rho_4^2 = 1$.

Аналогично найдем соотношения для элемента $H_3 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Поскольку $N_1N_3 = N_3N_1$, то по лемме 1.4.3 имеем $H_1^{-1}H_1^{n_3} = H_3^{-1}H_3^{n_1}$. В силу леммы 3.5.4 имеем

$$H^{n_1} = (\lambda_1^{-1}\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad H^{n_3} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3^{-1}\lambda_2\lambda_4, \lambda_4).$$

Следовательно,

$$(\mu_1^{-2}\mu_2, 1, 1, 1) = (1, 1, \kappa_3^{-2}\kappa_3\kappa_4, 1),$$

откуда, в частности, следует $\mu_2 = \mu_1^2$. Далее,

$$1 = N_3^2 = H_3(H_3)^{n_3}h_3(-1) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \cdot (\mu_1, \mu_2, \mu_3^{-1}\mu_2\mu_4, \mu_4)h_3(-1) = (\mu_1^2, \mu_2^2, -\mu_2\mu_4, \mu_4^2).$$

Следовательно, $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu_4^2 = 1$ и $\mu_2\mu_4 = -1$. Таким образом, $\mu_2 = \mu_1^2 = 1$ и $\mu_4 = -1$. В итоге получаем, что

$$H_2 = (-1, \rho_2, 1, \rho_4), \quad H_3 = (\mu_1, 1, \mu_3, -1), \quad \rho_4^2 = \mu_1^2 = 1.$$

Мы хотим показать, что равенство $(N_2N_3)^4 = 1$ не выполняется для полученных H_2, H_3. Действительно,

$N_2N_3 = H_2(H_3)^{n_2}n_2n_3 = (-\mu_1, \rho_2\mu_1\mu_3^2, \mu_3, -\rho_4)n_2n_3 = Hn_2n_3$.

Положим $t_1 = -\mu_1, t_2 = \rho_2\mu_1\mu_3^2, t_3 = \mu_3, t_4 = -\rho_4$. В силу леммы 3.5.4 имеем

$$(N_2N_3)^4 = (t_1^4, t_1^4t_4^4, t_1^2t_4^4, t_4^4)(n_2n_3)^4 = (n_2n_3)^4.$$

Вычисления в MAGMA показывают, что $(n_2n_3)^4 = h_3$. Продемонстрируем как эти вычисления могут быть проделаны самостоятельно. Нам потребуются значения следующих констант (см. раздел 1.2): $\zeta = \eta_{\alpha_3,\alpha_2} = -1, \xi = \eta_{r_2,r_2+2r_3} = 1$. Тогда $(n_2n_3)^4 = (n_{r_2}n_{r_2}^{n_{r_3}}h_{r_3}(-1))^2 = (n_{r_2}h_{r_2+2r_3}(\zeta)n_{r_2+2r_3}h_{r_3}(-1))^2 =$

$n_{r_2}h_{r_2+2r_3}(\zeta)n_{r_2+2r_3}h_{r_3}(-1)\cdot n_{r_2}n_{r_2+2r_3}h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_3}(-1)=$

$h_{r_2+2r_3}(\zeta)^{n_{r_2}}n_{r_2+2r_3}^{n_{r_2}}h_{r_3}(-1)^{n_{r_2}}h_{r_2}(-1)n_{r_2+2r_3}h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_3}(-1)=$

$h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_2+2r_3}(\xi)n_{r_2+2r_3}h_{r_2+r_3}(-1)h_{r_2}(-1)n_{r_2+2r_3}h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_3}(-1)=$

$h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_2+2r_3}(\xi)h_{r_2+r_3}(-1)^{n_{r_2+2r_3}}h_{r_2}(-1)^{n_{r_2+2r_3}}h_{r_2+2r_3}(-1)h_{r_2+2r_3}(\zeta)h_{r_3}(-1)=$

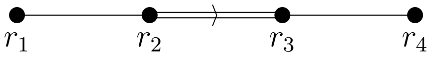
$h_{r_2+2r_3}(\zeta^2)h_{r_2+2r_3}(\xi)h_{-r_3}(-1)h_{r_2}(-1)h_{r_2}(-1)h_{r_3}(-1)h_{r_3}(-1)=$

$h_{r_2+2r_3}(\xi)h_{-r_3}(-1)=h_{r_2}(\xi)h_{r_3}(\xi)h_{r_3}(-1)=h_{r_3}(-1).$

Так как $p\neq 2$, то $(N_2N_3)^4=h_{r_3}(-1)\neq 1$. Противоречие.

Доказательство теорем 3.5.2 и 3.5.3

Поскольку случай $p=2$ следует из замечания 1.4.1, то далее мы считаем, что q нечетно. Мы предполагаем, что G — конечная группа лиева типа F_4 над полем из q элементов. Диаграмма Дынкина типа F_4 имеет следующий вид.



Хорошо известно, что в этом случае группа Вейля W изоморфна группе $\mathrm{GO}_4^+\simeq 2^{1+4}:(\mathrm{S}_3\times\mathrm{S}_3)$ (в обозначениях [25]). Поэтому W имеет центральную инволюцию w_0. Всего в группе W имеется 25 классов сопряженности. Среди их представителей имеется семь элементов w таких, что w и ww_0 сопряжены в W. Остальные 18 классов могут быть разбиты на пары w^W и $(ww_0)^W$ для подходящих элементов w. Мы выбираем представителей сопряженных классов согласно[37]. В частности, имеем $w_0=w_{21}w_8w_6w_3$. Мы будем также использовать другое представление $w_0=w_1w_3w_{14}w_2$.

Согласно предложению 1.3.1, в группе G имеется 25 классов сопряженности максимальных торов. Мы нумеруем их в порядке, указанном в таблице 3.11. При доказательстве теоремы 3.5.2 мы рассматриваем каждый класс сопряженности максимальных торов по отдельности. В качестве элемента группы W, соответствующего классу сопряженности некоторого максимального тора, мы используем w согласно таблице 3.11. Для каждого w мы выбираем элемент n такой, что $\pi(n)=w$ и находим минимальный порядок добавления к группе $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Если дополнения к $\overline{T}_{\sigma n}$

не существует, то мы находим минимальный порядок поднятия элемента w в $\overline{N}_{\sigma n}$ и выписываем само поднятие минимального порядка. Все вычисления, используемые для доказательств, могут быть найдены в [51].

Торы 1 и 17. В этом случае $w = 1$ или $w = w_0$, соответственно. Предположим, что $n = 1$ и M – добавление к $T = \overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Поскольку $w_{21}w_8w_3w_2 \in C_W(w)$, лемма 3.5.6 влечет, что $h_3 \in M \cap T$. Обозначим через x прообраз элемента w_4 в M. Тогда находим, что $h_3^x = h_3^{n_4} = h_3h_4$. Поскольку $M \cap T$ – нормальная подгруппа в M, имеем $\langle h_3, h_4\rangle \leqslant M \cap T$.

Теперь покажем, что существует добавление M такое, что $M \cap T = \langle h_3, h_4\rangle$. Хорошо известно, что

$$C_W(w) \simeq W(F_4) \simeq \langle a, b, c, d \mid a^2, b^2, c^2, d^2, (ab)^3, [a, c], [a, d], (bc)^4, [b, d], (cd)^3\rangle.$$

Более того, отражения w_1, w_2, w_3 и w_4 порождают группу $C_W(w)$ и удовлетворяют этому множеству определяющих соотношений. Пусть

$$a = h_2n_1, b = h_1n_2, c = h_4n_3, \text{ и } d = h_3n_4.$$

Мы утверждаем, что группа $M = \langle a, b, c, d\rangle$ является добавлением порядка $4\cdot|C_W(w)|$ к $\overline{T}_{\sigma n}$. Действительно, используя MAGMA, видим, что $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^3 = [a, d] = [b, d] = (cd)^3 = 1$ и $[a, c] = (bc)^4 = h_3$. Более того, группа M нормализует группу $L = \langle h_3, h_4\rangle$. Поэтому L – нормальная подгруппа в M и факторгруппа M/L – гомоморфный образ группы $C_W(w)$. Следовательно, имеем $|M| \leqslant 4 \cdot |C_W(w)|$. С другой стороны, мы знаем, что $M/(M \cap T) \simeq C_W(w)$, и поэтому $|M| = |M \cap T| \cdot |C_W(w)| \geq 4\cdot|C_W(w)|$. Значит, $|M| = 4\cdot|C_W(w)|$ и $M\cap T = \langle h_3, h_4\rangle$, как и утверждалось ранее.

Заметим, что единичный элемент группы $\overline{N}_{\sigma n}$ – требуемое поднятие для $w = 1$ и n_0 – поднятие порядка 2 для w_0.

Торы 2 и 9. В этом случае $w = w_2$ или $w = w_2w_0$, соответственно. Используя GAP, видим, что

$$C_W(w) = \langle w_2\rangle \times \langle w_0\rangle \times \langle w_4, w_8, w_{13}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4\,.$$

Если $w = w_2$, то положим $n = n_2$ и $\varepsilon = 1$, и если $w = w_0w_2$, то положим $n = n_0n_2$ и $\varepsilon = -1$. Обозначим $T = \overline{T}_{\sigma n}$. По лемме 3.5.4, находим, что

$$H^n = (\lambda_1^\varepsilon, \lambda_1^\varepsilon\lambda_2^{-\varepsilon}\lambda_3^{2\varepsilon}, \lambda_3^\varepsilon, \lambda_4^\varepsilon).$$

Предположим, что M – добавление к T такое, что число $|T \cap M|$ минимально. Вычисления в GAP показывают, что $(w_{21}w_8w_3w_2)^{w_7} \in C_W(w)$. Тогда лемма 3.5.6 влечет, что элемент $h_4 = h_3^{n_7}$ принадлежит группе $M \cap T$. Обозначим произвольный прообраз элемента w_8 в M через a. Поскольку $M \cap T$ нормальна в M, находим, что $h_4^a = h_4^{n_8} = h_3h_4 \in T \cap M$. Следовательно, имеем $L = \langle h_3, h_4\rangle \leqslant T \cap M$.

Предположим, что $\varepsilon q \equiv 1 \pmod 4$ и существует добавление M к группе T такое, что $M \cap T = L$. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_4] = [n, n_8] = [n, n_{13}] = 1$, и поэтому элементы n_4, n_8, n_{13} принадлежат группе $\overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2. Тогда найдутся элементы $H_0 = (\mu_i)$, $H_1 = (\alpha_i)$, $H_2 = (\beta_i)$ и $H_3 = (\gamma_i)$ в T такие, что элементы H_0n_0, H_1n_2, H_2n_4 и H_3n_{13} принадлежат M.

Поскольку $M/L \simeq C_W(w)$ и $w_2^2 = 1$, имеем $a^2 \in L$. По лемме 3.5.4 находим, что

$$(Hn_2)^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_1\lambda_3^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2).$$

Следовательно, $\alpha_1^2 = 1$ и $\alpha_1\alpha_3^2 = -1$. Поскольку $H_1 \in T$, заключаем, что $\alpha_1^{\varepsilon q-1} = \alpha_3^{\varepsilon q-1} = \alpha_4^{\varepsilon q-1} = 1$ и $\alpha_1^{\varepsilon q}\alpha_2^{-\varepsilon q}\alpha_3^{2\varepsilon q} = \alpha_2$. Значит, $\alpha_2^{\varepsilon q+1} = \alpha_1\alpha_3^2 = -1$. Аналогично для элементов H_0, H_2 и H_3 находим, что $\mu_2^{\varepsilon q+1} = \mu_1\mu_3^2$ и $\mu_3^{\varepsilon q-1} = \mu_4^{\varepsilon q-1} = \beta_4^{\varepsilon q-1} = \gamma_4^{\varepsilon q-1} = 1$.

Поскольку w_0 лежит в центре $Z(C_W(w))$ и $[n_0, n_2] = [n_0, n_4] = [n_0, n_{13}] = 1$, лемма 1.4.3 влечет, что $H_0^{-1}H_0^{n_2} = H_1^{-2}k_1$, $H_0^{-1}H_0^{n_4} = H_2^{-2}k_2$ и $H_0^{-1}H_0^{n_{13}} = H_3^{-2}k_3$, где $k_1, k_2, k_3 \in L$. По лемме 3.5.4 имеем

$$H^{-1}H^{n_2} = (1, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^2, 1, 1), H^{-1}H^{n_4} = (1, 1, 1, \lambda_3\lambda_4^{-2}), H^{-1}H^{n_{13}} = (1, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}, \lambda_1\lambda_3^{-1}).$$

Следовательно, получаем, что $\mu_1\mu_2^{-2}\mu_3^2 = \alpha_2^{-2}$, $\mu_3\mu_4^{-2} = \pm\beta_4^{-2}$ и $\mu_1\mu_3^{-1} = \pm\gamma_4^{-2}$. Тогда $(\alpha_2^{-2})^{(\varepsilon q+1)/2} = \alpha_2^{-(\varepsilon q+1)} = -1$, и поэтому $\mu_1^{(\varepsilon q+1)/2}\mu_2^{-(\varepsilon q+1)}\mu_3^{\varepsilon q+1} = -1$. Поскольку $\mu_2^{\varepsilon q+1} = \mu_1\mu_3^2$, имеем, что $\mu_1^{(\varepsilon q-1)/2} = -\mu_3^{-(\varepsilon q-1)} = -1$. По предположению, число $(\varepsilon q - 1)/2$ четно. Тогда $(\mu_3\mu_4^{-2})^{(\varepsilon q-1)/2} = (\pm\beta_4^{-2})^{(\varepsilon q-1)/2} = \beta_4^{-(\varepsilon q-1)} = 1$, поэтому $\mu_3^{(\varepsilon q-1)/2} = \mu_4^{\varepsilon q-1} = 1$. Наконец, видим, что $(\mu_1\mu_3^{-1})^{(\varepsilon q-1)/2} = (\pm\gamma_4^{-2})^{(\varepsilon q-1)/2} = \gamma_4^{\varepsilon q-1} = 1$; противоречие с равенствами $\mu_1^{(\varepsilon q-1)/2} = -1 = -\mu_3^{(\varepsilon q-1)/2}$.

Предположим теперь, что $\varepsilon q \equiv -1 \pmod 4$. Покажем, что существует добавление M такое, что $T \cap M = \langle h_3, h_4 \rangle$. Рассмотрим элемент ζ в $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{\varepsilon q+1} = -1$. Положим

$$H_0 = (-1, \zeta^{\frac{\varepsilon q+3}{2}}, 1, 1), \qquad H_1 = (-1, \zeta, 1, 1).$$

Мы утверждаем, что $M = \langle H_1 n_2, H_0 n_0, n_4, n_8, n_{13} \rangle$ – требуемое добавление. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_2] = [n, n_0] = [n, n_4] = [n, n_8] = [n, n_{13}] = 1$ и, следовательно, n_2, n_0, n_4, n_8 и n_{13} – элементы группы $\overline{N}_{\sigma n}$. Проверим, что H_0 и H_1 принадлежат группе T. Из равенства выше для H^n получаем $H_0^n = (-1, -\zeta^{-\varepsilon\frac{\varepsilon q+3}{2}}, 1, 1)$ и $H_1^n = (-1, -\zeta^{-\varepsilon}, 1, 1)$. Поскольку $\varepsilon q + 3 \equiv 2 \pmod 4$, заключаем, что

$$(-\zeta^{-\varepsilon\frac{\varepsilon q+3}{2}})^q = -\zeta^{(1-\varepsilon q-1)\frac{\varepsilon q+3}{2}} = -\zeta^{\frac{\varepsilon q+3}{2}}\zeta^{-(1+\varepsilon q)\frac{\varepsilon q+3}{2}} = -\zeta^{\frac{\varepsilon q+3}{2}}(-1)^{\frac{\varepsilon q+3}{2}} = \zeta^{\frac{\varepsilon q+3}{2}}.$$

Следовательно,

$$H_0^{\sigma n} = H_0 \text{ и } H_1^{\sigma n} = (-1, -\zeta^{-\varepsilon q}, 1, 1) = (-1, (-\zeta^{-1-\varepsilon q})\zeta, 1, 1) = H_1.$$

Используя MAGMA, видим, что $h_3^{n_2} = h_3^{n_0} = h_3^{n_8} = h_3$, $h_3^{n_4} = h_3^{n_{13}} = h_4^{n_8} = h_3 h_4$ и $h_4^{n_2} = h_4^{n_0} = h_4^{n_4} = h_4^{n_{13}} = h_4$. Откуда следует, что L – нормальная подгруппа в M.

Вычисления в MAGMA показывают, что $n_4^2 = n_{13}^2 = (n_4 n_{13})^2 = h_4$, $n_8^2 = h_3$ и $(n_4 n_8)^3 = (n_8 n_{13})^3 = 1$. Это влечет, что L является подгруппой в группе $\langle n_4, n_8, n_{13} \rangle$ и $\langle n_4, n_8, n_{13} \rangle / L \simeq \mathrm{S}_4$.

Теперь проверим, что $\langle H_1 n_2, H_0 n_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Мы знаем, что $(Hn_0)^2 = 1$ для любого элемента $H \in \overline{T}$. Поскольку $H^{n_2} = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3^2, \lambda_3, \lambda_4)$, находим, что $(H_1 n_2)^2 = H_1 H_1^{n_2} h_2 = 1$. Из леммы 1.4.3 вытекает, что $[H_1 n_2, H_0 n_0] = 1$ тогда и только тогда, когда $H_1^{-1} H_1^{n_0} = H_0^{-1} H_0^{n_2}$. Заметим, что $H_1^{-1} H_1^{n_0} = (1, \zeta^{-2}, 1, 1)$. Используя равенство выше для H^{n_2}, находим

$$H_0^{-1} H_0^{n_2} = (-1, \zeta^{-\frac{\varepsilon q+3}{2}}, 1, 1)(-1, -\zeta^{-\frac{\varepsilon q+3}{2}}, 1, 1) = (1, -\zeta^{-(\varepsilon q+3)}, 1, 1) = (1, \zeta^{-2}, 1, 1).$$

Следовательно, $[H_1 n_2, H_0 n_0] = 1$, и поэтому $\langle H_1 n_2, H_0 n_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Осталось доказать, что коммутаторы элементов $H_1 n_2$ и $H_0 n_0$ с элементами n_4, n_8, n_{13} лежат в группе L. Во-первых, видим, что n_2 и n_0 коммутируют с n_4, n_8, n_{13}. По лемме 1.4.3, достаточно проверить, что $H_1^{-1} H_1^{n_4}$, $H_0^{-1} H_0^{n_4}$, $H_1^{-1} H_1^{n_8}$, $H_0^{-1} H_0^{n_8}$, $H_1^{-1} H_1^{n_{13}}$ и $H_0^{-1} H_0^{n_{13}}$ – элементы группы L. По лемме 3.5.4,

$H^{-1}H^{n_4} = (1,1,1,\lambda_3\lambda_4^{-2}), H^{-1}H^{n_8} = (\lambda_1^{-2}\lambda_4^2, \lambda_1^{-2}\lambda_4^2, \lambda_1^{-1}\lambda_4, 1), H^{-1}H^{n_{13}} =$

$$(1, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}, \lambda_1^2\lambda_3^{-2}, \lambda_1\lambda_3^{-1}).$$

Применяя эти равенства к H_0 и H_1, очевидно, получаем элементы группы L. Следовательно, заключаем, что M/L – гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4 \simeq C_W(w)$. С другой стороны, мы знаем, что $M/(T \cap M) \simeq C_W(w)$ и поэтому $L = M \cap T$. Значит, в этом случае M – добавление к группе T минимального порядка.

Теперь докажем, что для любого числа q группа $M = \langle n_0, n_2, n_4, n_8, n_{13}\rangle$ – добавление к T в $\overline{N}_{\sigma n}$ такое, что $T \cap M = \langle h_2, h_3, h_4\rangle$. Мы уже показали выше, что M – подгруппа в $\overline{N}_{\sigma n}$ и $\langle n_4, n_8, n_{13}\rangle/\langle h_3, h_4\rangle \simeq \mathrm{S}_4$. Более того, элементы n_2 и n_0 лежат в центре группы M. Значит, группа $\langle h_2\rangle$ нормальна в M. Обозначим $L = \langle h_2, h_3, h_4\rangle$. Тогда L – нормальная подгруппа в M и верно, что $M/L \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4 \simeq C_W(w)$. Следовательно, заключаем, что M – добавление к T в N. Мы показали выше, что любое добавление к группе T содержит подгруппу $\langle h_3, h_4\rangle$, и если $\varepsilon q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, то любое добавление имеет порядок не меньше, чем $8 \cdot |C_W(w)|$. Значит, если $\varepsilon q \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ 4)$, то M – добавление к T минимального порядка.

Мы знаем, что w_2 и w_2w_0 – элементы порядка 2. Легко видеть, что элементы h_1n_2 и $h_1n_2n_0$ – требуемые поднятия к ним порядка 2.

Торы 3 и 10. В этом случае $w = w_3$ или $w = w_0w_3$. Вычисления в GAP показывают, что группа $C_W(w)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{S}_4$ и имеет следующее копредставление

$$\langle a, b, c, d, e \mid a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, [a,b], [a,c], [a,d], [a,e], [b,c], [b,d], [b,e], (cd)^3, (de)^3, (ce)^2\rangle.$$

Более того, элементы w_3, $w_{14}w_{21}w_1$, w_1, w_{16} и w_{14} порождают $C_W(w)$ и удовлетворяют этому множеству соотношений.

Пусть $n = n_3$. Предположим, что M – добавление к группе $T = \overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Используя GAP, видим, что $(w_{21}w_8w_3w_2)^{w_5} \in C_W(w)$. Из леммы 3.5.6 вытекает, что $h_3 = h_3^{n_5} \in M \cap T$. Поэтому заключаем, что $|M| \geq 2 \cdot |C_W(w)|$.

Теперь покажем, что существует добавление M такое, что $M \cap T = \langle h_3\rangle$. Пусть

$$a = n_3, b = h_4n_{14}n_{21}n_1, c = h_2h_4n_1, d = h_1n_{16}, \text{ и } e = h_2h_4n_{14}.$$

Мы утверждаем, что группа $M = \langle a, b, c, d, e\rangle$ – требуемое добавление.

Используя MAGMA, видим, что $L = \langle h_3 \rangle$ – нормальная подгруппа в M. Более того, вычисления показывают, что

$$[a,b] = [a,c] = [a,d] = [a,e] = [b,c] = [b,d] = [b,e] = c^2 = d^2 = e^2 = (de)^3 = 1,$$

$$a^2 = b^2 = (cd)^3 = (ce)^2 = h_3.$$

По лемме 1.4.2, элементы a, b, c, d и e принадлежат группе $\overline{N}_{\sigma n}$. Тогда факторгруппа M/L является гомоморфным образом группы $C_W(w)$, и поэтому $|M| \leqslant 2 \cdot |C_W(w)|$. С другой стороны, мы знаем, что $|M| \geq 2 \cdot |C_W(w)|$. Значит, $|M| = 2 \cdot |C_W(w)|$ и $M \cap T = L$, как и утверждалось выше.

Заметим, что элементы w_3 и w_0w_3 имеют порядок 2. Тогда элементы h_2n_3 и $h_2n_0n_3$ – поднятия к ним порядка 2.

Тор 4. В этом случае $w = w_6w_3$ и элемент w сопряжен с ww_0 в W. Вычисления в GAP показывают, что

$$C_W(w) = \langle w_2, w_3 \rangle \times \langle w_{21}, w_{24} \rangle \simeq D_8 \times D_8.$$

Пусть $n = n_6n_3$ и M – добавление к $T = \overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в GAP показывают, что $w_{21}w_8w_3w_2 \in C_W(w)$. Лемма 3.5.6 влечет, что $h_3 \in L = M \cap T$ и, следовательно, $|L| \geq 2$. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_2] = [n, h_1n_3] = [n, n_{24}] = 1$, поэтому элементы n_2, h_1n_3 и n_{24} принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$.

Теперь докажем, что $|L| > 2$. Предположим противное, что $L = \langle h_3 \rangle$. Рассмотрим $a = H_1n_2$ и $b = H_2n_{24}$ – прообразы элементов w_2 и w_{24} в M, где $H_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $H_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.

Поскольку $w_2^2 = 1$, имеем $a^2 \in L$. По лемме 3.5.4, находим, что $(\alpha_1^2, -\alpha_1\alpha_3^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2) \in L$. Значит, $\alpha_1^2 = \alpha_4^2 = 1$ и $\alpha_3^2 = -\alpha_1$.

По лемме 3.5.4, получаем, что $H_2^{-1}H_2^{n_2} = H_1^{-1}H_1^{n_{24}}t$, где $t \in L$. Тогда $(1, \beta_1\beta_2^{-2}\beta_3^2, 1, 1) = (\alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-3}, \alpha_1^{-2}, \alpha_1^{-1})t$. Следовательно, $\alpha_1 = 1$ и $-\alpha_3^2 = \beta_1\beta_2^{-2}\beta_3^2 = 1$.

Поскольку $w_{24}^2 = 1$, имеем $b^2 \in L$. Из равенства $n_{24}^2 = h_2h_4$ и леммы 3.5.4 следует, что $b^2 = (1, -\beta_1^{-3}\beta_2^2, \beta_1^{-2}\beta_3^2, -\beta_1^{-1}\beta_4^2)$, и поэтому $\beta_1^3 = -\beta_2^2$, $\beta_1 = -\beta_4^2$. Мы знаем, что $\beta_1\beta_2^{-2}\beta_3^2 = 1$, следовательно, $\beta_3^2 = \beta_1^{-1}\beta_2^2 = -\beta_1^2$. Поскольку H_1 и H_2 принадлежат тору T, имеем $H_1^{\sigma n} = H_1$ и $H_2^{\sigma n} = H_2$. По лемме 3.5.4,

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_4^2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4^2, \lambda_4).$$

Откуда находим, что $H_1 = H_1^{\sigma n} = (\alpha_1^q, \alpha_1^{2q}\alpha_2^{-q}\alpha_4^{2q}, \alpha_1^q\alpha_3^{-q}\alpha_4^{2q}, \alpha_4^q)$. Тогда $\alpha_1^{q-1} = \alpha_4^{q-1} = 1$ и $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3^{-q}\alpha_4^2$. Значит, $\alpha_3^{q+1} = \alpha_1\alpha_4^2 = 1$. С другой стороны, $\alpha_3^{q+1} = (\alpha_3^2)^{(q+1)/2} = (-1)^{(q+1)/2}$, откуда получаем, что число $q+1$ делится на 4. Поскольку $H_2 = H_2^{\sigma n} = (\beta_1^q, \beta_1^{2q}\beta_2^{-q}\beta_4^{2q}, \beta_1^q\beta_3^{-q}\beta_4^{2q}, \beta_4^q)$, заключаем, что $\beta_1^{q-1} = \beta_4^{q-1} = 1$ и $\beta_3 = \beta_1^q\beta_3^{-q}\beta_4^{2q}$. Тогда $\beta_3^{q+1} = \beta_1\beta_4^2 = -\beta_1^2 = \beta_3^2$. Следовательно, $\beta_3^{q-1} = 1$. Поскольку $\beta_1^2 = -\beta_3^2$, имеем $\beta_1^{q-1} = (-1)^{(q-1)/2}\beta_3^{q-1} = (-1)^{(q-1)/2} = -1$; противоречие. Значит, $|L| > 2$, и поэтому $|L| \geq 4$.

Напомним, что w и w_0 сопряжены в W. Обозначим $n = n_6n_3$, если $q+1$ делится на 4 и $n = n_0n_6n_3$, если $q-1$ делится на 4. Пусть $T = \overline{T}_{\sigma n}$. Предположим, что α – элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$ и рассмотрим элемент $H_1 = (1,1,\alpha,1)$. Мы утверждаем, что $M = \langle H_1n_2, h_1n_3, n_{21}, n_{24}\rangle$ – добавление к T в $\overline{N}_{\sigma n}$ порядка $4 \cdot |C_W(w)|$. Во-первых, заметим, что $n_{24}^2 = h_2h_4$ и $(h_1n_3)^2 = h_3$. Следовательно, $L = \langle h_3, h_2h_4\rangle \leqslant M \cap T$. Используя MAGMA, видим, что $h_3^{n_2} = h_3^{n_3} = h_3^{n_{24}} = h_3^{n_{21}} = h_3$, $(h_2h_4)^{n_2} = (h_2h_4)^{n_3} = (h_2h_4)^{n_{24}} = h_2h_4$ и $(h_2h_4)^{n_{21}} = h_2h_3h_4$. Следовательно, L – нормальная подгруппа в M.

Теперь докажем, что $H_1 \in T$. По лемме 3.5.4,

$$H^{n_6n_3} = (\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_4^2, \lambda_1\lambda_3^{-1}\lambda_4^2, \lambda_4),$$

$$H^{n_0n_6n_3} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_4^{-2}, \lambda_1^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-2}, \lambda_4^{-1}).$$

Если $q \equiv -1 \pmod 4$, то $H_1^n = (1,1,\alpha^{-1},1)$. Поэтому

$$H_1^{\sigma n} = (1,1,\alpha^{-q},1) = (1,1,\alpha\cdot\alpha^{-1-q},1) = (1,1,\alpha\cdot(-1)^{(q+1)/2},1) = H_1.$$

Аналогично если $q \equiv 1 \pmod 4$, то $H_1^n = (1,1,\alpha,1)$ и, следовательно,

$$H_1^{\sigma n} = (1,1,\alpha^{q},1) = (1,1,\alpha\cdot\alpha^{-1+q},1) = (1,1,\alpha\cdot(-1)^{(q-1)/2},1) = H_1.$$

Используя MAGMA, видим, что $[n, n_2] = [n, h_1n_3] = [n, n_{21}] = [n, n_{24}] = 1$, поэтому M – подгруппа в $\overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2.

Теперь проверим, что $M/L \simeq C_W(w)$. Используя MAGMA, видим, что

$$(h_1n_3)^2 = n_{21}^2 = [h_1n_3, n_{21}] = (n_{21}n_{24})^4 = h_3, n_{24}^2 = [h_1n_3, n_{24}] = h_2h_4.$$

Значит, достаточно доказать, что $(H_1n_2)^2$, $[H_1n_2, n_{21}]$, $[H_1n_2, n_{24}]$ и $(H_1n_2h_1n_3)^4$ – элементы группы L. Поскольку $n_2^2 = h_2$, имеем $(Hn_2)^2 = (\lambda_1^2, -\lambda_1\lambda_3^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2)$, следовательно, $(H_1n_2)^2 = h_3 \in L$. Поскольку $[n_2, n_{21}] = [n_2, n_{24}] = 1$, лемма 1.4.3 влечет, что коммутаторы $[H_1n_2, n_{21}]$ и $[H_1n_2, n_{24}]$ принадлежит L, если $H_1 = H_1^{n_{21}} = H_1^{n_{24}}$. По лемме 3.5.4,

$$H^{n_{21}} = (\lambda_1\lambda_4^{-2}, \lambda_2\lambda_4^{-4}, \lambda_3\lambda_4^{-3}, \lambda_4^{-1}), H^{n_{24}} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-3}\lambda_2, \lambda_1^{-2}\lambda_3, \lambda_1^{-1}\lambda_4).$$

Применяя эти равенства к H_1, видим, что $H_1 = H_1^{n_{21}} = H_1^{n_{24}}$, что и требовалось. Наконец, поскольку $(n_2h_1n_3)^4 = h_3$, лемма 3.5.4 влечет, что $(Hn_2h_1n_3)^4 = (Hh_1h_2n_2n_3)^4 = (\lambda_1^4, \lambda_1^4\lambda_4^4, -\lambda_1^2\lambda_4^4, \lambda_4^4)$ и, следовательно, $(H_1n_2h_1n_3)^4 = h_3 \in L$. Значит, факторгруппа M/L – гомоморфный образ группы $C_W(w)$, в частности, $|M|$ делит $4\cdot|C_W(w)|$. С другой стороны, $M/(M \cap T) \simeq C_W(w)$ и $L \leqslant M \cap T$. Следовательно, $|M| = 4 \cdot |C_W(w)|$, $L = M \cap T$ и M – добавление к тору T порядка $4 \cdot |C_W(w)|$.

Мы знаем, что порядки элементов w_6w_3 и $w_6w_3w_0$ равны 2. Используя MAGMA, видим, что $h_1n_6n_3$ и $h_1n_6n_3n_0$ – элементы порядка 2, поэтому они являются требуемыми поднятиями.

Тор 5. В этом случае $w = w_{16}w_3$ и элемент w сопряжен с ww_0 в W. Используя GAP, видим, что

$$C_W(w) = \langle w_3, w_6, w_{16}, w_{24}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим элемент $n = n_{16}n_3$ и группу $T = \overline{T}_{\sigma n}$. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_3] = [n, h_2n_6] = [n, n_{16}] = 1$, следовательно, элементы n_3, h_2n_6 и n_{16} принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2.

Предположим, что существует добавление K к группе T. Обозначим через H_1, H_2 и H_3 элементы группы T такие, что $a = H_1n_3$, $b = H_2h_2n_6$ и $c = H_3n_{16}$ принадлежат группе K. Пусть $H_1 = (\alpha_i)$, $H_2 = (\beta_i)$, $H_3 = (\gamma_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant 4$.

По лемме 3.5.4,

$$H^{n_3} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4, \lambda_4), H^{n_6} = (\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_4^2, \lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4, \lambda_4), H^{n_{16}} =$$

$$(\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_4^{-2}, \lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-2}, \lambda_1\lambda_4^{-1}).$$

Поскольку $n_3^2 = h_3$, заключаем, что $a^2 = H_1 H_1^{n_3} h_3 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, -\alpha_2\alpha_4, \alpha_4^2)$. Поэтому имеем $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_4^2 = 1$ и $\alpha_2\alpha_4 = -1$.

Поскольку $n_{16}^2 = h_2h_3h_4$, находим, что $c^2 = (\gamma_1^2, -\gamma_1\gamma_2^2\gamma_4^{-2}, -\gamma_1\gamma_3^2\gamma_4^{-2}, -\gamma_1)$. Откуда следует, что $\gamma_1 = -1$ и $\gamma_2^2 = \gamma_4^2 = \gamma_3^2$.

Используя MAGMA, видим, что $[n_3, n_{16}] = 1$. Лемма 1.4.3 влечет, что $H_1^{-1}H_1^{n_{16}} = H_3^{-1}H_3^{n_3}$. Из равенств выше для H^{n_3} и $H^{n_{16}}$, заключаем, что $(1, \alpha_1\alpha_4^{-2}, \alpha_1\alpha_4^{-2}, \alpha_1\alpha_4^{-2}) = (1, 1, \gamma_2\gamma_3^{-2}\gamma_4, 1)$. Откуда находим, что $\alpha_1\alpha_4^{-2} = 1$, и поэтому $\alpha_1 = 1$. Тогда $\gamma_3^2 = \gamma_2\gamma_4$. Мы видели выше, что $\gamma_3^2 = \gamma_2^2$, откуда $\gamma_2 = \gamma_4$.

Используя MAGMA, видим, что $[h_2n_6, n_{16}] = 1$. Лемма 1.4.3 влечет, что $H_2^{-1}H_2^{n_{16}} = H_3^{-1}H_3^{n_6}$. Из равенств выше для H^{n_6} и $H^{n_{16}}$, заключаем, что $(1, \beta_1\beta_4^{-2}, \beta_1\beta_4^{-2}, \beta_1\beta_4^{-2}) = (1, \gamma_1^2\gamma_2^{-2}\gamma_4^2, \gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_4, 1)$. Поскольку $\gamma_2 = \gamma_4$ и $\gamma_1 = -1$, имеем $(1, \beta_1\beta_4^{-2}, \beta_1\beta_4^{-2}, \beta_1\beta_4^{-2}) = (1, 1, -1, 1)$; противоречие.

Рассмотрим элемент $n = h_1n_{16}n_3$ и группу $T = \overline{T}_{\sigma n}$. Обозначим

$$a = n_3, b = n_6, c = h_1n_{16}, \text{ и } d = h_1h_2n_{24}.$$

Мы утверждаем, что группа $M = \langle a, b, c, d\rangle$ – добавление к T в $\overline{N}_{\sigma n}$ порядка $2 \cdot |C_W(w)|$. Используя MAGMA, видим, что $[n, a] = [n, b] = [n, c] = [n, d] = 1$, и поэтому элементы a, b, c и d принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$. Более того, $a^2 = h_3$, откуда $L = \langle h_3\rangle \leqslant M \cap T$. Далее, вычисления показывают, что

$$h_3^a = h_3^b = h_3^c = h_3^d = h_3, \quad a^2 = b^2 = [a, b] = [a, d] = [b, c] = [c, d] = h_3,$$

и $c^2 = d^2 = [a, c] = [b, d] = 1$. Значит, L – нормальная подгруппа в M и факторгруппа M/L – гомоморфный образ группы $C_W(w)$. С другой стороны, мы знаем, что $M/(M \cap T) \simeq C_W(w)$. Следовательно, $|M| = 2 \cdot |C_W(w)|$ и $M \cap T = L$, как и утверждалось ранее.

Наконец, видим, что $(h_1h_2n_{16}n_3)^2 = 1$ и, следовательно, $h_1h_2n_{16}n_3$ – требуемое поднятие порядка 2 для w.

Торы 6 и 21. В этом случае $w = w_2w_1$ или $w = w_0w_2w_1$, соответственно. Вычисления в GAP показывают, что

$$C_W(w) = \langle w_0w_2w_1\rangle \times \langle w_4, w_{19}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3\,.$$

Рассмотрим элемент $n = n_2n_1$ и обозначим $a = n_0n_2n_1$, $b = h_3h_4n_4$ и $c = h_4n_{19}$. Используя MAGMA, видим, что $[n,a] = [n,b] = [n,c] = 1$ и, следовательно, элементы a, b и c принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2. Мы утверждаем, что группа $K = \langle a,b,c\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $a^6 = 1 = [a,b] = [a,c] = 1$ и $b^2 = c^2 = (bc)^3 = 1$. Значит, K – гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. С другой стороны, $C_W(w) \simeq \overline{N}_{\sigma n}/\overline{T}_{\sigma n} \simeq K/(K\cap\overline{T}_{\sigma n})$. Следовательно, $K \simeq C_W(w)$, и поэтому K – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$ так же, как и к $\overline{T}_{\sigma n_0 n}$ в $\overline{N}_{\sigma n_0 n}$.

Торы 7 и 20. В этом случае $w = w_3w_4$ или $w = w_0w_3w_4$, соответственно. Вычисления в GAP показывают, что

$$C_W(w) = \langle w_0w_3w_4\rangle \times \langle w_1, w_{24}\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3\,.$$

Рассмотрим элемент $n = n_3n_4$. Обозначим элементы $a = n_0n_3n_4$, $b = h_2h_4n_1$ и $c = h_1n_{24}$. Используя MAGMA, видим, что $[n,a] = [n,b] = [n,c] = 1$, и поэтому a, b и c принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2. Мы утверждаем, что группа $K = \langle a,b,c\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $a^6 = [a,b] = [a,c] = 1$ и $b^2 = c^2 = (bc)^3 = 1$. Поэтому K – гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}_6 \times \mathrm{S}_3$. С другой стороны, верно, что $K/(K\cap\overline{T}_{\sigma n}) \simeq C_W(w)$. Следовательно, имеем, что $K \simeq C_W(w)$, и поэтому K – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$ так же, как и к $\overline{T}_{\sigma n_0 n}$ в $\overline{N}_{\sigma n_0 n}$.

Торы 8 и 19. В этом случае $w = w_3w_2$ или $w = w_0w_3w_2$, соответственно. Более того,

$$C_W(w) = \langle w_3w_2\rangle \times \langle w_8, w_{24}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times D_8.$$

Пусть $n = n_3n_2$ и $\varepsilon = 1$, если $w = w_3w_2$, и $n = n_0n_3n_2$ и $\varepsilon = -1$, если $w = w_0w_3w_2$.

Пусть M – добавление к группе $T = \overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Поскольку $x = w_{21}w_8w_3w_2 \in C_W(w)$, лемма 3.5.6 влечет, что $h_3 \in M$, и поэтому $h_3 \in M\cap T$.

Покажем, что существует добавление M такое, что $M\cap T = \langle h_3\rangle$. Пусть $a = n_3n_2$ и $b = h_2n_8$. Используя MAGMA, видим, что $[n,a] = [n,b] = [n,n_{24}] = 1$ и, следовательно, элементы a, b и n_{24} принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$. Более того, верно, что $h_3 = h_3^a = h_3^b = h_3^{n_{24}}$, откуда $\langle h_3\rangle$ – нормальная подгруппа в $\overline{N}_{\sigma n}$. Теперь видим, что $a^4 = b^2 = h_3$ и $[a,b] = 1$. Значит, достаточно найти элемент $c = H_3n_{24}$, где $H_3 \in T$, такой, что $[a,c]$, c^2 и $(cb)^4$ – элементы группы $L = \langle h_3\rangle$. Действительно, пусть $M = \langle a,b,c\rangle$.

Тогда факторгруппа M/L – гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}_4 \times D_8$. С другой стороны, мы знаем, что $M/(M \cap T) = C_W(w)$ и $L \leqslant M \cap T$, значит, $M \cap T = L$ и $M/L \simeq C_W(w)$.

По лемме 3.5.4,

$$H^n = (\lambda_1^\varepsilon, \lambda_1^\varepsilon \lambda_2^{-\varepsilon} \lambda_3^{2\varepsilon}, \lambda_1^\varepsilon \lambda_2^{-\varepsilon} \lambda_3^\varepsilon \lambda_4^\varepsilon, \lambda_4^\varepsilon).$$

Предположим, что $\varepsilon q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Пусть $H_3 = (-1, -1, \alpha, 1)$, где элемент $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\alpha^2 = -1$. Тогда находим, что $H_3^n = (-1, -1, \alpha^\varepsilon, 1)$. Поскольку $\alpha^{\varepsilon q} = (\alpha^2)^{\frac{\varepsilon q - 1}{2}} \alpha = (-1)^{\frac{\varepsilon q - 1}{2}} \alpha = \alpha$, имеем $H_3^{\sigma n} = (-1, -1, \alpha^{\varepsilon q}, 1) = H_3$. Следовательно, $H_3 \in T$ и $c = H_3 n_{24} \in \overline{N}_{\sigma n}$.

Из равенства выше находим, что $H_3^{n_3 n_2} = H_3$. Из леммы 1.4.3 следует, что $[a, c] = 1$.

Поскольку $n_{24}^2 = h_2 h_4$, лемма 3.5.4 влечет, что

$$(H n_{24})^2 = (1, -\lambda_1^{-3} \lambda_2^2, \lambda_1^{-2} \lambda_3^2, -\lambda_1^{-1} \lambda_4^2).$$

Применяя это равенство к H_3, получаем $c^2 = (1, 1, -1, 1) = h_3 \in L$. Используя MAGMA, видим, что $(n_{24} h_2 n_8)^4 = h_3$. Теперь лемма 3.5.4 влечет, что

$$(H n_{24} h_2 n_8)^4 = (1, \lambda_1^{-4} \lambda_2^4 \lambda_4^{-4}, -\lambda_1^{-2} \lambda_3^4 \lambda_4^{-4}, 1).$$

Следовательно, $(cb)^4 = (1, 1, -1, 1) = h_3 \in L$. Значит, в этом случае элементы a, b и c порождают добавление порядка $2 \cdot |C_W(w)|$.

Предположим, что $\varepsilon q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$. Пусть ζ – элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{\frac{q^2-1}{2}} = -1$ и положим

$$H_3 = (\zeta^{\varepsilon q + 1}, \zeta^{\frac{3(\varepsilon q+1)^2}{4}}, \zeta^{\frac{q^2-1}{4}} \zeta^{\varepsilon q + 1}, \zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}).$$

Тогда имеем

$$H_3^n = (\zeta^{q+\varepsilon}, \zeta^{q+\varepsilon} \zeta^{\frac{-3\varepsilon(\varepsilon q+1)^2}{4}} (-1) \zeta^{2q+2\varepsilon}, \zeta^{q+\varepsilon} \zeta^{\frac{-3\varepsilon(\varepsilon q+1)^2}{4}} \zeta^{\varepsilon \frac{q^2-1}{4}} \zeta^{q+\varepsilon} \zeta^{\varepsilon \frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}, \zeta^{\varepsilon \frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}) =$$
$$(\zeta^{q+\varepsilon}, -\zeta^{\frac{-3\varepsilon q^2 + 6q + 9\varepsilon}{4}}, \zeta^{\frac{-\varepsilon q^2 + 4q + 5\varepsilon}{4}}, \zeta^{\frac{\varepsilon q^2 + 2q + \varepsilon}{4}}).$$

Теперь вычислим координаты элемента $H_3^{\sigma n}$. Находим, что

$$\left(\zeta^{q+\varepsilon}\right)^q = \zeta^{q^2 + \varepsilon q} = \zeta^{1 + \varepsilon q},$$

$$(-\zeta^{\frac{-3\varepsilon q^2 + 6q + 9\varepsilon}{4}})^q = \zeta^{\frac{-3\varepsilon q^3 + 6q^2 + 9\varepsilon q}{4}} = -\zeta^{\frac{3q^2 + 6\varepsilon q + 3}{4}} \zeta^{\frac{3(q^2-1)(1-\varepsilon q)}{4}} = -\zeta^{\frac{3(\varepsilon q+1)^2}{4}} (-1)^{\frac{3(1-\varepsilon q)}{2}} = \zeta^{\frac{3(\varepsilon q+1)^2}{4}},$$

$$(\zeta^{\frac{-\varepsilon q^2+4q+5\varepsilon}{4}})^q=\zeta^{\frac{-\varepsilon q^3+4q^2+5\varepsilon q}{4}}=\zeta^{\frac{q^2-1}{4}}\zeta^{\varepsilon q+1}\zeta^{\frac{(q^2-1)(3-\varepsilon q)}{4}}=\zeta^{\frac{q^2-1}{4}}\zeta^{\varepsilon q+1}(-1)^{\frac{(3-\varepsilon q)}{2}}=\zeta^{\frac{q^2-1}{4}}\zeta^{\varepsilon q+1},$$

$$(\zeta^{\frac{\varepsilon q^2+2q+\varepsilon}{4}})^q=\zeta^{\frac{\varepsilon q^3+2q^2+\varepsilon q}{4}}=\zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}\zeta^{\frac{(q^2-1)(\varepsilon q+1)}{4}}=\zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{(\varepsilon q+1)}{2}}=\zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}}.$$

Следовательно, $H_3^{\sigma n}=H_3$, и поэтому $H_3\in T$.

Поскольку $[a,n_{24}]=1$, лемма 1.4.3 влечет, что $[a,c]\in L$, если $H_3^{-1}H_3^{n_3n_2}\in L$. Заметим, что

$$H^{-1}H^{n_3n_2}=(1,\lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3^2,\lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_4,1).$$

Следовательно,

$$H_3^{-1}H_3^{n_3n_2}=(1,\zeta^{\varepsilon q+1}\zeta^{\frac{-3(\varepsilon q+1)^2}{2}}\zeta^{\frac{q^2-1}{2}}\zeta^{2\varepsilon q+2},\zeta^{\varepsilon q+1}\zeta^{\frac{-3(\varepsilon q+1)^2}{4}}\zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{4}},1)=$$
$$(1,-\zeta^{\frac{-3q^2+3}{2}},\zeta^{\frac{-q^2+1}{2}},1)=h_3.$$

Применяя равенство выше для $(Hn_{24})^2$ к H_3, получаем

$$c^2=(1,-\zeta^{-3\varepsilon q-3}\zeta^{\frac{3(\varepsilon q+1)^2}{2}},\zeta^{-2\varepsilon q-2}\zeta^{\frac{q^2-1}{2}}\zeta^{2\varepsilon q+2},-\zeta^{-\varepsilon q-1}\zeta^{\frac{(\varepsilon q+1)^2}{2}})=$$
$$(1,-\zeta^{\frac{3q^2-3}{2}},-1,-\zeta^{\frac{q^2-1}{2}})=h_3.$$

Наконец, поскольку

$$(Hn_{24}h_2n_8)^4=(1,\lambda_1^{-4}\lambda_2^4\lambda_4^{-4},-\lambda_1^{-2}\lambda_3^4\lambda_4^{-4},1),$$

имеем

$$(cb)^4=(1,\zeta^{-4\varepsilon q-4}\zeta^{3(\varepsilon q+1)^2}\zeta^{-(\varepsilon q+1)^2},-\zeta^{-2\varepsilon q-2}\zeta^{q^2-1}\zeta^{4\varepsilon q+4}\zeta^{-(\varepsilon q+1)^2},1)=$$
$$(1,\zeta^{2q^2-2},-\zeta^0,1)=h_3\in L.$$

Значит, элементы a, b и c порождают добавление порядка $2\cdot|C_W(w)|$.

Легко видеть, что элемент $w_0w_3w_2$ сопряжен с $w_{21}w_8w_3w_2$ в W. Из леммы 3.5.6 следует, что минимальный порядок поднятия элемента $w_0w_3w_2$ равен 8.

Теперь докажем, что существует поднятие элемента w_3w_2 порядка 4 тогда и только тогда, когда $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$. Пусть $n=n_3n_2$. Используя MAGMA, видим, что $n^4=h_3$. По лемме 3.5.4,

$$H^n=(\lambda_1,\lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3^2,\lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4,\lambda_4),$$

$$(Hn)^4=(\lambda_1^4,\lambda_1^4\lambda_4^4,-\lambda_1^2\lambda_4^4,\lambda_4^4).$$

Пусть $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Предположим, что $(H_1n)^4 = 1$, где $H_1 \in T$ и $H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Тогда $\mu_4^4 = 1$ и $\mu_1^2\mu_4^4 = -1$. Поэтому $\mu_1^2 = -1$. Поскольку $H_1 \in T$, имеем $H_1^{\sigma n} = H_1$. Тогда $\mu_1^q = \mu_1$ и, следовательно, $\mu_1^{q-1} = 1$. Поскольку число $(q-1)/2$ нечетно, находим, что $\mu_1^{q-1} = (\mu_1^2)^{(q-1)/2} = (-1)^{(q-1)/2} = -1$; противоречие. Значит, в этом случае минимальный порядок поднятия равен 8.

Пусть $q \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ и ζ – элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{2(q^2+1)} = -1$. Рассмотрим элемент $H_1 = (\zeta^{q^2+1}, \zeta^{q+1}, \zeta, 1)$. Мы утверждаем, что H_1n – поднятие элемента w_3w_2 порядка 4. Во-первых, проверим, что $H_1 \in T$. Из равенства выше видим, что $H_1^n = (\zeta^{q^2+1}, \zeta^{q^2-q+2}, \zeta^{q^2-q+1}, 1)$. Тогда $H_1^{\sigma n} = (\zeta^{q^3+q}, \zeta^{q^3-q^2+2q}, \zeta^{q^3-q^2+q}, 1)$. Поскольку 4 делит $q-1$, имеем $\zeta^{(q^2+1)(q-1)} = 1$, откуда $\zeta^{q^3+q} = \zeta^{q^2+1}$. Следовательно, $H_1^{\sigma n} = (\zeta^{q^2+1}, \zeta^{q^2-q^2+q+1}, \zeta^{q^2-q^2+1}, 1) = H_1$ и $H_1 \in T$.

Поскольку $(\zeta^{q^2+1})^2 = -1$, равенство для $(Hn)^4$ влечет, что $(H_1n)^4 = 1$, как и утверждалось ранее.

Тор 11. В этом случае $w = w_2w_1w_{16}$ и элементы w сопряжен с ww_0 в W. Более того, видим, что

$$C_W(w) = \langle w, w_0, w_{10} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим элемент $n = n_2n_1n_{16}$ и группу $T = \overline{T}_{\sigma n}$. Предположим, что существует дополнение K к тору T. Заметим, что $[n, n_0] = 1$ и поэтому $n_0 \in \overline{N}_{\sigma n}$. Рассмотрим элементы H_1n и H_2n_0 в группе K, где $H_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $H_2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, которые соответствуют элементам w и w_0, соответственно.

Поскольку $n^4 = h_3h_4$, лемма 3.5.4 влечет, что

$$H^n = (\lambda_2\lambda_4^{-2}, \lambda_1\lambda_3^2\lambda_4^{-4}, \lambda_1\lambda_3\lambda_4^{-2}, \lambda_1\lambda_4^{-1}), \quad (Hn)^4 = (\lambda_3^4\lambda_4^{-4}, \lambda_3^8\lambda_4^{-8}, -\lambda_3^6\lambda_4^{-6}, -\lambda_3^2\lambda_4^{-2}).$$

Поскольку $w^4 = 1$, имеем $-\alpha_3^2\alpha_4^{-2} = 1$ и, следовательно, $\alpha_3^2 = -\alpha_4^2$. Лемма 1.4.3 влечет, что $H_1^{-1}H_1^{n_0} = H_2^{-1}H_2^n$, и поэтому $(\alpha_1^{-2}, \alpha_2^{-2}, \alpha_3^{-2}, \alpha_4^{-2}) = (\mu^{-1}\mu_2\mu_4^{-2}, \mu_1\mu_2^{-1}\mu_3^2\mu_4^{-4}, \mu_1\mu_4^{-2}, \mu_1\mu_4^{-2})$. Следовательно, $\alpha_3^{-2} = \mu_1\mu_4^{-2} = \alpha_4^{-2}$; противоречие с равенством $\alpha_3^2 = -\alpha_4^2$.

Значит, каждое добавление к T имеет порядок по крайней мере $2 \cdot |C_W(w)|$. Рассмотрим группу $M = \langle n, n_0, n_{10} \rangle$. Мы утверждаем, что M – добавление к T такое, что $M \cap T$ – группа порядка 2. Во-первых, видим, что $[n, n_0] = [n, n_{10}] = 1$, поэтому n_0 и n_{10} принадлежат группе $\overline{N}_{\sigma n}$. Вычисления в MAGMA показывают, что $(h_3h_4)^n = (h_3h_4)^{n_{10}} = (h_3h_4)^{n_0} = h_3h_4$, $n_0^2 = [n_0, n_{10}] = 1$ и $n^4 = n_{10}^2 = h_3h_4$. Следовательно, L – нормальная подгруппа в M и $M/L \simeq C_W(w)$. Значит, $M \cap T = L$ и $|M| = 2 \cdot |C_W(w)|$, как и утверждалось.

Пусть $q \equiv -1 \pmod 4$. В этом случае докажем, что для w не существует поднятий порядка 4. Предположим, что $(H_1n)^4 = 1$, где $H_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ принадлежит группе T. Используя равенство выше для $(Hn)^4$, находим, что $\mu_3^2 = -\mu_4^2$. Поскольку $H_1 \in T$, имеем $H_1^{\sigma n} = H_1$. Следовательно, $\mu_1^q\mu_3^q\mu_4^{-2q} = \mu_3$ и $\mu_1^q\mu_4^{-q} = \mu_4$. Откуда $\mu_4^{q+1} = \mu_1^q = \mu_3^{1-q}\mu_4^{2q}$, и поэтому $\mu_4^{q-1} = \mu_3^{q-1}$. С другой стороны, мы знаем, что $\mu_3^2 = -\mu_4^2$ и, следовательно, $\mu_3^{q-1} = (-1)^{(q-1)/2}\mu_4^{q-1}$. Поскольку число $(q-1)/2$ нечетно, мы приходим к противоречию.

Пусть $q \equiv 1 \pmod 4$ и элемент $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$. Положим $H_1 = (\zeta^{q^3+1}, -\zeta^{1-q}, \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}}, \zeta)$. Мы утверждаем, что H_1n – поднятие порядка 4 для w. Во-первых, проверим, что $H_1 \in T$.

Из равенства выше для H^n, находим, что

$$H_1^n = (-\zeta^{1-q} \cdot \zeta^{-2}, \zeta^{q^3+1} \cdot \zeta^{-q^3-q^2-q+1} \cdot \zeta^{-4}, \zeta^{q^3+1} \cdot \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}} \cdot \zeta^{-2}, \zeta^{q^3+1} \cdot \zeta^{-1}) =$$
$$= (-\zeta^{-1-q}, \zeta^{-q^2-q-2}, \zeta^{\frac{q^3-q^2-q-1}{2}}, \zeta^{q^3}).$$

Тогда $H_1^{\sigma n} = (-\zeta^{-q-q^2}, \zeta^{-q^3-q^2-2q}, \zeta^{\frac{q^4-q^3-q^2-q}{2}}, \zeta^{q^4})$.

Поскольку $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$, видим, что $-\zeta^{-q-q^2} = \zeta^{q^3+1}$ и $\zeta^{-q^3-q^2-2q} = -\zeta^{1-q}$. Мы знаем, что 4 делит $q-1$, поэтому $\zeta^{\frac{q^4-1}{2}} = \zeta^{(q^3+q^2+q+1)(q-1)/2} = 1$. Тогда $\zeta^{\frac{q^4-q}{2}} = \zeta^{\frac{1-q}{2}}$ и, следовательно, $\zeta^{\frac{q^4-q^3-q^2-q}{2}} = \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}}$. Значит, $H_1^{\sigma n} = H_1$ и H_1 принадлежит группе T.

Пусть $\lambda_3 = \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}}$ и $\lambda_4 = \zeta$. Тогда $\lambda_3^2\lambda_4^{-2} = \zeta^{-q^3-q^2-q+1-2} = \zeta^{-q^3-q^2-q-1} = -1$. Теперь равенство выше для $(Hn)^4$ влечет, что $(H_1n)^4 = 1$, что и требовалось показать.

Тор 12. В этом случае $w = w_{16}w_3w_2$ и элементы w и ww_0 сопряжены в W. Более того, видим, что

$$C_W(w) = \langle w, w_0, w_{24} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим элемент $n = n_{16}n_3n_2$. Во-первых, покажем, что для w не существует поднятий порядка 4. Пусть a – прообраз элемента w в $\overline{N}_{\sigma n}$. Пусть $a = H_1n$, где $H_1 =$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ – элемент группы $\overline{T}$. Используя MAGMA, видим, что $n^4 = h_3$. Тогда по лемме 3.5.4 имеем, что $a^4 = (\lambda_1^4, \lambda_1^6, -\lambda_1^4, \lambda_1^2)$. Очевидно, что a^4 не является единичным элементом в $\overline{N}$. Как следствие, заключаем, что не существует дополнения к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$, и минимальный порядок поднятия равен 8. Теперь покажем, что существует добавление порядка $2 \cdot |C_W(w)|$.

Обозначим $T = \overline{T}_{\sigma n}$. Пусть ζ – элемент поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\zeta^{\frac{q^4-1}{2}} = -1$ и обозначим $\eta = \zeta^{-\frac{(q^2+1)(q+1)}{2}}$. Положим

$$H_0 = (\zeta^{-(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{-2(q^3+q^2+1)}, \zeta^{-(q^3+2q^2+1)}, \zeta^{-(q^2+1)}),$$

$$H_1 = (-1, \zeta^{q-1}, \zeta^{-\frac{(q-1)^2}{2}}, -\zeta^{\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}),$$

$$H_2 = (-\eta^2, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^3, \eta^{\frac{q+3}{2}}, \eta).$$

Сначала проверим, что $H_0, H_1, H_2 \in T$. По лемме 3.5.4,

$$H^n = (\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_3^2\lambda_4^{-2}, \lambda_1^2\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^{-1}, \lambda_1\lambda_4^{-1}).$$

Теперь мы применяем это равенство к H_0, H_1 и H_2. Находим, что

$$H_0^n = (\zeta^{-(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{-2(q^2+1)(q+1)+2(q^3+q^2+1)-2(q^3+2q^2+1)+2(q^2+1)},$$
$$\zeta^{-2(q^2+1)(q+1)+2(q^3+q^2+1)-(q^3+2q^2+1)+(q^2+1)}, \zeta^{-(q^2+1)(q+1)+(q^2+1)}) =$$
$$= (\zeta^{-q^3-q^2-q-1}, \zeta^{-2q^3-2q^2-2q}, \zeta^{-q^3-q^2-2q}, \zeta^{-q^3-q}).$$

Поскольку $\zeta^{q^4} = \zeta$, имеем

$$H_0^{\sigma n} = (\zeta^{-q^4-q^3-q^2-q}, \zeta^{-2q^4-2q^3-2q^2}, \zeta^{-q^4-q^3-2q^2}, \zeta^{-q^4-q^2}) =$$
$$= (\zeta^{-q^3-q^2-q-1}, \zeta^{-2q^3-2q^2-2}, \zeta^{-q^3-2q^2-1}, \zeta^{-q^2-1}) = H_0.$$

Далее, находим, что

$$H_1^n = (-1, \zeta^{1-q-(q-1)^2-(q^2+1)(q-1)}, -\zeta^{1-q-\frac{(q-1)^2}{2}-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}, \zeta^{-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}) =$$
$$= (-1, \zeta^{-q^3+1}, -\zeta^{\frac{-q^3-q+2}{2}}, \zeta^{-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}).$$

Поскольку $\zeta^{\frac{q^4-1}{2}} = -1$, имеем $(-\zeta^{\frac{-q^3-q+2}{2}})^q = -\zeta^{\frac{-q^4-q^2+2q}{2}} = -\zeta^{\frac{-q^4+1}{2}}\zeta^{\frac{-q^2+2q-1}{2}} = (-1)^2\zeta^{\frac{-q^2+2q-1}{2}} = \zeta^{-\frac{(q-1)^2}{2}}$. Более того, $(\zeta^{-q^3+1})^q = \zeta^{-q^4+q} = \zeta^{-1+q}$ и

$(\zeta^{-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}})^q = \zeta^{-\frac{(q^4-1)}{2}+\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}} = -\zeta^{\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}$. Поэтому находим, что $H_1^{\sigma n} = (-1, \zeta^{-q^3+1}, \zeta^{\frac{-q^3-q+2}{2}}, \zeta^{-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}})^q = H_1$.

Наконец, видим, что

$$H_2^n = (-\eta^2, \eta^4(-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{-3}\eta^{q+3}\eta^{-2}, \eta^4(-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{-3}\eta^{\frac{q+3}{2}}\eta^{-1}, -\eta) =$$
$$(-\eta^2, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{q+2}, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}}, -\eta).$$

Поскольку $\eta^{q-1} = -1$, имеем $(\eta^{\frac{q+3}{2}})^q = \eta^{\frac{(q+3)(q-1)}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}} = (-1)^{\frac{q+3}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}}$ и

$$H_2^{\sigma n} = (-\eta^2, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{q+2}, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}}, -\eta)^q =$$
$$(-\eta^2, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^3, (-1)^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q+3}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}}, \eta) = H_2.$$

Следовательно, заключаем, что $H_0, H_1, H_2 \in T$. Используя MAGMA, видим, что $[n, n_0] = [n, n_{24}] = 1$, и поэтому элементы $a = H_1 n_{16} n_3 n_2$, $b = H_2 n_{24}$ и $c = H_0 n_0$ принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$. Мы утверждаем, что $M = \langle a, b, c\rangle$ – добавление порядка $2 \cdot |C_W(w)|$ к T такое, что $M \cap T = \langle h_3 \rangle$.

Поскольку $(Hn)^4 = (\lambda_1^4, \lambda_1^6, -\lambda_1^4, \lambda_1^2)$, имеем $a^4 = h_3$. По лемме 3.5.4,

$$H^{n_{24}} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-3}\lambda_2, \lambda_1^{-2}\lambda_3, \lambda_1^{-1}\lambda_4), \quad (Hn_{24})^2 = (1, -\lambda_1^{-3}\lambda_2^2, \lambda_1^{-2}\lambda_3^2, -\lambda_1^{-1}\lambda_4^2).$$

Следовательно, получаем, что $b^2 = (1, 1, \eta^{q-1}, 1) = h_3$.

Теперь проверим, что $[a, c] = 1$. По лемме 1.4.3, это равенство эквивалентно равенству $H_1^{-2} = H_0^{-1}H_0^n$. Применяя равенство для H^n, находим, что

$$H_0^{-1}H_0^n =$$
$$(\zeta^{(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{2(q^3+q^2+1)}, \zeta^{q^3+2q^2+1}, \zeta^{q^2+1})(\zeta^{-q^3-q^2-q-1}, \zeta^{-2q^3-2q^2-2q}, \zeta^{-q^3-q^2-2q}, \zeta^{-q^3-q}) =$$
$$(1, \zeta^{2-2q}, \zeta^{q^2-2q+1}, \zeta^{-q^3+q^2-q+1}),$$

и $H_1^{-2} = (1, \zeta^{2-2q}, \zeta^{(q-1)^2}, \zeta^{-(q^2+1)(q-1)})$. Тогда $H_1^{-2} = H_0^{-1}H_0^n$ и, следовательно, $[a, c] = 1$.

Теперь проверим, что $[a, b] \in \langle h_3 \rangle$, Поскольку $\eta^{q-1} = -1$, имеем

$$H_2^{-1}H_2^n = (-\eta^{-2}, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{-3}, \eta^{-\frac{q+3}{2}}, \eta^{-1})(-\eta^2, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{q+2}, (-1)^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q+3}{2}}, -\eta) =$$
$$(1, -1, (-1)^{\frac{q-1}{2}}, -1),$$

$$H_1^{-1}H_1^{n_{24}} = (-1, \zeta^{1-q}, \zeta^{\frac{(q-1)^2}{2}}, -\zeta^{-\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}})(-1, -\zeta^{q-1}, \zeta^{-\frac{(q-1)^2}{2}}, \zeta^{\frac{(q^2+1)(q-1)}{2}}) = (1, -1, 1, -1).$$

Следовательно, по лемме 3.5.4, получаем, что коммутатор $[a, b]$ равен либо 1, либо h_3. Поэтому имеем $[a, b] \in \langle h_3 \rangle$.

Осталось проверить, что $[c, b] \in \langle h_3 \rangle$. Используя равенства для H^{n_0} и $H^{n_{24}}$, получаем, что

$$H_0^{n_{24}} = (\zeta^{(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{3(q^2+1)(q+1)}\zeta^{-2(q^3+q^2+1)}, \zeta^{2(q^2+1)(q+1)}\zeta^{-(q^3+2q^2+1)}, \zeta^{(q^2+1)(q+1)}\zeta^{-(q^2+1)})$$
$$= (\zeta^{(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{q^3+q^2+3q+1}, \zeta^{q^3+2q+1}, \zeta^{q^3+q}),$$

и, следовательно,

$$H_0^{-1}H_0^{n_{24}} =$$
$$(\zeta^{(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{2(q^3+q^2+1)}, \zeta^{q^3+2q^2+1}, \zeta^{q^2+1})(\zeta^{(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{q^3+q^2+3q+1}, \zeta^{q^3+2q+1}, \zeta^{q^3+q}) =$$
$$(\zeta^{2(q^2+1)(q+1)}, \zeta^{3q^3+3q^2+3q+3}, \zeta^{2q^3+2q^2+2q+2}, \zeta^{q^3+q^2+q+1}).$$

С другой стороны, имеем

$$H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2} = (\eta^{-4}, \eta^{-6}, \eta^{-(q+3)}, \eta^{-2}) = (\eta^{-4}, \eta^{-6}, -\eta^{-4}, \eta^{-2}).$$

Поскольку $\eta = \zeta^{-\frac{(q^2+1)(q+1)}{2}}$, заключаем, что $cb = bc$.

Используя MAGMA, видим, что $\langle h_3 \rangle$ – нормальная подгруппа в M. Тогда $M/\langle h_3 \rangle$ – гомоморфный образ группы $C_W(w)$, и поэтому $|M| \leqslant 2 \cdot |C_W(w)|$. Значит, $|M| = 2 \cdot |C_W(w)|$, как и утверждалось выше.

Торы 13 и 15. В этому случае $w = w_3w_2w_7$ или $w = w_3w_2w_7w_0$, соответственно. Вычисления в GAP показывают, что

$$C_W(w) \simeq \langle w_3w_2w_7 \rangle \times \langle w_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим элемент $n = h_1n_3n_2n_7$. Используя MAGMA, видим, что $n^6 = n_0^2 = 1$ и $[n, n_0] = 1$. Следовательно, $K = \langle n, n_0 \rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$ так же, как и к $\overline{T}_{\sigma n_0 n}$ в $\overline{N}_{\sigma n_0 n}$.

Торы 14 и 16. В этом случае $w = w_3w_2w_1$ или $w = w_3w_2w_1w_0$, соответственно. Вычисления в GAP показывают, что

$$C_W(w) = \langle w_3w_2w_1\rangle \times \langle w_0\rangle \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим элемент $n = n_3n_2n_1$. Используя MAGMA, видим, что $n^6 = n_0^2 = 1$ и $[n, n_0] = 1$. Следовательно, $K = \langle n, n_0\rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$ так же, как и к $\overline{T}_{\sigma n_0 n}$ в $\overline{N}_{\sigma n_0 n}$.

Тор 22. В этом случае $w = w_8w_{16}w_3w_2$ и элемент w сопряжен с ww_0 в W. Вычисления в GAP показывают, что группа $C_W(w)$ изоморфна группе $\mathrm{SL}_2(3) : 4$ и имеет следующее копредставление

$$C_W(w) \simeq \langle a, b, c \mid a^4, b^4, c^3, aba^{-1}b^{-1}, a^3b^2cb^{-1}c^{-2}\rangle.$$

Более того, элементы $w_{16}w_8$, w_2w_3 и $w_1w_3w_{16}w_{19}$ удовлетворяют этим соотношениям и порождают группу $C_W(w)$.

Пусть $n = h_2n_8n_{16}n_3n_2$. Обозначим через M добавление к $T = \overline{T}_{\sigma n}$ минимального порядка. Вычисления в GAP показывают, что элемент $(w_{21}w_8w_3w_2)^{w_{16}}$ лежит в $C_W(w)$. Теперь лемма 3.5.6 влечет, что $h_3 = h_3^{n_{16}}$ принадлежит $L = T \cap M$. Поскольку $[n, n_1n_3n_{16}n_{19}] = 1$, заключаем, что $n_1n_3n_{16}n_{19} \in \overline{N}_{\sigma n}$. Группа L – нормальная подгруппа в $\overline{N}_{\sigma n}$, и поэтому $h_3h_4 = h_3^{n_1n_3n_{16}n_{19}} \in L$. Следовательно, имеем $|L| \geq 4$.

Теперь мы утверждаем, что элементы $a = n_{16}n_8$, $b = h_2n_2n_3$, $c = n_1n_3n_{16}n_{19}$ принадлежат $\overline{N}_{\sigma n}$ и порождают добавление к T порядка $4\cdot|C_W(w)|$. Используя MAGMA, видим, что $[n, a] = [n, b] = [n, c] = 1$ и, следовательно, $a, b, c \in \overline{N}_{\sigma n}$. Далее, находим, что $a^4 = h_3$, $b^4 = h_3$, $c^3 = 1$, $[a, b] = h_3$, $a^3b^2cb^{-1}c^{-2} = h_3$. $h_3^a = h_3^b = h_3$, $h_3^c = h_3h_4$, $h_4^a = h_3h_4$, $h_4^b = h_3h_4$, $h_4^c = h_3$. Поэтому $\langle h_3, h_4\rangle$ – нормальная подгруппа в $M = \langle a, b, c\rangle$, и факторгруппа $M/\langle h_3, h_4\rangle$ – гомоморфный образ группы $C_W(w)$. Значит, $|M| \leqslant 4 \cdot |C_W(w)|$. С другой стороны, мы знаем, что $|M| \geq 4 \cdot |C_W(w)|$ и, следовательно, группа M – добавление к T порядка $4 \cdot |C_W(w)|$.

Наконец, видим, что $(n_8n_{16}n_3n_2)^4 = 1$, и поэтому элемент $n_8n_{16}n_3n_2$ – требуемое поднятие порядка 4.

Тор 23. В этом случае $w = w_3w_2w_1w_{16}$ и $C_W(w) \simeq \langle w\rangle \simeq \mathbb{Z}_8$. Более того, элементы w и ww_0 сопряжены в W.

Рассмотрим элемент $n = n_3n_2n_1n_{16}$. Используя MAGMA, видим, что $n^8 = 1$. Откуда следует, что группа $K = \langle n \rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Тор 24. В этом случае $w = w_8w_1w_2w_4$ и $C_W(w) \simeq \langle w \rangle \simeq \mathbb{Z}_{12}$. Более того, элементы w и ww_0 сопряжены в W.

Рассмотрим $n = n_8n_1n_2n_4$. Используя MAGMA, видим, что $n^{12} = 1$, и поэтому группа $K = \langle n \rangle$ – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Торы 25 и 18. В этом случае $w = w_6w_1w_9w_4$ или $w = w_0w_6w_1w_9w_4$, соответственно. Кроме того, имеем, что $C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$.

Вычисления в GAP показывают, что группа $C_W(w)$ имеет следующее копредставление

$$C_W(w) \simeq \langle a, b, c \mid a^3, b^4, c^3, [a,b], [a,c], bcb^{-1}cbc, (c^{-1}b)^3 \rangle,$$

более того, элементы $w_1w_4w_2w_{19}$, $w_1w_3w_6w_{20}$, w_1w_2 порождают $C_W(w)$ и удовлетворяют этому множеству соотношений. Рассмотрим элемент $n = n_6n_1n_9n_4$ и обозначим $a = h_1h_2h_4n_1n_4n_2n_{19}$, $b = h_1h_3h_4n_1n_3n_6n_{20}$ и $c = h_1h_2n_1n_2$. Используя MAGMA, видим, что $[n,a] = [n,b] = [n,c] = 1$, и поэтому $a, b, c \in \overline{N}_{\sigma n}$. Более того, эти элементы удовлетворяют соотношениям для группы $C_W(w)$. Следовательно, группа $K = \langle a, b, c \rangle$ – гомоморфный образ группы $C_W(w)$, и поэтому $K \simeq C_W(w)$. Значит, K – дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Теоремы 3.5.2 и 3.5.3 доказаны.

Таблицы.

В этом разделе мы иллюстрируем результаты в таблицах 3.11 и 3.12. Пусть $G = F_4(q)$ и число q нечетно.

Первая таблица посвящена максимальным торам группы G и теореме 3.5.2. Существует биекция между сопряженными классами максимальных торов группы G и сопряженными классами группы W. Мы выбираем представителей классов группы W в соответствии с [37]. Если T – максимальный тор, соответствующий представителю w, то мы пишем w во второй столбец таблицы 3.11. Первый столбец содержит номер тора T. Если элементы w и ww_0 не сопряжены, то мы также указываем в скобках номер максимального тора, соответствующего классу $(ww_0)^W$. Третий столбец содержит порядок элемента w, четвертый столбец содержит структурное описание группы $C_W(w)$. Пятый столбец содержит циклическое строение тора T, которое может быть найдено стандартным способом: приведение матрицы $q \cdot w - I$ к диагональному виду, где I – единичная матрица. Здесь через n^k мы обозначаем элементарную абелеву группу $\mathbb{Z}_n^k$. Отметим, что циклическое строение в этом столбце верно и для четных q. Наконец, шестой столбец содержит минимально возможный порядок пересечения $M \cap T$, где M – добавление к T. Здесь запись 4/8 для второго (девятого) тора означает, что если $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ($q \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$), то минимальный порядок пересечения $M \cap T$ равен 4, иначе он равен 8.

Во второй таблице для элементов $w \in W$ мы приводим примеры поднятий порядка $|w|$ в группе $N(G, T)$, если они существуют. Представители w и их порядки – такие же, как и в таблице 3.11. Третий столбец содержит примеры поднятий. В четвертом столбце мы пишем условия, которые являются необходимыми и достаточными для существования поднятий. Напомним, что если для w не существует поднятия порядка $|w|$, то минимальный порядок поднятия равен $2|w|$.

Таблица 3.11: Минимальные добавления к максимальным торам группы $F_4(q)$

№	w	$\lvert w \rvert$	строение $C_W(w)$	циклическое строение T	доб.
1 (17)	1	1	$W(F_4) \simeq GO_4^+$	$(q-1)^4$	4
2 (9)	w_2	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$	4/8
3 (10)	w_3	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$	2
4	w_6w_3	2	$D_8 \times D_8$	$(q-1) \times (q+1) \times (q^2-1)$	4
5	$w_{16}w_3$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q^2-1)^2$	2
6 (21)	w_2w_1	3	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q-1) \times (q^3-1)$	1
7 (20)	w_3w_4	3	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q-1) \times (q^3-1)$	1
8 (19)	w_3w_2	4	$\mathbb{Z}_4 \times D_8$	$(q-1) \times (q^2+1)(q-1)$	2
9 (2)	$w_{21}w_8w_2$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q^2-1) \times (q+1)^2$	4/8
10 (3)	$w_8w_6w_3$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q^2-1) \times (q+1)^2$	2
11	$w_2w_1w_{16}$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1,2) \times \dfrac{(q^4-1)}{(q-1,2)}$	2
12	$w_{16}w_3w_2$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1,2) \times \dfrac{(q^4-1)}{(q-1,2)}$	2
13 (15)	$w_3w_2w_7$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1)(q^3+1)$	1
14 (16)	$w_3w_2w_1$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1)(q^3+1)$	1
15 (13)	$w_{16}w_3w_{12}$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q+1)(q^3-1)$	1
16 (14)	$w_{21}w_2w_1$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q+1)(q^3-1)$	1
17 (1)	$w_{21}w_8w_6w_3$	2	$W(F_4) \simeq GO_4^+$	$(q+1)^4$	4
18 (25)	$w_{21}w_2w_1w_{19}$	3	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2+q+1)^2$	1
19 (8)	$w_{21}w_8w_3w_2$	4	$\mathbb{Z}_4 \times D_8$	$(q^2+1)(q+1) \times (q+1)$	2
20 (7)	$w_{21}w_8w_3w_{10}$	6	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q^3+1) \times (q+1)$	1
21 (6)	$w_6w_1w_{16}w_3$	6	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q^3+1) \times (q+1)$	1
22	$w_8w_{16}w_3w_2$	4	$\mathrm{SL}_2(3) : \mathbb{Z}_4$	$(q^2+1)^2$	4
23	$w_3w_2w_1w_{16}$	8	$\mathbb{Z}_8$	(q^4+1)	1
24	$w_8w_1w_2w_4$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	(q^4-q^2+1)	1
25 (18)	$w_6w_1w_9w_4$	6	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2-q+1)^2$	1

Таблица 3.12: Поднятия элементов группы $W(F_4)$

w	$\lvert w\rvert$	поднятие порядка $\lvert w\rvert$	условие
1	1	1	
w_2	2	h_1n_2	
w_3	2	h_2n_3	
w_6w_3	2	$h_1n_6n_3$	
$w_{16}w_3$	2	$h_1h_2n_{16}n_3$	
w_2w_1	3	n_2n_1	
w_3w_4	3	n_3n_4	
w_3w_2	4	$(\zeta^{q^2+1}, \zeta^{q+1}, \zeta, 1)n_3n_2$, $\zeta^{2(q^2+1)} = -1$	$q \equiv 1 \pmod 4$
$w_{21}w_8w_2$	2	$h_1n_2n_0$	
$w_8w_6w_3$	2	$h_2n_3n_0$	
$w_2w_1w_{16}$	4	$(\zeta^{q^3+1}, -\zeta^{1-q}, \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}}, \zeta)n_2n_1n_{16}$, $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$	$q \equiv 1 \pmod 4$
$w_{16}w_3w_2$	4	–	
$w_3w_2w_7$	6	$h_1n_3n_2n_7$	
$w_3w_2w_1$	6	$n_3n_2n_1$	
$w_{16}w_3w_{12}$	6	$h_1n_3n_2n_7n_0$	
$w_{21}w_2w_1$	6	$n_3n_2n_1n_0$	
$w_{21}w_8w_6w_3$	2	n_0	
$w_{21}w_2w_1w_{19}$	3	$n_{21}n_2n_1n_{19}$	
$w_{21}w_8w_3w_2$	4	–	
$w_{21}w_8w_3w_{10}$	6	$n_3n_4n_0$	
$w_6w_1w_{16}w_3$	6	$n_2n_1n_0$	
$w_8w_{16}w_3w_2$	4	$n_8n_{16}n_3n_2$	
$w_3w_2w_1w_{16}$	8	$n_3n_2n_1n_{16}$	
$w_8w_1w_2w_4$	12	$n_8n_1n_2n_4$	
$w_6w_1w_9w_4$	6	$n_6n_1n_9n_4$	

3.6 Исключительные группы ${}^3D_4(q), G_2(q)$ и ${}^2G_2(q)$

В данном разделе рассматриваются оставшиеся исключительные группы лиева типа. Тем самым, завершается решение проблем 1 и 2, сформулированных во введении. Ответ на проблему 1 в случае алгебраических групп лиева типа G_2 дает следующая теорема.

Теорема 3.6.1. *Пусть* $\overline{G}$ *— простая связная линейная алгебраическая группа лиева типа* G_2 *над полем* $\overline{\mathbb{F}}_p$. *Пусть* $\overline{T}$ *— максимальный тор в группе* $\overline{G}$. *Тогда* $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ *расщепляется над* $\overline{T}$.

Ответ на проблему 2 для групп $\{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q)\}$ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.6.2. *Пусть* $G \in \{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q)\}$. *Если* T *— максимальный тор группы* G *и* N *— его алгебраический нормализатор, то* N *расщепляется над* T.

Доказательство общей теоремы 3.1.1 как и замечание о скрученных группах ${}^2F_4(q)$ и ${}^2B_2(q)$ приведено в конце раздела.

Доказательство теоремы 3.6.1.

Фундаментальная система корней корневой системы G_2 состоит из векторов r_1, r_2, где

$$(r_1, r_1) = 2, \quad (r_2, r_2) = 6, \quad (r_1, r_2) = -3.$$

Корневая система Φ состоит из 6 коротких и 6 длинных корней. Порядок группы Вейля $W(G_2)$ равен 12. Ее можно записать в виде

$$W = \langle w_1, w_2 | w_1^2 = w_2^2 = (w_1w_2)^6 = 1\rangle \simeq D_{12}.$$

Поскольку $\Delta(G_2) = 1$, то универсальная и присоединенная группы вида $G_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ совпадают. Определим

$$N_1 = h_{r_2}n_{r_1}, \quad N_2 = h_{r_1}n_{r_2}.$$

Если мы покажем, что

$$N_1^2 = N_2^2 = (N_1N_2)^6 = 1,$$

то тор имеет дополнение $K = \langle N_1, N_2 \rangle \simeq D_{12}$. Данные соотношения могут проверены с помощью MAGMA. Тем не менее, мы приведем доказательство без использования компьютерных программ, как это было сделано автором в работе [57]. Поскольку (см. [22, §7.1]) имеют место равенства

$$\chi_{3r_1+r_2,-1}(a) = (-1)^{\frac{2(3r_1+r_2,a)}{(3r_1+r_2,3r_1+r_2)}} = (-1)^{\frac{2\cdot 3(r_1,a)}{6}}(-1)^{\frac{2(r_2,a)}{6}} = \\ (-1)^{\frac{2\cdot(r_1,a)}{(r_1,r_1)}}(-1)^{\frac{2(r_2,a)}{(r_2,r_2)}} = \chi_{r_1,-1}(a)\chi_{r_2,-1}(a)$$

и

$$\chi_{r_1+r_2,-1}(a) = (-1)^{\frac{2(r_1+r_2,a)}{(r_1+r_2,r_1+r_2)}} = (-1)^{\frac{2(r_1,a)}{2}}(-1)^{\frac{2(r_2,a)}{2}} = \\ (-1)^{\frac{2\cdot(r_1,a)}{(r_1,r_1)}}(-1)^{3\frac{2(r_2,a)}{(r_2,r_2)}} = \chi_{r_1,-1}(a)\chi_{r_2,-1}(a),$$

то

$$N_1^2 = h_{r_2}n_{r_1}h_{r_2}n_{r_1} = h_{r_2}h_{r_2}^{n_{r_1}}h_{r_1} = h_{r_2}h_{3r_1+r_2}h_{r_1} = h(\chi_{r_2,-1}\chi_{3r_1+r_2,-1}\chi_{r_1,-1}) = 1,$$
$$N_2^2 = h_{r_1}n_{r_2}h_{r_1}n_{r_2} = h_{r_1}h_{r_1}^{n_{r_2}}h_{r_2} = h_{r_1}h_{r_1+r_2}h_{r_2} = h(\chi_{r_1,-1}\chi_{r_1+r_2,-1}\chi_{r_2,-1}) = 1.$$

Положим $\varphi = n_{r_1}n_{r_2}$, тогда

$$(N_1N_2)^6 = (h_{r_2}n_{r_1}h_{r_1}n_{r_2})^6 = (h_{r_1}h_{r_2}n_{r_1}n_{r_2})^6 = (h_{r_1}h_{r_2})(h_{r_1}h_{r_2})^{\varphi}\dots(h_{r_1}h_{r_2})^{\varphi^5}\varphi^6 = H\varphi^6.$$

Мы хотим показать, что $H = 1$ и $\varphi^6 = 1$. Пусть $w = w_1w_2$, тогда непосредственно проверяется, что $w^3(r_1) = -r_1, w^3(r_2) = -r_2$. Следовательно, $\{r_1, w(r_1), \dots, w^5(r_1)\}$ — множество всех коротких корней Φ, а $\{r_2, w(r_2), \dots, w^5(r_2)\}$ — множество всех длинных корней Φ. Поскольку $h_r^{-1} = h_{-r}$ для всех $r \in \Phi$, то

$$H = (h_{r_1}h_{r_2})(h_{r_1}h_{r_2})^{\varphi}\dots(h_{r_1}h_{r_2})^{\varphi^5} = \Pi_{i=0}^{5}h_{w^i(r_1)}h_{w^i(r_2)} = \Pi_{r\in\Phi}h_r = \Pi_{(r\in\Phi^+)}h_rh_{-r} = 1.$$

Для доказательства равенства $\varphi^6 = 1$ нам потребуются некоторые константы $\eta_{r,s}$. Выбираем структурные константы как указано в разделе 1.2. Тогда согласно [20, предложение 6.4.3] получаем, что $\eta_{r_1,r_2} = \eta_{r_1+r_2,3r_1+r_2} = 1, \eta_{r_2,r_1} = -1$.

Таким образом,

$$\varphi^6 = (n_{r_1}n_{r_2})^6 = (n_{r_1}n_{r_2}n_{r_1}\cdot n_{r_2}n_{r_1}n_{r_2})^2 = (n_{r_2}^{n_{r_1}}h_{r_1}n_{r_1}^{n_{r_2}}h_{r_2})^2 =$$
$$(n_{w_{r_1}(r_2)}(\eta_{r_1,r_2})h_{r_1}n_{w_{r_2}(r_1)}(\eta_{r_2,r_1})h_{r_2})^2 = (n_{3r_1+r_2}h_{r_1}h_{r_1+r_2}n_{r_1+r_2}h_{r_2})^2 =$$
$$(n_{3r_1+r_2}h_{r_2}n_{3r_1+r_2}^{-1}n_{3r_1+r_2}n_{r_1+r_2}h_{r_2})^2 = (h_{w_{3r_1+r_2}(r_2)}n_{3r_1+r_2}n_{r_1+r_2}h_{r_2})^2 =$$

$h_{3r_1+2r_2}n_{3r_1+r_2}n_{r_1+r_2}h_{r_2}\cdot h_{3r_1+2r_2}n_{3r_1+r_2}n_{r_1+r_2}h_{r_2}=$

$h_{3r_1+2r_2}n_{3r_1+r_2}(h_{r_2}h_{3r_1+2r_2}n_{3r_1+r_2})^{n_{r_1+r_2}}h_{r_1+r_2}h_{r_2}=$

$h_{3r_1+2r_2}n_{3r_1+r_2}h_{-3r_1-2r_2}h_{-r_2}n_{w_{r_1+r_2}(3r_1+r_2)}(\eta_{r_1+r_2,3r_1+r_2})h_{r_1+r_2}h_{r_2}=$

$h_{3r_1+2r_2}(h_{-3r_1-2r_2}h_{-r_2})^{n_{3r_1+r_2}}n_{3r_1+r_2}n_{3r_1+r_2}h_{r_1+r_2}h_{r_2}=$

$h_{3r_1+2r_2}h_{-r_2}h_{-3r_1-2r_2}h_{3r_1+r_2}h_{r_1+r_2}h_{r_2}=h_{3r_1+r_2}h_{r_1+r_2}=h(\chi_{3r_1+r_2,-1}\cdot\chi_{r_1+r_2,-1})=1,$

поскольку $\chi_{3r_1+r_2,-1}=\chi_{r_1+r_2,-1}$.

Доказательство теоремы 3.6.2 для групп $G_2(q)$.

Мы предполагаем, что $G=G_2(q)$, где q – степень простого числа p. Поскольку случай $p=2$ вытекает из замечания 1.4.1, то далее будем предполагать, что p и q нечетны.

Следуя [1], будем использовать следующую нумерацию положительных корней:

$$r_3=r_1+r_2, r_4=2r_1+r_2, r_5=3r_1+r_2, r_6=3r_1+2r_2.$$

Центральная инволюция в группе Вейля $W=\langle w_1,w_2\rangle\simeq D_{12}$ имеет вид $w_0=w_1w_6=w_3w_5$. Группа W содержит 6 классов σ-сопряженности, которые совпадают с обычными классами, поскольку σ действует тривиально на W в данном случае.

При доказательстве теоремы 3.6.2 рассматривается каждый класс σ-сопряженности максимальных торов по отдельности. В качестве элемента группы W, соответствующего классу сопряженности некоторого максимального тора, выбирается элемент w согласно таблице 3.13. В каждом случае предъявляются элемент n такой, что $\pi(n)=w$ и дополнение к тору $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$. Циклическое строение максимальных торов, приведенное в таблице 3.13, можно найти в [35, §2]. При доказательстве теоремы используются вычисления, выполненные в компьютерных системах MAGMA [53, 48] и GAP [52]. Соответствующие команды могут быть найдены в [51]. Все вычисления такого рода могут быть проверены вручную как это было продемонстрировано при доказательстве теоремы 3.6.1. Вычисления в MAGMA показывают, что $n_0:=h_1n_1n_6$ лежит в $Z(\mathcal{T})$.

Торы 1 и 4. В этом случае $w=1$ или $w=w_0$ соответственно. Кроме того, имеем $C_W(w)\simeq\langle w_1,w_2\rangle\simeq D_{12}$.

Пусть $n = 1$, если $w = 1$, и $n = n_0$, если $w = w_0$. Рассмотрим элементы $a = h_2n_1$ и $b = h_1n_2$. Из определения элемента n следует, что $[n, a] = [n, b] = 1$. По лемме 1.4.2(2) получаем, что $a, b \in \overline{N}_{\sigma n}$. Согласно [57, §7] верно, что $a^2 = b^2 = 1$ и $(ab)^6 = 1$. Следовательно, группа $K = \langle a, b\rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Торы 2 и 3. В этом случае $w = w_2$ или $w = w_2w_0 = w_4$ соответственно. Кроме того, имеем $C_W(w) = \langle w_2, w_4\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Пусть $n = h_1n_2$, если $w = w_2$, и $n = h_1n_2n_0$, если $w = w_4$. Рассмотрим элементы $a = h_1n_2$ и $b = h_1n_4$. Используя MAGMA, видим, что $[n, a] = [n, b] = 1$. Следовательно, $a, b \in \overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2(2). Далее, $a^2 = b^2 = [a, b] = 1$, поэтому $K = \langle a, b\rangle$ – гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. С другой стороны, образ группы K в W имеет порядок 4, значит $K \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и является дополнением к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Торы 5 и 6. В этом случае $w = w_1w_3$ или $w = w_1w_3w_0 = w_1w_5$ соответственно. Кроме того, имеем $C_W(w) = \langle w_1w_3\rangle \times \langle w_0\rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_6$.

Пусть $n = n_1n_3$, если $w = w_1w_3$, и $n = n_1n_3n_0$, если $w = w_1w_5$. Рассмотрим элементы $a = n_1n_3$ и n_0. Используя MAGMA, видим, что $[n, a] = [n, n_0] = 1$. Следовательно, $a, n_0 \in \overline{N}_{\sigma n}$ по лемме 1.4.2(2). Поскольку $a^3 = n_0^2 = 1$ и $[a, n_0] = 1$, группа $K = \langle a, n_0\rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Таблица 3.13: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $G_2(q)$

№	w	$\|w\|$	Строение $C_W(w)$	Цикл. строение T	Дополнение
1	1	1	D_{12}	$(q-1)^2$	+
2	w_2	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	q^2-1	+
3	w_4	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	q^2-1	+
4	w_1w_6	2	D_{12}	$(q+1)^2$	+
5	w_1w_3	3	$\mathbb{Z}_6$	q^2+q+1	+
6	w_1w_5	6	$\mathbb{Z}_6$	q^2-q+1	+

Доказательство теоремы 3.6.2 для групп ${}^2G_2(q)$.

В данном разделе мы предполагаем, что $G = {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2m+1}$ и m – целое положительное число. Будем следовать определению группы ${}^2G_2(q)$ из [34, 1.15.4, 2.2.3]. В частности, ρ — симметрия диаграммы Дынкина, $\sigma = \psi^{2m+1}$, где

$$\psi(x_r(t)) = \begin{cases} x_{r^\rho}(t) & \text{если } r - \text{ длинный корень,} \\ x_{r^\rho}(t^3) & \text{если } r - \text{ короткий корень.} \end{cases}$$

Как уже было отмечено выше, группа Вейля $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ группы $G_2(q)$ изоморфна группе D_{12} и содержит центральную инволюцию $w_0 = w_1w_6 = w_3w_5$. Классы σ-сопряженности группы W находятся непосредственно из определения. Например, класс σ-сопряженности для единичного элемента состоит из элементов $\{w^{-1}w^\sigma \mid w \in W\}$. Элементы группы Вейля запишем в виде $W = \{w_k, (w_1w_2)^k \mid k = 1, \ldots, 6\}$. Поскольку $(w_1w_2)^\sigma = w_2w_1$, то

$$(w_1w_2)^{-k}((w_1w_2)^k)^\sigma = (w_2w_1)^k(w_2w_1)^k = (w_2w_1)^{2k} = (w_1w_2)^{-2k}, \quad w_1^{-1}w_1^\sigma = w_1w_2,$$

$$w_2^{-1}w_2^\sigma = w_2w_1 = (w_1w_2)^5, \quad w_3^{-1}w_3^\sigma = w_3w_5 = w_0 = (w_1w_2)^3, \quad w_4^{-1}w_4^\sigma = w_4w_6 = (w_1w_2)^5,$$

$$w_5^{-1}w_5^\sigma = w_5w_3 = w_0 = (w_1w_2)^3, \quad w_6^{-1}w_6^\sigma = w_6w_4 = w_1w_2.$$

Следовательно, $\{w^{-1}w^\sigma \mid w \in W\} = \{(w_1w_2)^k \mid k = 1, \ldots, 6\}$. Аналогично находим остальные классы σ-сопряженности: $\{w_1, w_2\}$, $\{w_3, w_5\}$ и $\{w_4, w_6\}$.

Для каждого представителя класса σ-сопряженности найдем строение соответствующего максимального тора, а затем построим дополнение в соответствующем алгебраическом нормализаторе. Полученные результаты о строении максимальных торов и их нормализаторов приведены в таблице 3.14.

Тор 1. В этом случае $w = 1$. Найдем условия на произвольный элемент $h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2)$ из тора $\overline{T}$, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы этот элемент принадлежал тору $\overline{T}_\sigma$. Согласно [34, 1.15.4(b)] имеем $(h_r(t))^{\psi^2} = h_r(t^3)$. Следовательно,

$$h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2) = (h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2))^\sigma = (h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2))^{\psi^{2m}\psi} =$$

$$= \left(h_{r_1}(t_1^{3^m})h_{r_2}(t_2^{3^m})\right)^\psi = h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}})h_{r_1}(t_2^{3^m}).$$

Тем самым, получаем два необходимых и достаточных равенства: $t_1 = t_2^{3^m}$ и $t_2 = t_1^{3^{m+1}}$. Применяя равносильные преобразования, находим, что

$$\begin{cases} t_1 = t_2^{3^m} \\ t_2 = t_1^{3^{m+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2^{3^m} \\ t_2 = t_2^{3^m \cdot 3^{m+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2^{3^m} \\ t_2^{q-1} = 1 \end{cases}$$

Таким образом, тор параметризуется множеством $\{(z, z^{\sqrt{3q}}) \mid z \in \overline{\mathbb{F}}_p, z^{q-1} = 1\}$ и изоморфен циклической группе порядка $q-1$.

Заметим, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим элемент $n = n_0 = h_1 n_1 n_6$. Используя MAGMA, видим, что $n^\sigma = n$ и $n^2 = 1$. Следовательно, из определения группы $\overline{N}_{\sigma n}$ следует, что $n \in \overline{N}_{\sigma n}$. Значит группа $K = \langle n \rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Тор 2. В этом случае $w = w_1$. Используя лемму 1.4.5, для произвольного элемента $h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2) \in \overline{T}$ получаем, что

$$(h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2))^{\sigma n_1} = \left(h_{r_1}(t_2^{3^m})h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}})\right)^{n_1} = h_{-r_1}(t_2^{3^m})h_{r_1+r_2}(t_1^{3^{m+1}}) =$$

$$h_{r_1}(t_2^{-3^m})h_{r_1}(t_1^{3^{m+1}})h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}}) = h_{r_1}(t_1^{3^{m+1}}t_2^{-3^m})h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}}).$$

Рассмотрим следующую цепочку равносильных систем уравнений на параметры тора $\overline{T}_{\sigma n_1}$:

$$\begin{cases} t_1 = t_1^{3^{m+1}}t_2^{-3^m} \\ t_2 = t_1^{3^{m+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_1^{3^{m+1}}t_1^{-3^{2m+1}} \\ t_2 = t_1^{3^{m+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^{3^{2m+1}-3^{m+1}+1} = 1 \\ t_2 = t_1^{3^{m+1}} \end{cases}.$$

Таким образом, элементы тора параметризуются множеством $\{(z, z^{\sqrt{3q}}) \mid z \in \overline{\mathbb{F}}_p, z^{q-\sqrt{3q}+1} = 1\}$, поэтому $\overline{T}_{\sigma n_1}$ изоморфен циклической группе порядка $q - \sqrt{3q} + 1$.

Заметим, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_1 w_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$. Рассмотрим элементы $a = n_1 n_2$ и $n = n_1$. Очевидно, что $a^{\sigma n} = n n_2 n_1 n^{-1} = n_1 n_2 = a$, то есть $a \in \overline{N}_{\sigma n}$. Как было замечено в случае тора 6 группы $G_2(q)$, верно, что $a^6 = 1$. Следовательно, $K = \langle a \rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Тор 3. В этом случае $w = w_3$. Применяя лемму 1.4.5 получаем, что

$$(h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2))^{\sigma n_3} = \left(h_{r_1}(t_2^{3^m})h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}})\right)^{n_{r_1+r_2}} = h_{2r_1+r_2}(t_2^{3^m})h_{-3r_1-2r_2}(t_1^{3^{m+1}}) =$$

$$h_{r_1}(t_2^{2\cdot 3^m})h_{r_2}(t_2^{3^{m+1}})h_{r_1}(t_1^{-3^{m+1}})h_{r_2}(t_1^{-2\cdot 3^{m+1}}) = h_{r_1}(t_1^{-3^{m+1}}t_2^{2\cdot 3^m})h_{r_2}(t_1^{-2\cdot 3^{m+1}}t_2^{3^{m+1}}).$$

Значит элементы тора $\overline{T}_{\sigma n_3}$ задаются следующими двумя уравнениями на t_1 и t_2:

$t_1 = t_1^{-3^{m+1}} t_2^{2\cdot 3^m}$ и $t_2 = t_1^{-2\cdot 3^{m+1}} t_2^{3^{m+1}}$. Следовательно,

$$\begin{cases} t_1^{3^{m+1}+1} = t_2^{2\cdot 3^m} \\ t_1^{2\cdot 3^{m+1}} = t_2^{3^{m+1}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^{3^{m+1}+1} = t_2^{2\cdot 3^m} \\ t_1^{3^{m+1}-1} = t_2^{3^m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 = t_2^{3^m+1} \\ t_1^{3^{m+1}-1} = t_2^{3^m-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 = t_2^{3^m+1} \\ t_2^{\frac{3^{2m+1}+2\cdot 3^m-1}{2}} = t_2^{3^m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 = t_2^{3^m+1} \\ t_2^{\frac{3^{2m+1}+1}{2}} = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $t_2^{\frac{q+1}{2}} = 1$ и $t_1 = \pm t_2^{\frac{\sqrt{q/3}+1}{2}}$. Значит тор $\overline{T}_{\sigma n_3}$ имеет циклическое строение $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{\frac{q+1}{2}}$, где каждый элемент записывается в прямом произведении следующим образом:

$$(t_1, t_2) = (t_1 \cdot t_2^{\frac{-\sqrt{q/3}-1}{2}}, 1) \cdot (t_2^{\frac{\sqrt{q/3}+1}{2}}, t_2).$$

Заметим, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_1 w_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$. Рассмотрим элементы $a = n_1 n_2$ и $n = h_2 n_3$. Используя MAGMA, видим, что $a^{\sigma n} = a$. Следовательно, $K = \langle a \rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Тор 4. В этом случае $w = w_4$. Тогда

$$(h_{r_1}(t_1) h_{r_2}(t_2))^{\sigma n_4} = \left(h_{r_1}(t_2^{3^m}) h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}})\right)^{n_{2r_1+r_2}} = h_{-r_1-r_2}(t_2^{3^m}) h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}}) =$$
$$h_{r_1}(t_2^{-3^m}) h_{r_2}(t_2^{-3^{m+1}}) h_{r_2}(t_1^{3^{m+1}}).$$

Получаем следующие равносильные системы уравнений на параметры t_1 и t_2 элементов тора $\overline{T}_{\sigma n_4}$:

$$\begin{cases} t_1 = t_2^{-3^m} \\ t_2 = t_1^{3^{m+1}} t_2^{-3^{m+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2^{-3^m} \\ t_2 = (t_2^{-3^m})^{3^{m+1}} t_2^{-3^{m+1}} \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = t_2^{-3^m} \\ t_2^{3^{2m+1}+3^{m+1}+1} = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, элементы тора параметризуются множеством $\{(z, z^{-\sqrt{3q}}) \mid z \in \overline{\mathbb{F}}_p, z^{q+\sqrt{3q}+1} = 1\}$, поэтому он изоморфен циклической группе порядка $q + \sqrt{3q} + 1$.

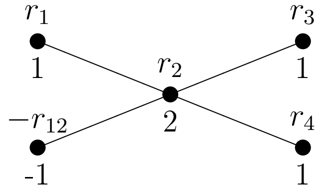
Заметим, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_1 w_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$. Рассмотрим элементы $a = n_1 n_2$ и $n = h_2 n_4$. Используя MAGMA, видим, что $a^{\sigma n} = a$. Следовательно, $K = \langle a \rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Таблица 3.14: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы ${}^2G_2(q)$

№	w	Строение T	$C_{W,\sigma}(w)$	Дополнение
1	$1 \sim (w_1w_2)^k$	$\{(z, z^{\sqrt{3q}}) \mid z^{q-1} = 1\}$ $T \simeq q-1$	$\mathbb{Z}_2$	$+$
2	$w_1 \sim w_2$	$\{(z, z^{\sqrt{3q}}) \mid z^{q-\sqrt{3q}+1} = 1\}$ $T \simeq q-\sqrt{3q}+1$	$\mathbb{Z}_6$	$+$
3	$w_3 \sim w_5$	$\{(t_1,t_2) \mid t_1 = \pm t_2^{(\sqrt{q/3}-1)/2}, t_2^{(q+1)/2} = 1\}$ $T \simeq \mathbb{Z}_2 \times \frac{q+1}{2}$	$\mathbb{Z}_6$	$+$
4	$w_4 \sim w_6$	$\{(z, z^{-\sqrt{3q}}) \mid z^{q+\sqrt{3q}+1} = 1\}$ $T \simeq q+\sqrt{3q}+1$	$\mathbb{Z}_6$	$+$

Доказательство теоремы 3.6.2 для групп ${}^3D_4(q)$.

В данном разделе мы предполагаем, что $G = {}^3D_4(q)$, где q – степень простого числа p. Поскольку случай $p = 2$ вытекает из замечания 1.4.1, то далее будем предполагать, что q нечетно. Расширенная диаграмма Дынкина типа D_4 имеет следующий вид:



Через ρ будем обозначать симметрию диаграммы Дынкина такую, что $\rho(r_1) = r_3$, $\rho(r_2) = r_2$, $\rho(r_3) = r_4$ и $\rho(r_4) = r_1$. Будем использовать следующую нумерацию корней:

$$r_5 = r_1 + r_2, r_6 = r_2 + r_3, r_7 = r_2 + r_4, r_8 = r_1 + r_2 + r_3, r_9 = r_1 + r_2 + r_4,$$
$$r_{10} = r_2 + r_3 + r_4, r_{11} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, r_{12} = r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4.$$

Согласно [34, Теоремы 2.2.3, 1.15.2 и 1.15.4] эндоморфизм σ действует на порождающих группы $\overline{G}$ следующим образом: $(x_r(t))^\sigma = x_{r^\rho}(t^q)$. В частности,

$$n_r^\sigma = n_{r^\rho} \text{ и } (h_r(t))^\sigma = h_{r^\rho}(t^q).$$

Строение максимальных торов в группе ${}^3D_4(q)$ было описано в работе [30, предложение 1.2] и приведено ниже в таблице 3.15.

Хорошо известно, что группа Вейля $W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4\rangle$ группы $D_4(q)$ изоморфна подгруппе индекса 2 в группе $2^4 \rtimes \mathrm{Sym}_4$ и содержит центральную инволюцию $w_0 = w_1w_3w_4w_{12}$. В группе W имеется 7 классов σ-сопряженности. Мы выбираем представители σ-сопряженных классов группы W согласно таблице 3.15.

Вычисления в MAGMA показывают, что $n_0 := n_1n_3n_4n_{12}$ лежит в $Z(\mathcal{T})$.

Таблица 3.15: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы ${}^3D_4(q)$

№	w	$\lvert w\rvert$	$C_{W,\sigma}(w)$	Строение T	Дополнение
1	1	1	D_{12}	$\{(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$ $T \simeq (q^3-1) \times (q-1)$	+
2	w_{12}	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{(t, t^{1-q^3}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3-1)(q+1)} = 1\}$ $T \simeq (q^3-1)(q+1)$	+
3	w_0w_{12}	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3+1)(q-1)} = 1\}$ $T \simeq (q^3+1)(q-1)$	+
4	$w_{12}w_2$	3	$\mathrm{SL}_2(3)$	$\{(t_1, t_2, t_1^q t_2, (t_1^{-1}t_2)^{q+1}) \mid t_i^{q^2+q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^2+q+1) \times (q^2+q+1)$	+
5	$w_0w_{12}w_2$	3	$\mathrm{SL}_2(3)$	$\{(t_1, t_2, t_1^{-q} t_2, (t_1t_2^{-1})^{q-1}) \mid t_i^{q^2-q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^2-q+1) \times (q^2-q+1)$	+
6	w_1w_2	3	$\mathbb{Z}_4$	$\{(t, t^{q^3+1}, t^q, t^{q^2}) \mid t^{q^4-q^2+1} = 1\}$ $T \simeq q^4 - q^2 + 1$	+
7	w_0	2	D_{12}	$\{(t_1, t_2, t_1^{-q}, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3+1} = t_2^{q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^3+1) \times (q+1)$	+

Для каждого класса σ-сопряженности максимальных торов предъявим дополнение в соответствующем алгебраическом нормализаторе.

Торы 1 и 7. В этом случае $w = 1$ или $w = w_0$ соответственно. Кроме того, имеем, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_2, w_1w_3w_4\rangle \simeq D_{12}$.

Определим $n = 1$, если $w = 1$ и $n = n_0$, если $w = w_0$. Рассмотрим элементы

$a = h_1h_3h_4n_2$, $b = h_2n_1n_3n_4$. Поскольку

$$n_2^{\sigma n} = n_2^n = n_2, \quad (n_1n_3n_4)^{\sigma n} = (n_3n_4n_1)^n = n_1n_3n_4,$$

то $n_2, n_1n_3n_4 \in \overline{N}_{\sigma n}$. Согласно таблице 3.15 верно, что h_2, $h_1h_3h_4 \in \overline{T}_{\sigma n}$ и, следовательно, $a, b \in \overline{N}_{\sigma n}$. Используя MAGMA, видим, что $a^2 = b^2 = 1$ и $(ab)^6 = 1$. Таким образом, группа $K = \langle a, b\rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Торы 2 и 3. В этом случае $w = w_{12}$ или $w = w_0w_{12}$ соответственно. Кроме того, имеем, что $C_{W,\sigma}(w) \simeq \langle w_0, w_{12}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Определим $n = n_{12}$ и $\varepsilon = -$, если $w = w_{12}$; $n = n_0n_{12}$ и $\varepsilon = +$, если $w = w_0w_{12}$.

Пусть $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такие, что $\alpha^{\frac{((\varepsilon q)^3+1)(\varepsilon q-1)}{2}} = -1$ и $\beta = \alpha^{\frac{((\varepsilon q)^3+1)}{2}}$. Определим элементы

$$H_1 = (\alpha, \alpha^{(\varepsilon q)^3+1}, \alpha^{q^4}, \alpha^{q^2}), \quad H_2 = (\beta, \beta^{(\varepsilon q)^3+1}, \beta^{q^4}, \beta^{q^2}).$$

Согласно [30, таблица 1.1] имеем $H_1, H_2 \in \overline{T}_{\sigma n}$.

Рассмотрим элементы $a = H_1n_0$ и $b = H_2n_{12}$. Поскольку

$$n_0^{\sigma n} = n_0^n = n_0, \quad n_{12}^{\sigma n} = n_{12}^n = 1,$$

то $n_0, n_{12} \in \overline{N}_{\sigma n}$. Из леммы 3.3.4 следует, что

$$(Hn_{12})^2 = (-\lambda_1^2\lambda_2^{-1}, 1, -\lambda_3^2\lambda_2^{-1}, -\lambda_4^2\lambda_2^{-1}).$$

Поскольку $\beta^{\varepsilon q} = -\beta$, то $\beta = \beta^{q^2} = \beta^{q^4} = -\beta^{(\varepsilon q)^3}$. Следовательно,

$$b^2 = (H_2n_{12})^2 = (-\beta^{1-(\varepsilon q)^3}, 1, -\beta^{2q^4-(\varepsilon q)^3-1}, -\beta^{2q^2-(\varepsilon q)^3-1}) = (1,1,1,1) = 1.$$

По лемме 1.4.3 находим, что

$$[a,b] = 1 \Leftrightarrow H_1^{-1}H_1^{n_{12}} = H_2^{-1}H_2^{n_0} = H_2^{-2}.$$

Поскольку

$$H^{n_{12}} = (\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3\lambda_2^{-1}, \lambda_4\lambda_2^{-1}),$$

то

$$H_1^{-1}H_1^{n_{12}} = (\alpha^{-((\varepsilon q)^3+1)}, \alpha^{-2((\varepsilon q)^3+1)}, \alpha^{-((\varepsilon q)^3+1)}, \alpha^{-((\varepsilon q)^3+1)}) = (\beta^{-2}, \beta^{-4}, \beta^{-2}, \beta^{-2}).$$

С другой стороны, $\beta^{(\varepsilon q)^3+1}=-\beta^2$ и

$$H_2^{-2}=(\beta^{-2},\beta^{-2((\varepsilon q)^3+1)},\beta^{-2q^4},\beta^{-2q^2})=(\beta^{-2},(-\beta^2)^{-2},\beta^{-2},\beta^{-2}).$$

Наконец, для любого H верно, что $(Hn_0)^2=n_0^2=1$. Таким образом, группа $K=\langle a,b\rangle\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Торы 4 и 5. В этом случае $w=w_{12}w_2$ или $w=w_0w_{12}w_2$ соответственно. Кроме того, имеем, что $C_{W,\sigma}(w)\simeq\mathrm{SL}_2(3)$. Согласно GAP группа $\mathrm{SL}_2(3)$ имеет следующее копредставление:

$$\mathrm{SL}_2(3)\simeq\langle a,b\mid a^4,b^3,aba^{-1}bab,(b^{-1}a)^3\rangle.$$

Более того, элементы w_1w_7, $w_1w_2w_3w_7$ порождают $C_{W,\sigma}(w)$ и удовлетворяют этому множеству соотношений.

Определим $n=n_{12}n_2$, если $w=w_{12}w_2$ и $n=n_0n_{12}n_2$, если $w=w_0w_{12}w_2$.

Рассмотрим элементы $a=n_1n_2n_3n_7$ и $b=n_1n_7$. Поскольку

$$a^{\sigma n}=(n_3n_2n_4n_5)^n=a,\quad b^{\sigma n}=(n_3n_5)^n=b,$$

то $a,b\in\overline{N}_{\sigma n}$. Используя MAGMA, видим, что $a^4=b^3=aba^{-1}bab=(b^{-1}a)^3=1$. Таким образом, группа $K=\langle a,b\rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Тор 6. В этом случае $w=w_1w_2$ и $C_{W,\sigma}(w)\simeq\langle w_1w_2w_3w_7\rangle\simeq\mathbb{Z}_4$.

Рассмотрим $n=n_1n_2$ и $a=n_1n_2n_3n_7$. Поскольку $a^{\sigma n}=(n_3n_2n_4n_5)^n=a$, то $a\in\overline{N}_{\sigma n}$.

Используя MAGMA, видим, что $a^4=1$, поэтому группа $K=\langle a\rangle$ — дополнение к $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Доказательство теоремы 3.1.1

Для групп лиева типа $A_n^{\varepsilon}(q)$ и $C_n(q)$ результат следует из теорем 2.3.3 и 2.2.3 соответственно. Группы $B_n(q)$, $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$ представлены в теоремах 2.4.2, 2.4.3 и 2.4.4.

В теореме 3.2.2 рассмотрены конечные простые группы $E_6^{\varepsilon}(q)$, в теореме 3.3.2 – группы $E_7(q)$, а в теореме 3.4.2 – группы $E_8(q)$. Исключительным группам $F_4(q)$ посвящена теорема 3.5.2. В теореме 3.6.2 разобраны группы $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$.

Наконец, предположим, что $G = {}^2F_4(q)$ или $G = {}^2B_2(q)$. Пусть T — максимальный тор группы G и N — его алгебраический нормализатор. Поскольку группы ${}^2F_4(q)$ и ${}^2B_2(q)$ определены над полем характеристики 2, то в силу замечания 1.4.1 получаем, что N расщепляется над T.

Глава 4

Локальный случай в теореме Ашбахера

4.1 Обзор основных результатов главы

Данная глава посвящена уточнению классической теоремы Ашбахера о подгрупповом строении в классических группах. Напомним, что для данного векторного пространства V, наделенного билинейной формой, через $I(V)$ и $\Omega(V)$ обозначаются полная группа изометрий пространства V и ее коммутант, соответственно.Основными результатами этой главы являются две следующие теоремы.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$*,* $H \leqslant G$*,* $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ *для некоторого простого* r*. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H *содержится в элементе одного из классов Ашбахера* $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_4$*;*

(2) $n = r^\gamma$ *для некоторого натурального числа* γ*,* $q \equiv \eta \pmod r$*,* H *содержится в нормализаторе* N *некоторой* r*-подгруппы симплектического типа,* $O_r(H) \leqslant O_r(N)$ *и выполнено одно из утверждений:*

   (а) $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2_\delta^{1+2\gamma}).\,\mathrm{O}_{2\gamma}^\delta(2)$*,* $\delta \in \{+,-\}$*, если* $r = 2$*,* $q \equiv -\eta \pmod 4$*;*

   (б) $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ *в остальных случаях.*

Таблица 4.1: ***Классы Ашбахера в*** $\mathrm{GL}_n(q)$.

$\mathscr{C}_i$	Наименование	Примерное строение в $\mathrm{GL}_n(q)$
$\mathscr{C}_1$	Стабилизаторы вполне изотропных или невырожденных подпространств естественного модуля	Максимальные параболические
$\mathscr{C}_2$	Стабилизаторы разложений естественного модуля V в прямую сумму $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, $\dim(V_i) = a$	$\mathrm{GL}_a(q) \wr \mathrm{S}_t$, $n = at$
$\mathscr{C}_3$	Подгруппы, связанные с расширением поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_a(q^b).b$, $n = ab$, b простое
$\mathscr{C}_4$	Стабилизаторы тензорных разложений $V = V_1 \bigotimes V_2$ естественного модуля V	$\mathrm{GL}_a(q) \circ \mathrm{GL}_b(q)$, $n = ab$
$\mathscr{C}_5$	Подгруппы, соответствующие подполям простого индекса b поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_n(q_0)$, $q = q_0^b$, b простое
$\mathscr{C}_6$	Нормализаторы s-групп симплектического типа, s простое	$(\mathbb{Z}_{q-1} \circ s^{1+2a}).\,\mathrm{Sp}_{2a}(s)$, $n = s^a$
$\mathscr{C}_7$	Стабилизаторы тензорных разложений естественного модуля $V = \bigotimes\limits_{i=1}^{t} V_i$, $\dim(V_i) = a$	$(\overbrace{\mathrm{GL}_a(q) \circ \ldots \circ \mathrm{GL}_a(q)}^{t}).\,\mathrm{S}_t$, $n = a^t$
$\mathscr{C}_8$	Классические группы	$\mathrm{Sp}_n(q)$, n четно $\mathrm{O}_n(q)$, $\mathrm{O}_n^{\pm}(q)$, q нечетно $\mathrm{GU}_n(q^{1/2})$, q квадрат

При этом подгруппа N либо является элементом класса Ашбахера $\mathscr{C}_6$, либо содержится в элементе одного из классов $\mathscr{C}_5$ или $\mathscr{C}_8$ в соответствии с утверждениями (3) *предложений* 4.2.4 *и* 4.3.1.

Теорема 4.1.2. *Пусть V — симплектическое или ортогональное пространство над конечным полем нечетной характеристики, $G = I(V)$. Пусть $H \leqslant G$ и $O_r(H) \neq 1$ для некоторого нечетного простого r. Тогда H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_3$.*

Отметим, что в конечных симплектических и ортогональных группах центр является 2-группой, поэтому в случае нечетной характеристики условие $O_r(H) \neq 1$ равносильно условию $O_r(H) \nleqslant Z(G)$, присутствующему в теореме 4.1.1.

В случае симплектических и ортогональных групп над полем четной характеристики мы также можем утверждать, что ситуация с «чужой» характеристикой не возникает, поскольку класс $\mathscr{C}_6$ оказывается пустым (см. опр. класса $\mathscr{C}_6$ в [36, §4.6]).

Из теорем 4.1.1 и 4.1.2 вытекают следующие два следствия.

Следствие 4.1.3. *Пусть G — группа такая, что $\mathrm{SL}_n^\eta(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и $Z \leqslant Z(G)$. Пусть $^- : G \to G/Z$ — естественный гомоморфизм и H — полный прообраз в G подгруппы $\overline{H} \leqslant \overline{G}$ такой, что $O_r(\overline{H}) \nleqslant Z(\overline{G})$ для некоторого нечетного простого r. Тогда верно заключение теоремы 4.1.1.*

Следствие 4.1.4. *Пусть V — симплектическое или ортогональное пространство над конечным полем нечетной характеристики, $\Omega(V) \leqslant G \leqslant I(V)$ и $Z \leqslant Z(G)$. Пусть $^- : G \to G/Z$ — естественный гомоморфизм и H — полный прообраз в G подгруппы $\overline{H} \leqslant \overline{G}$ такой, что подгруппа $O_r(\overline{H})$ нетривиальна для некоторого нечетного простого r. Тогда H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_3$.*

В частности, данные следствия применимы при исследовании локального случая в теореме Ашбахера для проективных линейных, унитарных, симплектических и ортогональных групп.

4.2 Радикальные r-подгруппы линейных и унитарных групп

В этом параграфе приведено описание радикальных r-подгрупп в линейных и унитарных группах при нечетном r, которое было получено в работах [10, §4] и [11, §2] соответственно.

Определение 4.2.1. *Напомним, что согласно* [10] *подгруппа R группы G называется радикальной r-подгруппой для некоторого простого числа r, если $R = O_r(N_G(R))$.*

Определение 4.2.2. *Пусть G — конечная группа, r — простое число и H_1, H_2 — подгруппы группы G. Будем писать $H_1 \leqslant_r H_2$, если $H_1 \leqslant H_2$ и $O_r(H_1) \leqslant O_r(H_2)$.*

Легко видеть, что отношение $\leqslant_r$ задает частичный порядок на множестве подгрупп. При этом, если H — максимальная относительно данного порядка подгруппа, то $N_G(O_r(H)) = H$. Таким образом, $O_r(H)$ является радикальной r-подгруппой. Отметим, что верно и обратное, т. е. подгруппы группы H, максимальные относительно отношения $\leqslant_r$, являются нормализаторами радикальных подгрупп (см. [7, §1]). Таким образом, имеет место следующее

Замечание 4.2.3. *Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$ и $O_r(H) \neq 1$ для некоторого простого числа r. Тогда существует радикальная r-подгруппа R группы G, такая что $H \leqslant N_G(R)$ и $O_r(H) \leqslant R$.*

Для произвольных квадратных матриц A, B определим их кронекерово произведение:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем обозначения, которые будут использоваться в этом параграфе. Через q как и ранее обозначается некоторая степень простого числа p и $\eta \in \{+, -\}$ знак. Пусть r — нечетное простое число, $(q, r) = 1$, e — порядок элемента ηq по модулю r (то есть наименьшее среди натуральных чисел m таких, что $(\eta q)^m \equiv 1 \pmod r$),

$\varepsilon = \eta^e$, и число a определяется равенством $(q^{2e}-1)_r = r^a$. Для неотрицательного целого числа γ через E_γ будем обозначать экстраспециальную группу экспоненты r и порядка $r^{1+2\gamma}$ (при этом если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Для неотрицательного целого числа α через Z_α будем обозначать циклическую группу порядка $r^{a+\alpha}$. Через $R_{\alpha,\gamma}$ обозначается центральное произведение групп Z_α и E_γ, такое что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Группа $R_{\alpha,\gamma}$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ (см. [36, Предложение 4.6.3]), а группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$, расширенная элементом порядка er^α, вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$ (см. [36, §4.3]). При этом образ группы $R_{\alpha,\gamma}$ относительно композиции вложений

$$R_{\alpha,\gamma} \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \tag{4.1}$$

определяется однозначно с точностью до сопряженности. Следуя [11, 1C], обозначим через W сужение вложения $R_{\alpha,\gamma} \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ на E_γ, и пусть $L_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор $\mathrm{W}(E_\gamma)$ в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$. В силу сказанного выше, группа $L_{\alpha,\gamma}$ также вкладывается в $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Пусть $V_{\alpha,\gamma}$ — естественный модуль для группы $G_{\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$. Далее, для любого натурального числа m определим

$$V_{m,\alpha,\gamma} = \underbrace{V_{\alpha,\gamma}\perp V_{\alpha,\gamma}\perp \ldots \perp V_{\alpha,\gamma}}_{m\text{ раз}},$$

где $\perp$ обозначает прямую сумму подпространств в случае $\eta = +$ и ортогональную прямую сумму при $\eta = -$. Пусть также $G_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$, при этом $V_{m,\alpha,\gamma}$ можно рассматривать как естественный модуль для $G_{m,\alpha,\gamma}$. Группа $G_{\alpha,\gamma}$ посредством вложения

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix},$$

где I_m — единичная матрица размера m, вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma}$.

Легко видеть, что группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ можно также вложить в $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ посредством цепочки вложений

$$\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$$

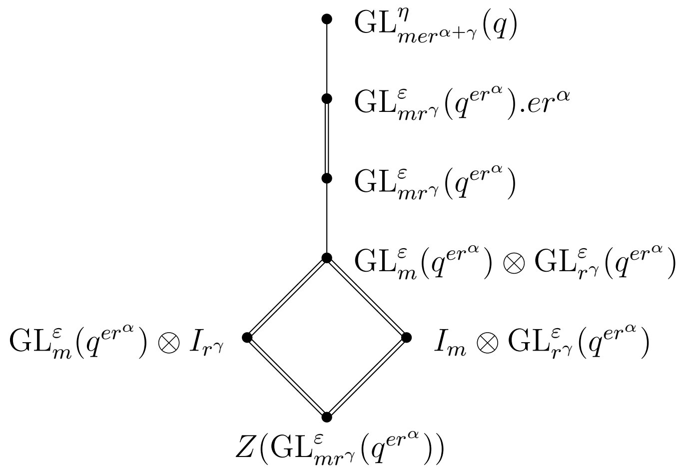
таким образом, что следующая диаграмма окажется коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \arrow[d] \\
\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}) \arrow[r] & \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)
\end{tikzcd}$$

Поскольку вложение $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ задается правилом $g \mapsto I_m \otimes g$, образ группы $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ совпадает с подгруппой $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$.

Отметим также, что между подгруппами $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ и $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ находится подгруппа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^\alpha}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$, которая при $m > 1$ принадлежит классу Ашбахера $\mathscr{C}_4(\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}))$. Кроме того, между подгруппами $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ и $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ находится подгруппа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}).er^\alpha$, принадлежащая при $e > 1$ или $\alpha > 0$ классу $\mathscr{C}_3(\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q))$.

Для наглядности перечисленные подгруппы группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ изобразим на следующей диаграмме (двойная линия соответствует нормальным подгруппам).



Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ образы в $G_{m,\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ относительно композиции этих вложений. Пусть $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} | [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Предложение 4.2.4. *Во введенных обозначениях*

(1) $C_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^\alpha}) \otimes I_{r^\gamma}$;

(2) $N^0_{m,\alpha,\gamma} = L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$, *где* $R_{m,\alpha,\gamma} \leqslant L_{m,\alpha,\gamma}$, $L_{m,\alpha,\gamma} \cap C_{m,\alpha,\gamma} = Z(L_{m,\alpha,\gamma}) =$

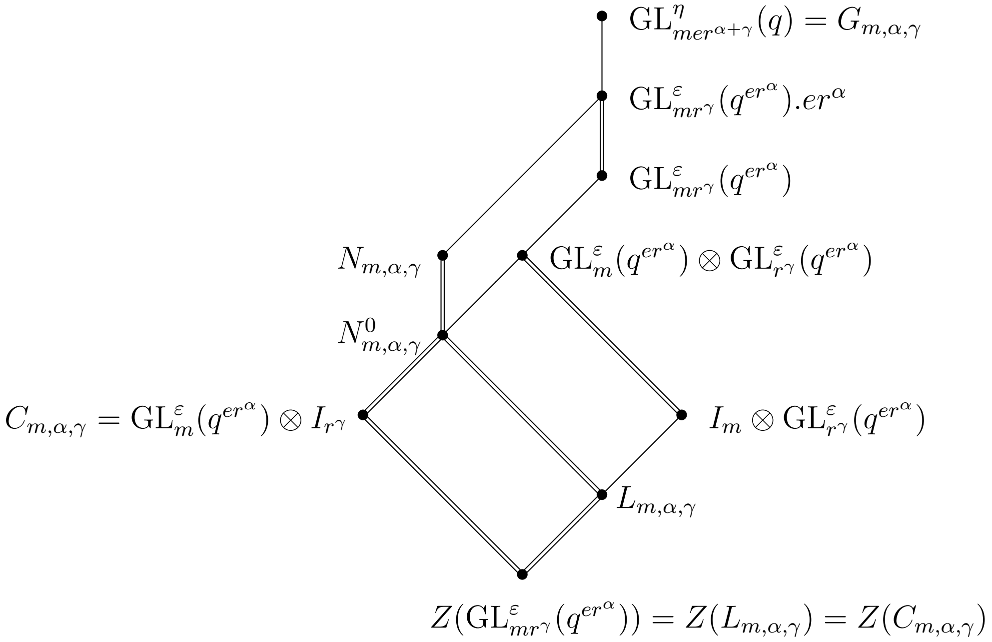
$Z(C_{m,\alpha,\gamma})$, $[L_{m,\alpha,\gamma}, C_{m,\alpha,\gamma}] = 1$, $L_{m,\alpha,\gamma}/Z(L_{m,\alpha,\gamma})R_{m,\alpha,\gamma} \simeq \mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в подгруппе $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$;

(3) *$|N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}| = er^\alpha$;*

(4) *$N_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в подгруппе $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}).er^\alpha$.*

Доказательство. [10, §4], [11, §2]. □

Добавим в предыдущую диаграмму группы из предложения 4.2.4.



В частности, легко видеть, что подгруппа $N^0_{m,\alpha,\gamma} = L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в подгруппе $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^\alpha}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Следуя [10], будем рассматривать симметрические группы как группы матриц посредством естественного подстановочного представления. Определим сплетение $X \wr Y$ матричной группы X и подстановочной матричной группы Y как группу матриц, полученную заменой всех вхождений 1 и 0 в матрицах y из Y на произвольные матрицы из X и нулевые матрицы из X соответственно (ср. [36, Лемма 4.2.1]). Далее, пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, где $c_1, c_2, \dots, c_l$ — натуральные числа. Пусть A_{c_i} — элементарная абелева группа порядка r^{c_i} для любого $i = 1, \dots, l$ и $A_{\bar{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \dots \wr A_{c_l}$. Тогда $A_{\bar{c}}$ вкладывается в симметрическую группу S_u, где

$u = r^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$. Положим $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\bar{c}}$, $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \mathrm{GL}^{\eta}_d(q)$, где $d = mer^{\alpha+\gamma}u$ и

$$V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \underbrace{V_{m,\alpha,\gamma} \perp V_{m,\alpha,\gamma} \perp \ldots \perp V_{m,\alpha,\gamma}}_{u \text{ раз}}$$

соответствующий модуль для $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Согласно [10, §4] и [11, §2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения и называется ее *базисной подгруппой.*

Предложение 4.2.5. *Пусть $G = \mathrm{GL}^{\eta}(V) = \mathrm{GL}^{\eta}_n(q)$ и R — радикальная r-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \ldots \perp V_t, \tag{4.2}$$

$$R = R_0 \times R_1 \times \ldots \times R_t, \tag{4.3}$$

такие что R_0 — тривиальная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_i)$ для $i \geqslant 1$.

Доказательство. [10, 4A], [11, 2B]. □

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная r-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \ldots \perp V_t, \qquad R = R_0 \times R_1 \times \ldots \times R_t$$

разложения 4.2–4.3. Пусть $R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, $V(m,\alpha,\gamma,\bar{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, $u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})$ — число таких R_i и $G(m,\alpha,\gamma,\bar{c}) = \mathrm{GL}^{\eta}(V(m,\alpha,\gamma,\bar{c}))$.

Предложение 4.2.6. *Во введенных обозначениях*

$$N_G(R) = \mathrm{GL}^{\eta}(V_0) \times \prod_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})) \tag{4.4}$$

$$N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})) = N_{G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})} \tag{4.5}$$

Доказательство. [5, Лемма 11]. □

4.3 Радикальные 2-подгруппы линейных и унитарных групп

В этом параграфе приведено описание радикальных 2-подгрупп в линейных и унитарных группах, которое было получено в работах [13, §2] и [14, §2] соответственно.

Напомним, что q — некоторая степень нечетного простого числа p и $\eta \in \{+,-\}$ знак. Пусть $\varepsilon \in \{-1,1\}$ выбрано так, что $q-\varepsilon$ делится на 4. Число a определим равенством $(q-\varepsilon)_2 = 2^a$. Пусть α — неотрицательное целое число. Положим $\varepsilon_\alpha = \eta^{2^\alpha}$ и

$$Z_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{если } \alpha = 0 \text{ и } \eta = -\varepsilon, \\ \mathbb{Z}_{2^{a+\alpha}} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть γ — неотрицательное целое число, $\delta \in \{+,-\}$ и E_γ — экстраспециальная группа $2^{2\gamma+1}_\delta$. Через $E_\gamma Z_\alpha$ будем обозначать центральное произведение групп E_γ и Z_α, такое что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Ввиду предложения [36, § 4.6] группа $E_\gamma Z_\alpha$ вкладывается в $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ таким образом, что Z_α совпадает с $O_2(Z(\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})))$, и через $R_{\alpha,\gamma}$ обозначим образ $E_\gamma Z_\alpha$ относительно этого вложения. При этом группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$, расширенная полевым автоморфизмом порядка 2^α, вкладывается в группу $\mathrm{GL}^\eta_{2^{\alpha+\gamma}}(q)$ (см. [36, §§4.2, 4.3]). Пусть $H_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор в $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ подгруппы $R_{\alpha,\gamma}$.

Пусть m — натуральное число. Имеет место следующая цепочка вложений

$$\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+\alpha}}(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+\alpha}}(q),$$

где первое вложение — вложение Галуа или его композиция с вложением

$$\mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha-1}}(q^2) \hookrightarrow \mathrm{GL}^-_{2^{\gamma+\alpha}}(q)$$

[36, §§4.2, 4.3], а второе задается правилом

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+\alpha}}(q).$$

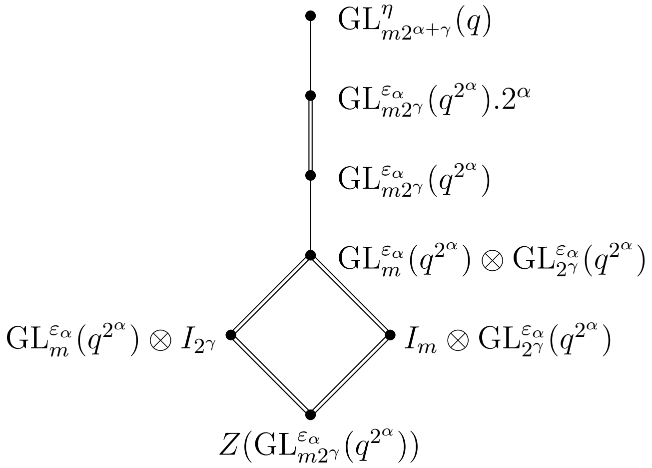
Легко видеть, что группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ можно также вложить в $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$ посредством цепочки вложений

$$\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$$

таким образом, что следующая диаграмма окажется коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\alpha+\gamma}}(q) \arrow[d] \\
\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}) \arrow[r] & \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)
\end{tikzcd}$$

Для наглядности перечисленные подгруппы группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$ изобразим на следующей диаграмме (двойная линия соответствует нормальным подгруппам).



Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $H_{m,\alpha,\gamma}$ образы групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $H_{\alpha,\gamma}$ в $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+\alpha}}(q)$ относительно композиции этих вложений. Отметим, что группы $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $H_{m,\alpha,\gamma}$ определены однозначно с точностью до сопряженности. Пусть $G_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$, $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} | [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Предложение 4.3.1. *Во введенных обозначениях*

(1) $C_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m}(q^{2^\alpha}) \otimes I_{2^\gamma}$;

(2) $N^0_{m,\alpha,\gamma} = H_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$, $[H_{m,\alpha,\gamma}, C_{m,\alpha,\gamma}] = 1$, $H_{m,\alpha,\gamma} \cap C_{m,\alpha,\gamma} = Z(H_{m,\alpha,\gamma}) \leqslant Z(C_{m,\alpha,\gamma})$, $H_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ *и*

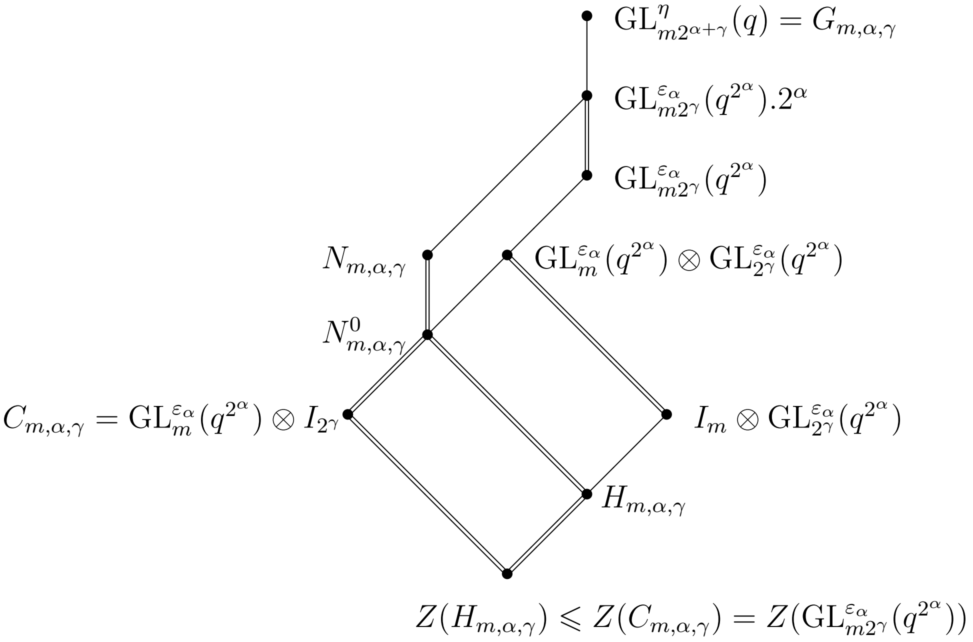
$$H_{m,\alpha,\gamma}/Z(H_{m,\alpha,\gamma})R_{m,\alpha,\gamma} \simeq \begin{cases} \mathrm{O}^{\delta}_{2\gamma}(2), & \text{\textit{если} } \alpha = 0 \text{ \textit{и} } \varepsilon = -\eta, \\ \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2) & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

(3) *факторгруппа* $N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}$ *является циклической порядка* 2^α;

(4) $N_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}).2^\alpha$.

Доказательство. [13, §1], [14, §1]. □

Добавим в предыдущую диаграмму группы из предложения 4.3.1.



Замечание 4.3.2. *В частности, легко видеть, что подгруппа* $N^0_{m,\alpha,\gamma} = H_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m}(q^{2^\alpha}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ *группы* $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Предположим, $\varepsilon = -\eta$. Через $E_\gamma P$ обозначим центральное произведение экстраспециальной группы $E_\gamma = 2^{2\gamma+1}_\delta$ и полудиэдральной группы P порядка 2^{a+2}, такое что $Z(E_\gamma) = Z(P)$. Тогда $E_\gamma P$ абсолютно неприводимо вкладывается в $\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)$ и образ относительно этого вложения будем обозначать через $S_{1,\gamma}$.

Обозначим через $L_{1,\gamma}$ подгруппу, состоящую из тех элементов нормализатора в $\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)$ подгруппы $S_{1,\gamma}$, которые тривиально действуют на $[S_{1,\gamma}, S_{1,\gamma}]$. Для натурального числа m обозначим через $L_{m,1,\gamma}$ и $S_{m,1,\gamma}$ образы в $\mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q)$ подгрупп $L_{1,\gamma}$ и $S_{1,\gamma}$ относительно вложения

$$\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q),$$

задаваемого правилом

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma+1}}(q).$$

Подгруппы $L_{m,1,\gamma}$ и $S_{m,1,\gamma}$ в группе $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q)$ определяются однозначно с точностью до сопряженности.

Предложение 4.3.3. *Во введенных обозначениях пусть* $G_{m,1,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q)$, $S = S_{m,1,\gamma}$, $S^0 = C_S([S,S])$. *Положим* $N = N_{G_{m,1,\gamma}}(S)$ *и* $N^0 = C_N(Z(S^0))$. *Тогда*

(1) $N^0 \leqslant \mathrm{GL}_{m2^{\gamma}}(q^2)$;

(2) $N \leqslant \mathrm{GL}_{m2^{\gamma}}(q^2).2$.

Доказательство. (1) Следует из доказательств [13, (1I)] и [14, (1M)];

(2) Следует из [13, (1I)] и [14, (1M)]. □

Для целых чисел $\gamma \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, $k = 1, 2$ положим

$$R^k_{m,0,\gamma} = \begin{cases} S_{m,1,\gamma-1}, & \text{если } k = 2, \quad \gamma \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -\eta, \\ R_{m,0,\gamma} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим также $R^1_{m,\alpha,\gamma} = R_{m,\alpha,\gamma}$ (таким образом, подгруппа $R^2_{m,\alpha,\gamma}$ определена только если $\alpha = 0$, $\gamma \geqslant 1$ и $\varepsilon = -\eta$). Обозначим через $C^k_{m,\alpha,\gamma}$ и $N^k_{m,\alpha,\gamma}$ соответственно централизатор и нормализатор в группе $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+\alpha}}(q)$ подгруппы $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Далее, пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_l$ — натуральные числа, или $\bar{c} = (0)$. Пусть для любого $i = 1, \ldots, l$ через A_{c_i} обозначена элементарная абелева группа порядка 2^{c_i}, отождествляемая посредством регулярного представления с подгруппой симметрической группы $\mathrm{S}_{2^{c_i}}$, и $A_{\bar{c}} = A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \cdots \wr A_{c_l}$ — подгруппа группы S_u, где $u = 2^{c_1+c_2+\cdots+c_l}$. В случае, когда $\bar{c} = (0)$, положим $A_{\bar{c}} = 1$. Пусть также $d = 2^{\alpha+\gamma}mu$. Кроме того, положим $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \mathrm{GL}^{\eta}_d(q)$. Группа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = R^k_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\bar{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения. За исключением случая, когда $\alpha = \gamma = 0$, $c_1 = 1$ и $\varepsilon = -\eta$, подгруппа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$ называется *базисной подгруппой* группы $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$.

Предложение 4.3.4. *Пусть, как и ранее, $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и V — естественный модуль для G, снабженный соответствующей формой (тривиальной при $\eta = 1$ и унитарной при $\eta = -1$). Отождествим G с $\mathrm{GL}^\eta(V)$. Пусть R — радикальная 2-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$V = V_1 \perp \ldots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \ldots \perp V_t, \tag{4.6}$$

$$R = R_1 \times \ldots \times R_s \times R_{s+1} \times \ldots \times R_t, \tag{4.7}$$

такие, что $R_i = \{\pm 1_{V_i}\}$ при $i = 1, \ldots, s$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^\eta(V_i)$ при $i = s+1, \ldots, t$. Кроме того, если $\varepsilon = \eta$, то $s = 0$.

Доказательство. [13, (2B)], [14, (2B)]. □

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная 2-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_1 \perp \ldots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \ldots \perp V_t, \qquad R = R_1 \times \ldots \times R_s \times R_{s+1} \times \ldots \times R_t$$

разложения 4.6–4.7. Пусть $R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, $V(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = \mathrm{GL}^\eta(V(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}))$ — группа, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

Предложение 4.3.5. *Во введенных обозначениях*

$$N_G(R) = \prod_{k,m,\alpha,\gamma,\bar{c}} N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})), \tag{4.8}$$

$$N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}, \tag{4.9}$$

Доказательство. [6, Лемма 9]. □

4.4 Радикальные r-подгруппы симплектических и ортогональных групп

В этом параграфе приведено описание радикальных r-подгрупп в симплектических и ортогональных группах над полем нечетной характеристики для нечетного r, полученное в работе [11, §2].

Пусть q — некоторая степень нечетного простого числа, r — нечетное простое число, взаимно простое с q, и e — порядок числа q^2 как вычета по модулю r. Число a определяется равенством $(q^{2e}-1)_r = r^a$, и знак $\varepsilon \in \{1,-1\}$ выбран так, что r^a делит $q^e - \varepsilon$. Для неотрицательного целого числа γ через E_γ будем обозначать экстраспециальную группу экспоненты r и порядка $r^{1+2\gamma}$ (при этом если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Для неотрицательного целого числа α через Z_α будем обозначать циклическую группу порядка $r^{a+\alpha}$. Через $Z_\alpha E_\gamma$ обозначается центральное произведение групп Z_α и E_γ, такое что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Для унификации формулировок, мы вслед за [36] используем обозначение $\mathrm{GL}_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon = \pm 1$ или знак этого числа, полагая $\mathrm{GL}_n^+(q) = \mathrm{GL}_n(q)$ — общая линейная группа и $\mathrm{GL}_n^-(q) = \mathrm{GU}_n(q)$ — унитарная группа. В случае ортогонального пространства V через $\eta(V)$ обозначается знак соответствующей квадратичной формы.

Согласно [36, §4.6] группа $Z_\alpha E_\gamma$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^\varepsilon_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ так, что $Z_\alpha = O_r(Z(\mathrm{GL}^\varepsilon_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})))$, и через $R_{\alpha,\gamma}$ будем обозначать образ группы $Z_\alpha E_\gamma$ относительно этого вложения. Пусть $L_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор $R_{\alpha,\gamma}$ в $\mathrm{GL}^\varepsilon_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$, $V_{\alpha,\gamma}$ — симплектическое или ортогональное пространство размерности $2er^{\alpha+\gamma}$ над полем $\mathbb{F}_q$ и $\eta(V_{\alpha,\gamma}) = \varepsilon$, если $V_{\alpha,\gamma}$ ортогонально. Для любого натурального числа m определим

$$V_{m,\alpha,\gamma} = \underbrace{V_{\alpha,\gamma} \perp V_{\alpha,\gamma} \perp \ldots \perp V_{\alpha,\gamma}}_{m \text{ раз}},$$

где $\perp$ обозначает ортогональную прямую сумму подпространств. Группа $\mathrm{GL}^\varepsilon_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$ вкладывается в группу $I(V_{\alpha,\gamma})$ согласно [36, 4.2.5],[36, 4.2.7] или [36, 4.3.18] в случае симплектического или ортогональных пространств, соответственно. Таким образом, имеет место следующая цепочка вложений

$$\mathrm{GL}^\varepsilon_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^\varepsilon_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \hookrightarrow I(V_{\alpha,\gamma}) \hookrightarrow I(V_{m,\alpha,\gamma}) \qquad (4.10)$$

где последнее вложение задается следующим образом

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, g \in I(V_{\alpha,\gamma}).$$

Здесь и далее I_m обозначает единичную матрицу размера m. При этом $\eta(V_{m,\alpha,\gamma}) = \varepsilon^m$, если $V_{m,\alpha,\gamma}$ ортогонально. Через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ обозначим образы $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ в $I(V_{m,\alpha,\gamma})$ относительно композиции этих вложений. Легко видеть, что группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ вкладывается в $I(V_{m,\alpha,\gamma})$ посредством цепочки вложений

$$\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q) \hookrightarrow I(V_{m,\alpha,\gamma}) \tag{4.11}$$

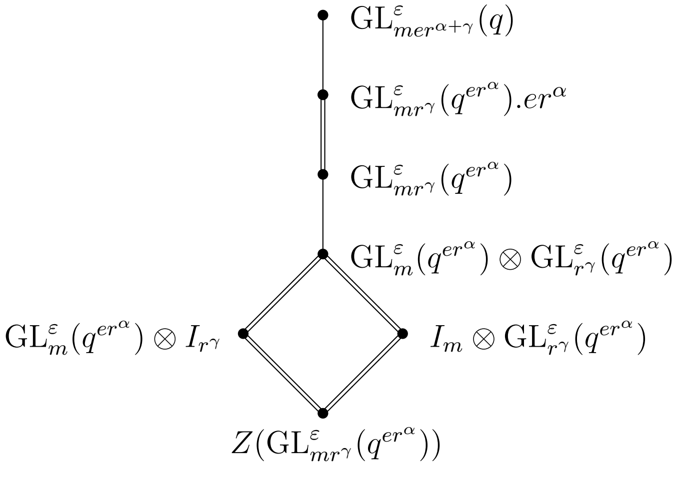
так, что следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \arrow[r] \arrow[d] & I(V_{\alpha,\gamma}) \arrow[d] \\
\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}) \arrow[r] & \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q) \arrow[r] & I(V_{m,\alpha,\gamma})
\end{tikzcd}$$

Поскольку вложение $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ задается правилом $g \mapsto I_m \otimes g$, то образ группы $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ совпадает с подгруппой $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$.

Отметим также, что группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^\alpha}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ лежит между подгруппами $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ и $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$ группы $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$. Согласно [36, §4.3] группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha})$, расширенная элементом порядка er^α, вкладывается в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Для наглядности представим перечисленные подгруппы группы $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ на следующей диаграмме (двойная линия соответствует нормальной подгруппе).



Пусть $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{I(V_{m,\alpha,\gamma})}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{I(V_{m,\alpha,\gamma})}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} | [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Предложение 4.4.1. *Во введенных обозначениях верны следующие утверждения*

(1) $C_{m,\alpha,\gamma} \simeq \mathrm{GL}^\varepsilon_m(q^{er^\alpha}) \otimes I_{r^\gamma}$;

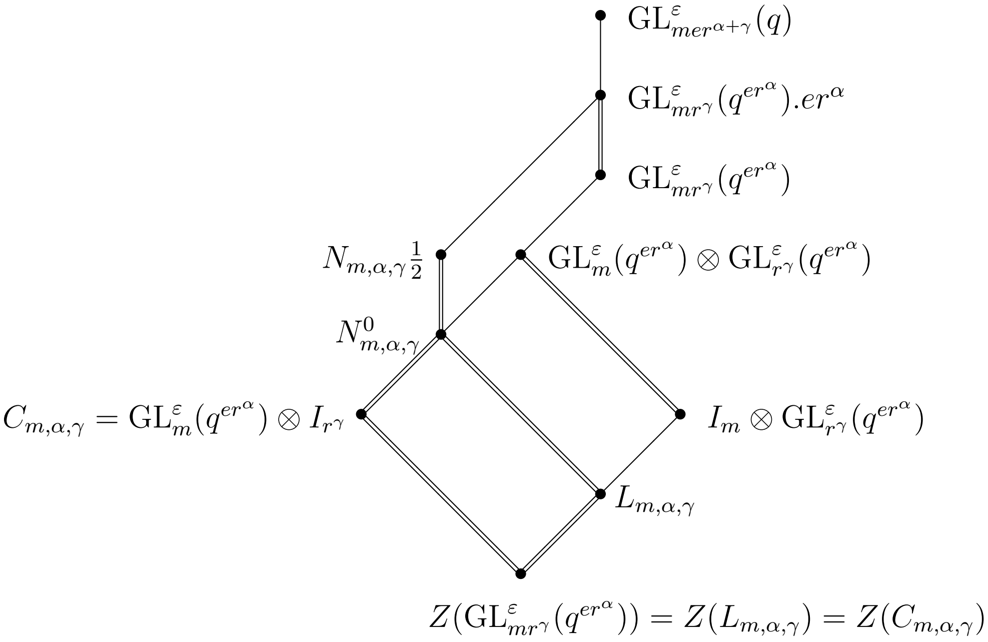
(2) $N^0_{m,\alpha,\gamma} = L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$, *где* $R_{m,\alpha,\gamma} \leqslant L_{m,\alpha,\gamma}$, $L_{m,\alpha,\gamma} \cap C_{m,\alpha,\gamma} = Z(L_{m,\alpha,\gamma}) = Z(C_{m,\alpha,\gamma})$, $[L_{m,\alpha,\gamma}, C_{m,\alpha,\gamma}] = 1$, *и* $L_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $I_m \otimes \mathrm{GL}^\varepsilon_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$;

(3) $N^0_{m,\alpha,\gamma} \trianglelefteq N_{m,\alpha,\gamma}$ *и* $N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}$ *— циклическая группа порядка* $2er^\alpha$;

(4) $N_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^\varepsilon_{mer^{\alpha+\gamma}}(q).2$.

Доказательство следует из [11, §2]. □

Добавим в предыдущую диаграмму группы из предложения 4.4.1. Для данной группы G через $G\frac{1}{2}$ обозначим подгруппу в группе G индекса 2.



Следуя [10], будем рассматривать симметрические группы как группы матриц посредством естественного подстановочного представления. Определим сплетение $X \wr Y$ матричной группы X и подстановочной матричной группы Y как группу матриц, полученную заменой всех вхождений 1 и 0 в матрицах y из Y на произвольные матрицы из X и нулевые матрицы из X соответственно. Далее, пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_l$ — натуральные числа. Пусть A_{c_i} — элементарная абелева группа порядка r^{c_i} для любого $i = 1, \ldots, l$ и $A_{\bar{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \ldots \wr A_{c_l}$. Тогда $A_{\bar{c}}$ вкладывается в симметрическую группу S_u, где $u = r^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$. Положим $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\bar{c}}$, и

$$V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \underbrace{V_{m,\alpha,\gamma} \perp V_{m,\alpha,\gamma} \perp \ldots \perp V_{m,\alpha,\gamma}}_{u \text{ раз}}.$$

Согласно [11, §2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $I(V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}})$ и называется ее *базисной подгруппой.*

Предложение 4.4.2. *Пусть V — симплектическое или ортогональное пространство над полем $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики, $G = I(V)$, и R — радикальная подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \ldots \perp V_t, \tag{4.12}$$

$$R = R_0 \times R_1 \times \ldots \times R_t \tag{4.13}$$

такие, что R_0 — тривиальная подгруппа группы $I(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $I(V_i)$ для $i \geqslant 1$.

Доказательство см. в [11, 2D]. □

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная r-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \ldots \perp V_t, \qquad R = R_0 \times R_1 \times \ldots \times R_t$$

разложения 4.12–4.13. Пусть $R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, $V(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i и $u(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — число таких R_i.

Предложение 4.4.3. *Во введенных обозначениях верны следующие утверждения*

$$N_G(R) = I(V_0) \times \prod_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} N_{I(V(m,\alpha,\gamma,\bar{c}))}(R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})) \tag{4.14}$$

$$N_{I(V(m,\alpha,\gamma,\bar{c}))}(R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{I(V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}})}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr S_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})} \tag{4.15}$$

Доказательство см. в [5, Лемма 11]. □

4.5 Доказательство основных результатов главы

В данном параграфе будут доказаны теоремы 4.1.1 и 4.1.2. Для доказательства теоремы 4.1.1 рассмотрим последовательно случай $r = 2$ (теорема 4.5.2) и случай нечетного r (теорема 4.5.4). В случае $r = 2$ отметим сначала

Предложение 4.5.1. *Пусть $G = \mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma}}(q)$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для любого $\delta \in \{+,-\}$ группа G содержит абсолютно неприводимую экстраспециальную группу $E^{\delta} = 2^{2\gamma+1}_{\delta}$ такую, что $Z(E^{\delta}) = \Omega_1(O_2(Z(G)))$.*

(2) *Пусть Z — силовская 2-подгруппа центра $Z(G)$ группы G. Тогда если $|Z| = 2$, то $ZE^{\delta} = E^{\delta}$, и если $|Z| > 2$, то $ZE^{+} \simeq ZE^{-}$. Каждому изоморфному типу групп ZE^{δ}, $\delta = \pm$, соответствует ровно один класс сопряженности абсолютно неприводимых подгрупп симплектического типа группы G с представителем ZE^{δ}.*

(3) *Зафиксируем $\delta \in \{+,-\}$ и положим $R = ZE^{\delta}$ и $N = N_G(R)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

   (а) $q \equiv \eta \pmod 4, N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2)$. *При этом N является элементом класса $\mathscr{C}_6$, если q — простое число, и содержится в элементе класса $\mathscr{C}_5$ в противном случае.*

   (б) $q \equiv -\eta \pmod 4, N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}_{\delta}).\,\mathrm{O}^{\delta}_{2\gamma}(2)$. *При этом либо q простое, $\eta = +$ и N содержится в подгруппе $I \in \mathscr{C}_8$ группы G такой, что*

$$I = \begin{cases} \mathrm{GO}^{+}_{2^a}(q), & \textit{при } \delta = + \\ \mathrm{GSp}_{2^a}(q), & \textit{при } \delta = - \end{cases},$$

   либо N содержится в элементе класса $\mathscr{C}_5$.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) следуют из [36, §4.6].

Утверждение (3) также можно вывести из результатов [36, §4.6], но в части, касающейся строения группы N, утверждение (3) получается также из предложения 4.3.1. Используем обозначения из предыдущего параграфа. В силу пункта (3) предложения 4.3.1 имеем $N_G(R) = N_{1,0,\gamma} = N^0_{1,0,\gamma}$. Из пунктов (1) и (2) того же предложения следует, что $N^0_{1,0,\gamma} = H_{1,0,\gamma}C_{1,0,\gamma}$, причем $C_{1,0,\gamma} \simeq \mathbb{Z}_{q-\eta}$, $[H_{1,0,\gamma}, C_{1,0,\gamma}] = 1$, $H_{1,0,\gamma} \cap C_{1,0,\gamma} = Z(H_{1,0,\gamma})$ и

$$H_{1,0,\gamma}/Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} \simeq \begin{cases} \mathrm{O}^{\delta}_{2\gamma}(2), & \text{если } \alpha = 0 \text{ и } \varepsilon = -\eta, \\ \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = (H_{1,0,\gamma} \cap C_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = C_{1,0,\gamma}R_{1,0,\gamma}.$$

Поскольку Z_α совпадает с $O_2(Z(\mathrm{GL}^{\eta}_{2^\gamma}(q)))$, имеем $Z_\alpha = Z_0 \leqslant C_{1,0,\gamma}$ и

$$Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ E_\gamma = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}_{\delta}.$$

Таким образом,

$$N_G(R) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}_{\delta}).\,\mathrm{O}^{\delta}_{2\gamma}(2), & \text{если } \varepsilon = -\eta, \\ (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2), & \text{если } \varepsilon = \eta. \end{cases}$$

Справедливость утверждения (3) доказываемого предложения в части, относящейся к вложению подгруппы N в элемент того или иного класса $\mathscr{C}_5$, $\mathscr{C}_6$ или $\mathscr{C}_8$, следует из сопряженности абсолютно неприводимых подгрупп группы G, изоморфных R, которую гарантирует утверждение (2), и [36, §3.5, §4.5, §4.6 и §4.8] (см., в частности, таблицы 3.5A–3.5F[1]). □

В случае $r = 2$ теорема 4.1.1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4.5.2. *Пусть* $G = \mathrm{GL}^{\eta}_{n}(q)$, $H \leqslant G$, $O_2(H) \nleqslant Z(G)$. *Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H *содержится в элементе одного из классов Ашбахера* $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_4$;

(2) $n = 2^\gamma$ *для некоторого натурального числа* γ, H *содержится в нормализаторе* N *некоторой* 2*-подгруппы симплектического типа,* $O_2(H) \leqslant O_2(N)$, *и подгруппа* N *такая же, как в утверждении* (3) *предложения* 4.5.1.

---

[1] Отметим, что в таблице 3.5.B содержится неточность: требование четности f, указанное в качестве условия существования класса $\mathscr{C}_6$ в унитарных группах, не нужно. Ср. [19, таблицы 8.1–8.84].

Доказательство. Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leqslant G$, $O_2(H) \nleqslant Z(G)$. Согласно замечанию 4.2.3, группа H нормализует некоторую радикальную 2-подгруппу R группы G, причем $O_2(H) \leqslant O_2(N_G(R))$, и мы можем предполагать, что $H = N_G(R)$.

Если $(q, 2) \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой собственной параболической подгруппе по теореме Бореля-Титса [18], то есть содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_1$. Далее предполагаем, что $(q, 2) = 1$, и в этом случае имеют место разложения 4.6–4.9. Если в разложении 4.8 содержится более одного сомножителя, то подгруппа H снова попадает в некоторый элемент из класса $\mathscr{C}_1$. Таким образом, можно считать, что $s = 0, t = 1$, $G = G(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ для некоторых $k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}$ и

$$N_G(R) = N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}.$$

Если $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) > 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Далее, мы предполагаем, что $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = 1$, и поэтому $G = G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, а $R = R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением группы $R_1 \times \ldots \times R_u$ и группы $A_{\bar{c}}$, где $u = 2^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$ и каждая из групп R_i совпадает с $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Поскольку $A_{\bar{c}}$ вкладывается в группу S_u, то $N_G(R) \leqslant N_{G^k_{m,\alpha,\gamma}}(R^k_{m,\alpha,\gamma}) \wr \mathrm{S}_u$. Следовательно, если $u \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Таким образом, можно считать, что $u = 1$, $R = R^k_{m,\alpha,\gamma}$, $G = G^k_{m,\alpha,\gamma}$. Допустим $\alpha > 0$, тогда $k = 1$, и в силу пункта (4) предложения 4.3.1 следует, что $N_G(R) = N_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в группе $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}).2^\alpha$. Следовательно, $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_3$ при $\eta = +$ и в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$ при $\eta = -$.

Далее считаем, что $\alpha = 0$. Тогда $\varepsilon_\alpha = \eta$ и $N_G(R) = N^k_{m,0,\gamma}$.

Пусть $k = 2$, тогда $R = R^2_{m,0,\gamma} = S_{m,1,\gamma-1}$, и в силу предложения 4.3.3 получаем, что $N_G(R)$ содержится в подгруппе $\mathrm{GL}_{m2^{\gamma-1}}(q^2).2$. Следовательно, $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_3$ при $\eta = +$ и в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$ при $\eta = -$. Далее считаем, что $k = 1$.

В силу замечания 4.3.2, при $m > 1$ справедливо включение

$$N_G(R) = N^0_{m,0,\gamma} \leqslant \mathrm{GL}^\eta_m(q) \otimes \mathrm{GL}^\eta_{2^\gamma}(q) \in \mathscr{C}_4.$$

Наконец, мы можем считать, что

$$m = 1, R = R_{1,0,\gamma} = R_{0,\gamma}, G = G_{1,0,\gamma} = \mathrm{GL}^\eta_{2^\gamma}(q) \text{ и } n = 2^\gamma.$$

Таким образом, подгруппа $N = N_G(R)$ такая, как описано в утверждении (3) предложения 4.5.1, и теорема доказана. □

Перейдем к рассмотрению случая нечетного r. Аналогично предложению 4.5.1 для четного r, информацию о вложении в линейных и унитарных группах нормализатора абсолютно неприводимой r-подгруппы симплектического типа в элемент соответствующего класса Ашбахера при нечетном r дает следующее

Предложение 4.5.3. *Пусть r — нечетное простое число и $G = \mathrm{GL}^{\eta}_{r^{\gamma}}(q)$, где $q = p^f$ — степень простого числа p, причем $q \equiv \eta \pmod r$. Обозначим через e наименьший делитель числа $r-1$ такой, что $p^e \equiv \eta \pmod r$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Группа G содержит абсолютно неприводимую экстраспециальную группу $E = r^{2\gamma+1}$ такую, что $Z(E) = \Omega_1(O_r(Z(G)))$.*

(2) *Пусть Z — силовская r-подгруппа центра $Z(G)$ группы G. Тогда в G сопряжены любые две абсолютно неприводимые подгруппы, изоморфные ZE.*

(3) *Положим $R = ZE$ и $N = N_G(R)$. Тогда*

$$N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$$

и имеет место один из следующих случаев:

 (а) *$f = e$ и либо f нечетно, либо $\eta = -$; при этом $N \in \mathscr{C}_6$;*

 (б) *$f = e$ четно и $\eta = +$; при этом N содержится в $Z(G) \circ \mathrm{GU}_{r^{\gamma}}(q^{1/2}) \in \mathscr{C}_8$;*

 (в) *$f > e$; при этом N содержится в подгруппе из класса $\mathscr{C}_5$.*

Доказательство. Данное предложение доказывается аналогично предложению 4.5.1 с помощью [36, §3.5, §4.5, §4.6 и §4.8]. Информация о строении группы N в пункте (3) следует из 4.2.4. □

В случае нечетного r теорема 4.1.1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4.5.4. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leqslant G$, $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ *для некоторого нечетного простого* r. *Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H *содержится в элементе одного из классов Ашбахера* $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_4$;

(2) $n = r^\gamma$ *для некоторого натурального числа* γ, $q \equiv \eta \pmod r$, H *содержится в нормализаторе* N *некоторой* r*-подгруппы симплектического типа,* $O_2(H) \leqslant O_2(N)$, *и подгруппа* N *такая же, как в утверждении* (3) *предложения* 4.5.3.

Доказательство. Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leqslant G$, $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ для некоторого нечетного простого r. Согласно замечанию 4.2.3, группа H нормализует некоторую радикальную r-подгруппу R группы G, причем $O_r(H) \leqslant O_r(N_G(R))$, и мы можем предполагать, что $H = N_G(R)$.

Если $(q, r) \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой собственной параболической подгруппе по теореме Бореля-Титса [18], то есть содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_1$. Далее предполагаем, что $(q, r) = 1$, и в этом случае имеют место разложения 4.2–4.5. Если в разложении 4.4 содержится более одного сомножителя, то подгруппа H снова попадает в некоторый элемент из класса $\mathscr{C}_1$. Таким образом, можно считать, что $V_0 = 0$, $G = G(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ для некоторых $m, \alpha, \gamma, \bar{c}$ и

$$N_G(R) = N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}\,.$$

Если $u(m, \alpha, \gamma, \bar{c}) > 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Далее, мы предполагаем, что $u(m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = 1$, и поэтому $G = G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, а $R = R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением группы $R_1 \times \ldots \times R_u$ и группы $A_{\bar{c}}$, где $u = r^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$ и каждая из групп R_i совпадает с $R_{m,\alpha,\gamma}$. Поскольку $A_{\bar{c}}$ вкладывается в группу S_u, то $N_G(R) \leqslant N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma}) \wr \mathrm{S}_u$. Следовательно, если $u \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Таким образом, можно считать, что $u = 1$, $R = R_{m,\alpha,\gamma}$, $G = G_{m,\alpha,\gamma}$, и мы можем воспользоваться предложением 4.2.4. Из пункта (4) предложения 4.2.4 следует, что $N_G(R) = N_{m,\alpha,\gamma}$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}_{mr^\gamma}^\varepsilon(q^{er^\alpha}).er^\alpha$ и содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_3$, если $\alpha > 0$ или $e > 1$.

Далее считаем, что $\alpha = 0$ и $e = 1$. Тогда $\varepsilon = \eta$ и $N_G(R) = N_{m,0,\gamma} = N^0_{m,0,\gamma}$. Как отмечалось ранее, при $m > 1$ справедливо включение

$$N_G(R) = N^0_{m,0,\gamma} \leqslant \mathrm{GL}^\eta_m(q) \otimes \mathrm{GL}^\eta_{r^\gamma}(q) \in \mathscr{C}_4.$$

Наконец, мы можем считать, что

$$e = 1, m = 1, \alpha = 0, R = R_{1,0,\gamma} = R_{0,\gamma}, G = \mathrm{GL}^\eta_{r^\gamma}(q) \text{ и } n = r^\gamma.$$

В силу пункта (3) предложения 4.2.4 имеем $N_G(R) = N_{1,0,\gamma} = N^0_{1,0,\gamma}$. Из пунктов (1),(2) предложения 4.2.4 следует, что $N^0_{1,0,\gamma} = L_{1,0,\gamma}C_{1,0,\gamma}$, где

$$R_{1,0,\gamma} \leqslant L_{1,0,\gamma}, C_{1,0,\gamma} \simeq \mathbb{Z}_{q-\eta}, Z(L_{1,0,\gamma}) = Z(C_{1,0,\gamma}) \text{ и } L_{1,0,\gamma}/Z(L_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} \simeq \mathrm{Sp}_{2\gamma}(q).$$

Поскольку Z_α содержится в центре группы $Z_\alpha \circ E_\gamma$, имеем $Z_\alpha \leqslant C_{1,0,\gamma}$ и

$$Z(L_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = Z(C_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = C_{1,0,\gamma}R_{1,0,\gamma} = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ E_\gamma = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}.$$

Таким образом, $N_G(R) = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ такая, как описано в утверждении (3) предложения 4.5.3, и теорема доказана. □

Теорема 4.1.1 непосредственно вытекает из теорем 4.5.2 и 4.5.4.

Доказательство теоремы 4.1.2. Пусть $G = I(V)$, $H \leqslant G$ и $O_r(H) \neq 1$ для некоторого нечетного простого r. Согласно замечанию 4.2.3 группа H нормализует некоторую радикальную r-подгруппу R группы G, причем $O_r(H) \leqslant O_r(N_G(R))$, и можно считать, что $H = N_G(R)$.

Если $(q, r) \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой собственной параболической подгруппе по теореме Бореля-Титса [18], то есть в некотором элементе класса $\mathscr{C}_1$. Поэтому можно предполагать, что $(q, r) = 1$, и тогда имеют место разложения 4.12–4.15. Если в разложении 4.14 содержится более одного сомножителя, то подгруппа H снова попадает в некоторый элемент из класса $\mathscr{C}_1$. Таким образом, можно считать, что V_0 — нулевое подпространство, $G = I(V(m, \alpha, \gamma, \bar{c}))$ для некоторых $m, \alpha, \gamma, \bar{c}$ и

$$N_G(R) = N_{I(V(m,\alpha,\gamma,\bar{c}))}(R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{I(V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}})}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}\,.$$

Если $u(m, \alpha, \gamma, \bar{c}) > 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Далее, считаем, что $u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})=1$, $G=I(V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}})$ и $R=R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением групп $R_1\times\ldots\times R_u$ и $A_{\bar{c}}$, где $u=r^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$ и каждая из групп R_i совпадает с $R_{m,\alpha,\gamma}$. Поскольку $A_{\bar{c}}$ вкладывается в группу S_u, то $N_G(R)\leqslant N_{I(V_{m,\alpha,\gamma})}(R_{m,\alpha,\gamma})\wr\mathrm{S}_u$. Следовательно, $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$, если $u\neq 1$.

Таким образом, можно считать, что $u=1$, $R=R_{m,\alpha,\gamma}$, $G=I(V_{m,\alpha,\gamma})$ и воспользоваться предложением 4.4.1. Из пункта (4) предложения 4.4.1 следует, что $N_G(R)=N_{m,\alpha,\gamma}$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q).2$. Если $\varepsilon=+$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$ [36, Предложения 4.2.5, 4.2.7]. Наконец, если $\varepsilon=-$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_3$ [36, Предложения 4.3.7, 4.3.18]. □

Доказательство следствий 4.1.3 и 4.1.4. Ясно, что $\overline{O_r(H)}\leqslant O_r(\overline{H})$. Обратно, полный прообраз $O_r(\overline{H})$ в H имеет вид $S\times T$, где S — силовская r-подгруппа полного прообраза и T — холлова r'-подгруппа группы Z. Отсюда $\overline{S}=O_r(\overline{H})$. Поскольку S является характеристической подгруппой группы $S\times T\trianglelefteq H$, имеем $S\trianglelefteq H$ и $O_r(\overline{H})\leqslant\overline{O_r(H)}$. Таким образом, $O_r(\overline{H})=\overline{O_r(H)}$ и $O_r(H)\nleqslant Z(G)$. Теперь утверждения следствий прямо вытекают из утверждений теорем 4.1.1 и 4.1.2. □

Заключение

В диссертации получены новые результаты о подгрупповом строении групп лиева типа. Основными результатами диссертации являются следующие:

1. Найдены все простые связные линейные алгебраические группы, определенные над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики, в которых нормализатор максимального тора расщепляется над этим тором. Тем самым, проблема 1, поставленная Ж. Титсом в 1966 году, полностью решена.

2. Для всех конечных простых классических групп найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе.

3. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. Тем самым, проблема 2 полностью решена.

4. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора.

5. Для линейных и унитарных групп получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой.

6. Для симплектических и ортогональных групп над полем нечетной характеристики получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой нечетного порядка.

Результаты диссертации будут полезны в первую очередь специалистам по теории групп, а также исследователям в смежных областях. Поскольку основные результаты являются уточнением подгруппового строения групп лиева типа, то они будут использоваться для дальнейших исследований в теории групп. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Литература

[1] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, Мир, М., 1972.

[2] А. А. Бутурлакин, М. А. Гречкосеева, Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах, Алгебра и логика, 46:2 (2007), 129–156.

[3] А. С. Кондратьев, Подгруппы конечных групп Шевалле, Успехи матем. н., 41, 1(1986), 57–96.

[4] Д. О. Ревин, Свойство D_π в конечных простых группах, Алгебра и логика, 47, 3(2008), 364–394.

[5] Д. О. Ревин, Свойство D_π конечных групп в случае $2 \notin \pi$, Тр. ИММ УрО, 13, 1(2007), 166–182.

[6] Д. О. Ревин, Свойство D_π в линейных и унитарных группах, Сиб. мат. журн., 49, 2(2008), 437–448.

[7] Д. О. Ревин, Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах, Алгебра и логика, 42, 3(2003), 338–365.

[8] Дж. Хамфри, Линейные алгебраические группы, Москва, «Наука», 1980.

[9] J. Adams, X. He, Lifting of elements of Weyl groups, J. Algebra., 485 (2017), 142–165.

[10] J. L. Alperin, P. Fong, Weights for Symmetric and General Linear Groups, Journal of Algebra, 131(1990), 2–22.

[11] J. An, Weights for classical groups, Transactions of the AMS, 342, 1(1994), 1–42.

[12] J. An, 2-Weights for classical groups, J. reine angew. Math., 439(1993), 159–204.

[13] J. An, 2-Weights for general linear groups, Journal of Algebra, 149(1992), 500–527.

[14] J. An, 2-Weights for unitary groups, Transactions of the AMS, 339, 1(1993), 251–278.

[15] M. Aschbacher, Finite group theory (Cambridge Stud. Adv. Math., 10), Cambridge etc., Cambridge Univ. Press, 1986.

[16] M. Aschbacher, On the maximal subgroups of the finite classical groups, Invent. math., 76(1984), 469–514.

[17] A. A. Baykalov, On algebraic normalisers of maximal tori in simple groups of Lie type, Journal of Group Theory, 2024, https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0070.

[18] A. Borel, J. Tits, Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs, I, Invent. math., 12, 2(1971), 95–104.

[19] J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal, The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 407, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[20] R. W. Carter, Finite groups of Lie type, Conjugacy classes and complex characters, John Wiley and Sons, 1985.

[21] R. W. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, Compositio Mathematica, 25, 1(1972), 1–59.

[22] R. W. Carter, Simple groups of Lie type, John Wiley and Sons, 1972.

[23] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Proc. Lond. Math Soc., 37(1978), 491–507.

[24] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. Lond.Math Soc., 42, 1(1981), 1–41.

[25] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[26] D. A. Craven, The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q), E_6(q)$ and $^2E_6(q)$ and related almost simple groups, Invent. Math., 234(2023), 637–719.

[27] D. A. Craven, On the Maximal Subgroups of $E_7(q)$ and Related Almost Simple Groups, https://arxiv.org/abs/2201.07081v1.

[28] M. Curtis, A. Wiederhold, B. Williams, Normalizers of maximal tori, Localization in group theory and homotopy theory, and related topics (Sympos., Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., 1974), Springer, Berlin, 1974, Lecture Notes in Math., V. 418, 31–47.

[29] D. I. Deriziotis, A. P. Fakiolas, The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8, Comm. Algebra., 19(1991), no. 3, 889–903.

[30] D. I. Deriziotis, G. O. Michler, Character table and blocks of finite simple triality groups $^3D_4(q)$, Trans. Amer. Math. Soc., 303, 1(1987), 39–70.

[31] P. Fleischmann, I. Janiszczak, The semisimple conjugacy classes of finite groups of Lie type E_6 and E_7, Comm. Algebra, 21, 1(1993), 93–161.

[32] P. Fleischmann, I. Janiszczak, The semisimple conjugacy classes and the generic class number of the finite simple groups of Lie type E_8, Comm. Algebra, 22, 6(1994), 2221–2303.

[33] P. Gager, Maximal tori in finite groups of Lie type, PhD Thesis, University of Warwick, (1973).

[34] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups, Mathematical Surveys and Monographs, 40, N. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[35] W. M. Kantor, A. Seress, Prime power graphs for groups of Lie type, J. Algebra, 247(2002), 370–434.

[36] P. Kleidman, M. Liebeck, The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups, (London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 129), Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[37] R. Lawther, The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_4(q)$, J. Algebra, 212(1999), 79–118.

[38] M. W. Liebeck, G. M. Seitz, On the subgroup structure of classical groups, Invent. math., 134, 2(1998), 427–453.

[39] G. Lusztig, Lifting involutions in a Weyl group to the torus normalizer, Represent.Th., 22(2018), 27–44.

[40] G. Malle, D. Testerman, Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type, Cambridge University Press, 2011.

[41] M. Reeder, P. Levy, J.-K. Yu, B. H. Gross, Gradings of positive rank on simple Lie algebras, Transform. Groups, 17, 4(2012), 1123–1190.

[42] K. Shinoda, The conjugacy classes of the finite Ree groups of type F_4, Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics, 22(1975), 1–15.

[43] T. Shoji, The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic $p \neq 2$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21(1974), 1–17.

[44] P. H. Tiep, A. E. Zalesski, Unipotent elements of finite groups of Lie tipe and realization fields of their complex representations, J. Algebra, 271, 1(2004), 327–390.

[45] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus, J. Algebra, 4(1966), 96–116.

[46] N. A. Vavilov, Do it yourself structure constants for Lie algebras of types E_l, J. Math. Sci. (N.Y.), 120, 4(2004), 1513–1548.

[47] Matthew C.B. Zaremsky, Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups, J. Group Theory 17, 1(2014), 49–71.

[48] `http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/`

[49] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/blob/master/E7/complements_E7.txt`.

[50] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/blob/master/E8/complements_E8.txt`.

[51] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/tree/master/F4`.

[52] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.1; 2018. (http://www.gap-system.org)

[53] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language. J. Symbolic Comput., 24 (1997), 235–265.

Работы автора по теме диссертации

[54] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах, Известия РАН. Сер. матем., 78, 3(2014), 19–34.

[55] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups, J. Algebra Appl., 14 (2015), no. 7, 1550114 (20 pages).

[56] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups. J. Algebra Appl., 16 (2017), no. 9, 1750174 (23 pages).

[57] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных линейных алгебраических группах, Известия РАН. Сер. матем., 81,2(2017), 35–52.

[58] A. A. Galt, A. M. Staroletov, On splitting of the normalizer of a maximal Torus in $E_6(q)$, Algebra Colloquium, 26, 2(2019), 329–350.

[59] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$, Матем. тр., 24, 1(2021), 52–101.

[60] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$, Известия РАН. Сер. матем., 86, 1(2022), 134–159.

[61] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в конечных группах лиева типа, Алгебра и логика, 62, 1(2023), 33–58.

[62] А. А. Гальт, Строение нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа, Матем. тр., 27, 2(2024), 62–98.

[63] А. А. Гальт, В. Го, Е. М. Аверкин, Д. О. Ревин, О локальном случае в теореме Ашбахера для линейных и унитарных групп, Сиб. матем. журн., 55, 2(2014), 296–303.

[64] А. А. Гальт, Д. О. Ревин, Локальный случай в теореме Ашбахера для линейных и унитарных групп, Сиб. электрон. матем. изв., 13(2016), 1207–1218.

[65] Н. Ян, А. А. Гальт, О локальном случае в теореме Ашбахера для симплектических и ортогональных групп, Сиб. матем. журн., 62, 2(2021), 466–472.