На правах рукописи

**Гальт Алексей Альбертович**

# СВОЙСТВО РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
**Мазуров Виктор Данилович**

Официальные оппоненты:
**Зенков Виктор Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии

**Попов Владимир Леонидович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, главный научный сотрудник отдела алгебры

**Степанов Алексей Владимирович**, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», доцент факультета математики и компьютеных наук

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Защита состоится «25» апреля 2025 года в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.074.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Ф.А. Дудкин

## Общая характеристика работы

**Постановка задачи и актуальность темы исследований.** Диссертационная работа посвящена классическому направлению теории групп — изучению их подгруппового строения. Одним из центральных объектов при изучении подгруппового строения являются простые группы. Любая конечная группа может быть построена из конечных простых групп с помощью конечного числа расширений, поэтому наиболее естественным представляется изучение подгруппового строения конечных простых групп. Конечные простые группы можно разделить на три семейства: спорадические группы, знакопеременные группы и конечные группы лиева типа. Основной массив составляют конечные группы лиева типа, которые делятся на 16 классов. Шесть классов составляют, так называемые, классические группы, которые имеют естественное матричное представление, и десять — исключительные.

Конечные группы лиева типа $G$ имеют тесную связь с простыми связными линейными алгебраическими группами $\overline{G}$, определенными над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики $p$. Они возникают из линейных алгебраических групп как множество неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга $\sigma$. Важную роль как в линейных алгебраических группах, так и в конечных группах лиева типа играют максимальные торы. В частности, они фигурируют в теории представлений групп лиева типа и занимают центральное место в теории Каждана-Люстига (см. [20]). Кроме того, они возникают при исследовании различных задач, связанных с подгрупповым строением, поскольку каждый полупростой элемент группы лиева типа содержится в некотором максимальном торе.

Изучению максимальных торов посвящено большое количество работ различных авторов. Основополагающие результаты о строении максимальных торов были получены Р. Картером в работах [23] и [24]. А. Бутурлакин и М. Гречкосеева описали циклическое строение максимальных торов во всех простых классических группах [2]. В случае исключительных групп лиева типа необходимо выделить работы Д. Деризиотиса с А. Факиоласом и с Г. Михлером о строении максимальных торов в группах лиева типа $E_6, E_7, E_8$ [29] и группах ${}^3D_4(q)$ [30] соответственно. Максимальные торы в исключительных группах лиева типа $F_4$ обсуждаются в работах К. Шиноды [42], Т. Шоджи [43] и Р. Лоутера [37]. Также отметим работы П. Флейшмана и И. Янушчака [31, 32] и диссертацию П. Гагера [33].

Напомним определение одного из основных понятий, используемых в диссертации. Пусть $A$ — нормальная подгруппа в группе $G$. Подгруппа $B$ группы $G$ называется *дополнением* к $A$ в $G$, если $G = AB$ и $A \cap B = 1$. В этом случае мы также говорим, что группа $G$ *расщепляется над* $A$.

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [45] (автор диссертации благодарен В. Л. Попову, указавшему на этот факт). Хорошо известно, что все максимальные торы $\overline{T}$ группы $\overline{G}$ сопряжены в ней [40, следствие 6.5] и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля $W$ группы $\overline{G}$.

**Проблема 1 (Ж. Титс).** *Описать группы $\overline{G}$, в которых $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$.*

Отметим, что в случае простых групп Ли сформулированная проблема была решена в работе [28]. При переходе к конечным группам $G$ лиева типа возникает аналогичный вопрос. А именно, пусть $\overline{T}$ — максимальный $\sigma$-инвариантный тор группы $\overline{G}$, $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы $G$ и $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ — алгебраический нормализатор. Известно, что в случае конечных групп максимальные торы не обязаны быть сопряженными в группе $G$.

**Проблема 2.** *Описать группы $G$ и их максимальные торы $T$, в которых $N(G,T)$ расщепляется над $T$.*

Следуя за работой [9], прообраз элемента группы Вейля $W$ в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ будем называть *поднятием*. Для данной группы $\overline{G}$ положительный ответ на проблему 1, в частности означает, что любой элемент из $W$ имеет поднятие в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ такого же порядка. Естественно рассмотреть вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ в нерасщепляемом случае. Дж. Адамс и Х. Хе в работе [9] заметили, что если порядок элемента $w$ из группы Вейля равен $d$, то минимальный порядок поднятия для $w$ равен либо $d$, либо $2d$. В работе [47] были рассмотрены эллиптические элементы группы Вейля, то есть элементы, не имеющие собственных значений 1 в естественном представлении. В частности, было доказано, что минимальный порядок поднятий для таких элементов равен $d$, за исключением простых алгебраических групп типа $C_n$ или $F_4$. Результаты для так называемых регулярных элементов группы Вейля можно найти в работах [9] и [41]. Отметим, что Дж.

Люстиг в работе [39] изучал поднятия инволюций группы Вейля в нормализаторе максимального тора.

Вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля может быть задан и для конечных групп лиева типа $G$. Если порядок элемента $w$ из группы Вейля равен $d$ и минимальный порядок его поднятия в $G$ равен $d$, то он равен $d$ и в группе $\overline{G}$.

При изучении строения групп одной из ключевых задач является описание и исследование максимальных подгрупп. В случае конечных простых групп описание максимальных подгрупп продолжается до сих пор. Стоит отметить недавние работы Д. Крэйвена [26, 27], посвященные описанию максимальных подгрупп в исключительных группах лиева типа $F_4$, $E_6$ и $E_7$.

Подгруппы в классических группах в значительной степени описывает теорема М. Ашбахера [16].

**Теорема (Ашбахер).** *Пусть $G$ — классическая группа, $H \leqslant G$. Тогда либо образ $H$ в $G/Z(G)$ является почти простой группой, либо $H$ содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$.*

Здесь $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ — естественные классы подгрупп в классических группах, выделенные М. Ашбахером.

Точное описание элементов в классах $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ получено в монографиях [19, 36]. Следует отметить, что в определении классов $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ в [16] и [19, 36] имеются незначительные расхождения и в дальнейшем классы Ашбахера мы будем понимать в смысле [19, 36]. Примерное описание (тип) подгрупп, составляющих тот или иной класс Ашбахера в общих линейных группах приведено в [36, Таблица 1.2.A]). Строгое описание классов $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_8$ для классических групп, у которых размерность естественного модуля не меньше 13, можно найти в [36, Глава 4], и для оставшихся классических групп — в [19, таблицы 8.1–8.85], куда включено для групп малых размерностей полное описание подгрупп, не содержащихся в элементах из классов Ашбахера, то есть являющихся почти простыми. М. Либек и Г. Зейтс в работе [38] получили новое доказательство теоремы Ашбахера с помощью теории алгебраических групп и элементарной линейной алгебры.

Отметим, что теорема Ашбахера не дает полного описания подгруппового строения соответствующих групп хотя бы по той причине, что нет описания почти простых подгрупп в классических группах. И даже в ситуации, когда подгруппа заведомо не является почти простой (скажем, имеет нетривиальный разрешимый радикал и содержится в некоторой локальной подгруппе), использование теоремы Ашбахера в качестве инструмента индуктивных рассуждений может быть сопряжено со значительными трудностями. Например, если подгруппа $H$ классической группы попадает в класс $\mathscr{C}_6$ (нормализаторы подгрупп симплектического типа), то контролировать выполнение предположения индукции бывает зачастую невозможно, поскольку меняется характеристика основного поля. При этом подгруппа $H$ вовсе не обязана содержаться в локальной максимальной подгруппе, которые полностью описаны (см. [36, следствие 1.2.4]).

Такого рода трудности возникали, например, в работах [4, 5, 6] при получении описания простых групп, обладающих холловым свойством $D_\pi$. Там эти трудности удалось преодолеть за счет использования описания нормализаторов так называемых радикальных подгрупп в классических группах. Это описание было получено Дж. Альперином и П. Фонгом в [10] и Дж. Аном в [11, 12, 13, 14] как побочный результат изучения в случае классических групп известной гипотезы Альперина о весах, имеющей большое значение для теории представлений. В частности, оказалось, что если $H$ — подгруппа в классической простой группе $G$ над полем характеристики $p$ и $H$ имеет нетривиальную нормальную $r$-подгруппу для некоторого простого числа $r$, то $H$ содержится в собственной подгруппе $C$ группы $G$ такой, что любой неабелев композиционный фактор группы $C$ изоморфен либо знакопеременной группе, либо классической группе характеристики $p$ или $r$.

Однако точная формулировка результатов Альперина, Фонга и Ана в той части, которая характеризует радикальные подгруппы и их нормализаторы, достаточно громоздка, и хотелось бы иметь эквивалентный данному описанию инструмент индуктивных рассуждений, с одной стороны напоминающий привычные результаты Ашбахера, а с другой, позволяющий обходить трудности с возникновением «чужой» характеристики.

**Цель и основные результаты диссертации.**

Целью диссертации является полное решение проблем 1 и 2, а также уточнение теоремы Ашбахера о подгруппах классических групп в локальном случае. Основными результатами диссертации являются следующие:

1. Найдены все простые связные линейные алгебраические группы,

определенные над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики, в которых нормализатор максимального тора расщепляется над этим тором. Тем самым, проблема 1 полностью решена. Результат опубликован в статьях [54, 55, 56, 57].

2. Для всех конечных простых классических групп найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. Результат опубликован в статьях [54, 55, 56].

3. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены все максимальные торы, имеющие дополнение в своем алгебраическом нормализаторе. Тем самым, проблема 2 полностью решена. Результат опубликован в статьях [58, 59, 60, 61].

4. Для всех конечных исключительных групп лиева типа найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора. Результат опубликован в статьях [58, 59, 60, 61].

5. Для линейных и унитарных групп получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой. Результат опубликован в статьях [63, 64].

6. Для симплектических и ортогональных групп над полем нечетной характеристики получено уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой нечетного порядка. Результат опубликован в статье [65].

**Личный вклад автора диссертации.**

Результаты диссертации опубликованы в работах [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результат 1, дающий ответ на проблему Ж. Титса, получен автором лично [54, 55, 56, 57]. Результат 2, отвечающий на проблему 2 для классических групп, получен автором лично [54, 55, 56]. При исследовании проблемы 2 в исключительных группах лиева типа потребовались вычисления в системах компьютерной алгебры MAGMA и GAP. В связи с этим результаты 3 и 4 получены в соавторстве с А. М. Старолетовым, отвечавшим за компьютерные вычисления, а методы решения проблемы для рассматриваемых групп и доказательства основных результатов принадлежат автору диссертации [58, 59, 60, 61]. В личной работе автора [62] приводится обзор результатов о строении нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа. Результат

5 получен в соавторстве с Е. М. Аверкиным, В. Го (Китай), Д. О. Ревиным в работе [63] и с Д. О. Ревиным в работе [64]. Д. О. Ревин отвечал за постановку задачи и возможные подходы к ее решению. Разработка методов решения поставленной задачи и доказательство основных результатов в статьях [63] и [64] принадлежат А. А. Гальту. В. Го (Китай) и Е. М. Аверкин участвовали в обсуждении полученных в [63] результатов и внесли полезные замечания, позволившие улучшить финальную версию работы. Результат 6 получен в соавторстве с Н. Яном в работе [65]. Методы решения поставленной задачи и доказательство основной теоремы статьи [65] принадлежат А. А. Гальту. Н. Ян участвовал в обсуждении итоговых результатов и внес ценные замечания, которые улучшили финальную версию работы. Решающий вклад автора диссертации в получении результатов 5 и 6 не вызывает сомнений.

**Новизна, теоретическая и практическая значимость результатов.**

С одной стороны, любая конечная группа может быть построена из конечных простых групп с помощью конечного числа расширений. С другой стороны, многие задачи, поставленные для произвольных конечных групп, удается свести к конечным простым группам. Поэтому изучение подгруппового строения конечных простых групп представляется естественным и важным направлением в теории конечных групп. Данная диссертация посвящена группам лиева типа, которые составляют основной массив конечных простых групп, и наибольшие сложности при решении большинства задач возникают именно в этом классе.

Основным направлением исследований диссертации является вопрос о расщепляемости нормализатора максимального тора в алгебраических группах и конечных группах лиева типа. В случае алгебраических групп данная проблема была поставлена одним из ведущих математиков Ж. Титсом еще в 1966 году. Полученные результаты дают исчерпывающий ответ на проблему как для алгебраических групп, что решает проблему Ж. Титса, так и для конечных групп лиева типа, причем в случае расщепляемости нормализатора, соответствующее дополнение построено конструктивно. Отметим, что аналогичные результаты для алгебраических групп были получены другими методами Дж. Адамсом и Х. Хе в работе [9], вышедшей в то же время, что и [57]. Часто возникает ситуация, когда достаточно знаний о некоторых элементах в рассматриваемой группе. В этом случае полученные результаты о минимальных порядках поднятий элементов группы Вейля в соответствующих нормализаторах представляют несомненный интерес.

При проведении индуктивных рассуждений в конечных группах одним из главных инструментов является теорема Ашбахера. Полученные результаты уточняют теорему Ашбахера в локальном случае и позволяют избегать трудностей с возникновением «чужой» характеристики поля.

Все основные результаты диссертации являются новыми, что подтверждается публикациями автора в рецензируемых научных журналах, а также докладами на конференциях и специализированных семинарах. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть полезны в первую очередь специалистам по теории групп. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

**Методы исследования.** В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, теория линейных алгебраических групп, теория групп лиева типа, методы линейной алгебры. Автором диссертации разработаны новые методы, позволившие при исследовании расщепляемости, рассматривать многие классы максимальных торов одновременно. Кроме этого, для вычислений в исключительных группах лиева типа привлекаются компьютерные программы GAP и Magma.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В. Д. Мазурова (г. Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), школа-конференция «Теория групп и узлы» (г. Натал, Бразилия, 17–28 ноября 2014 г.), международная научная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань, 2–6 июня, 2014 г.), международная молодежная школа-конференция «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (г. Новосибирск, 28 июля – 8 августа, 2014 г.), международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (г. Минск, Республика Беларусь, 14–18 сентября 2015 г.), международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (п. Эльбрус, Кабардино-Балкарская Республика, 17–22 мая 2017 г.), 12-ая международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Эрлагол, Республика Алтай, 23–29 июня, 2017 г.), международная конференция «Groups St Andrews» (г. Бирмингем, Великобритания, 5–13 августа, 2017 г.), международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (г. Москва, 28–31 мая 2019 г.), международная конференция «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем», посвященная 70-летию А.Х. Журтова (г. Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г.), международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (г. Казань, 23–27 августа, 2021 г.), международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова (г. Нальчик, 28 июня – 3 июля 2022 г.), вторая конференция Математических центров России (г. Москва, 7–11 ноября 2022 г.), международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В.Д. Мазурова (г. Новосибирск, 2–8 июля 2023 г.).

Отдельно отметим, что по результатам диссертации были сделаны пленарные доклады на следующих конференциях: российско-индийская школа-конференция «Группы и смежные структуры» (г. Мохали, Индия, 7–8 декабря, 2017 г.), международная конференция «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 14–18 ноября 2022 г.), международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 70-летию А.А. Махнева (г. Нальчик, 9–15 июля 2023 г.), II Всероссийская научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д.А. Граве (г. Вологда, 19–23 сентября, 2023 г.).

Результаты исследований неоднократно докладывались на семинарах «Теория групп», «Алгебра и логика» в Новосибирске, а также на Общеинститутском математическом семинаре ИМ СО РАН, Уральском семинаре по теории групп и комбинаторике (г. Екатеринбург), математическом семинаре в Цзяннаньском университете (г. Уси, Китай).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь состоят из разделов. Основные результаты диссертации называются теоремами. Все утверждения — предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер раздела, третье — номер утверждения. Рисунки и формулы имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер рисунка или формулы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 248 страницах, библиография содержит 65 наименований.

## Содержание диссертации

**Глава 1** носит вводный характер. В ней собраны основные определения, обозначения и предварительные результаты. Приведены необходимые сведения о линейных алгебраических группах, группах лиева типа и связь между ними.

**Глава 2** посвящена решению вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора в классических группах, то есть решению проблем 1 и 2 для классических групп. В разделах главы последовательно рассматриваются симплектические группы (раздел 2.2), линейные и унитарные группы (раздел 2.3), а затем ортогональные группы (раздел 2.4). В каждом из разделов сначала разбираются соответствующие группы над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, а затем над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

**Глава 3** посвящена решению вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных группах лиева типа (односвязных и присоединенного типа), то есть решению проблем 1 и 2 для этих групп. Более того, в этой главе найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора.

**Глава 4** посвящена уточнению теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной $r$-подгруппой. Основными результатами главы являются теорема 4.1.1 и теорема 4.1.2.

**Благодарности.** Я выражаю искреннюю благодарность своему научному консультанту и первому научному руководителю чл.-корр. РАН Виктору Даниловичу Мазурову за интерес к полученным результатам и поддержку на протяжении всей научной деятельности. Я особо благодарен своему научному руководителю по кандидатской диссертации Евгению Петровичу Вдовину, инициировавшему мою работу над проблемой расщепляемости нормализатора максимального тора в группах лиева типа. Я признателен своим соавторам Алексею Михайловичу Старолетову и Даниле Олеговичу Ревину, а также Андрею Викторовичу Васильеву и Александру Александровичу Бутурлакину за плодотворные научные обсуждения и ценные замечания.

Я хотел бы почтить светлую память моей мамы, Валентины Андриановны Марковой, поддерживавшей и помогавшей мне на протяжении всей моей жизни.

## Список литературы


[1] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, Мир, М., 1972.

[2] А. А. Бутурлакин, М. А. Гречкосеева, Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах, Алгебра и логика, 46:2 (2007), 129–156.

[3] А. С. Кондратьев, Подгруппы конечных групп Шевалле, Успехи матем. н., 41, 1(1986), 57–96.

[4] Д. О. Ревин, Свойство $D_\pi$ в конечных простых группах, Алгебра и логика, 47, 3(2008), 364–394.

[5] Д. О. Ревин, Свойство $D_\pi$ конечных групп в случае $2 \notin \pi$, Тр. ИММ УрО, 13, 1(2007), 166–182.

[6] Д. О. Ревин, Свойство $D_\pi$ в линейных и унитарных группах, Сиб. мат. журн., 49, 2(2008), 437–448.

[7] Д. О. Ревин, Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах, Алгебра и логика, 42, 3(2003), 338–365.

[8] Дж. Хамфри, Линейные алгебраические группы, Москва, «Наука», 1980.

[9] J. Adams, X. He, Lifting of elements of Weyl groups, J. Algebra., 485 (2017), 142–165.

[10] J. L. Alperin, P. Fong, Weights for Symmetric and General Linear Groups, Journal of Algebra, 131(1990), 2–22.

[11] J. An, Weights for classical groups, Transactions of the AMS, 342, 1(1994), 1–42.

[12] J. An, 2-Weights for classical groups, J. reine angew. Math., 439(1993), 159–204.

[13] J. An, 2-Weights for general linear groups, Journal of Algebra, 149(1992), 500–527.

[14] J. An, 2-Weights for unitary groups, Transactions of the AMS, 339, 1(1993), 251–278.

[15] M. Aschbacher, Finite group theory (Cambridge Stud. Adv. Math., 10), Cambridge etc., Cambridge Univ. Press, 1986.

[16] M. Aschbacher, On the maximal subgroups of the finite classical groups, Invent. math., 76(1984), 469–514.

[17] A. A. Baykalov, On algebraic normalisers of maximal tori in simple groups of Lie type, Journal of Group Theory, 2024, https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0070.

[18] A. Borel, J. Tits, Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs, I, Invent. math., 12, 2(1971), 95–104.

[19] J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal, The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 407, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[20] R. W. Carter, Finite groups of Lie type, Conjugacy classes and complex characters, John Wiley and Sons, 1985.

[21] R. W. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, Compositio Mathematica, 25, 1(1972), 1–59.

[22] R. W. Carter, Simple groups of Lie type, John Wiley and Sons, 1972.

[23] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Proc. Lond. Math Soc., 37(1978), 491–507.

[24] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. Lond.Math Soc., 42, 1(1981), 1–41.

[25] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[26] D. A. Craven, The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q), E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups, Invent. Math., 234(2023), 637–719.

[27] D. A. Craven, On the Maximal Subgroups of $E_7(q)$ and Related Almost Simple Groups, https://arxiv.org/abs/2201.07081v1.

[28] M. Curtis, A. Wiederhold, B. Williams, Normalizers of maximal tori, Localization in group theory and homotopy theory, and related topics (Sympos., Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., 1974), Springer, Berlin, 1974, Lecture Notes in Math., V. 418, 31–47.

[29] D. I. Deriziotis, A. P. Fakiolas, The maximal tori in the finite Chevalley groups of type $E_6, E_7$ and $E_8$, Comm. Algebra., 19(1991), no. 3, 889–903.

[30] D. I. Deriziotis, G. O. Michler, Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$, Trans. Amer. Math. Soc., 303, 1(1987), 39–70.

[31] P. Fleischmann, I. Janiszczak, The semisimple conjugacy classes of finite groups of Lie type $E_6$ and $E_7$, Comm. Algebra, 21, 1(1993), 93–161.

[32] P. Fleischmann, I. Janiszczak, The semisimple conjugacy classes and the generic class number of the finite simple groups of Lie type $E_8$, Comm. Algebra, 22, 6(1994), 2221–2303.

[33] P. Gager, Maximal tori in finite groups of Lie type, PhD Thesis, University of Warwick, (1973).

[34] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple $K$-groups, Mathematical Surveys and Monographs, 40, N. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[35] W. M. Kantor, A. Seress, Prime power graphs for groups of Lie type, J. Algebra, 247(2002), 370–434.

[36] P. Kleidman, M. Liebeck, The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups, (London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 129), Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[37] R. Lawther, The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_4(q)$, J. Algebra, 212(1999), 79–118.

[38] M. W. Liebeck, G. M. Seitz, On the subgroup structure of classical groups, Invent. math., 134, 2(1998), 427–453.

[39] G. Lusztig, Lifting involutions in a Weyl group to the torus normalizer, Represent.Th., 22(2018), 27–44.

[40] G. Malle, D. Testerman, Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type, Cambridge University Press, 2011.

[41] M. Reeder, P. Levy, J.-K. Yu, B. H. Gross, Gradings of positive rank on simple Lie algebras, Transform. Groups, 17, 4(2012), 1123–1190.

[42] K. Shinoda, The conjugacy classes of the finite Ree groups of type $F_4$, Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics, 22(1975), 1–15.

[43] T. Shoji, The conjugacy classes of Chevalley groups of type $F_4$ over finite fields of characteristic $p \neq 2$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21(1974), 1–17.

[44] P. H. Tiep, A. E. Zalesski, Unipotent elements of finite groups of Lie tipe and realization fields of their complex representations, J. Algebra, 271, 1(2004), 327–390.

[45] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus, J. Algebra, 4(1966), 96–116.

[46] N. A. Vavilov, Do it yourself structure constants for Lie algebras of types $E_l$, J. Math. Sci. (N.Y.), 120, 4(2004), 1513–1548.

[47] Matthew C.B. Zaremsky, Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups, J. Group Theory 17, 1(2014), 49–71.

[48] `http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/`

[49] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/blob/master/E7/complements_E7.txt`.

[50] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/blob/master/E8/complements_E8.txt`.

[51] `https://github.com/AlexeyStaroletov/GroupsOfLieType/tree/master/F4`.

[52] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.1; 2018. (http://www.gap-system.org)

[53] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language. J. Symbolic Comput., 24 (1997), 235–265.

## Работы автора по теме диссертации

[54] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах, Известия РАН. Сер. матем., 78, 3(2014), 19–34.

[55] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups, J. Algebra Appl., 14 (2015), no. 7, 1550114 (20 pages).

[56] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups. J. Algebra Appl., 16 (2017), no. 9, 1750174 (23 pages).

[57] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных линейных алгебраических группах, Известия РАН. Сер. матем., 81,2(2017), 35–52.

[58] A. A. Galt, A. M. Staroletov, On splitting of the normalizer of a maximal Torus in $E_6(q)$, Algebra Colloquium, 26, 2(2019), 329–350.

[59] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$, Матем. тр., 24, 1(2021), 52–101.

[60] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$, Известия РАН. Сер. матем., 86, 1(2022), 134–159.

[61] А. А. Гальт, А. М. Старолетов, О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в конечных группах лиева типа, Алгебра и логика, 62, 1(2023), 33–58.

[62] А. А. Гальт, Строение нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа, Матем. тр., 27, 2(2024), 62–98.

[63] А. А. Гальт, В. Го, Е. М. Аверкин, Д. О. Ревин, О локальном случае в теореме Ашбахера для линейных и унитарных групп, Сиб. матем. журн., 55, 2(2014), 296–303.

[64] А. А. Гальт, Д. О. Ревин, Локальный случай в теореме Ашбахера для линейных и унитарных групп, Сиб. электрон. матем. изв., 13(2016), 1207–1218.

[65] Н. Ян, А. А. Гальт, О локальном случае в теореме Ашбахера для симплектических и ортогональных групп, Сиб. матем. журн., 62, 2(2021), 466–472.

Гальт Алексей Альбертович

# СВОЙСТВО РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктор физико-математических наук

Подписано в печать 22.01.2025 Формат 60 х 84 1/16
Усл. печ. л. 1.0. Уг.-изд.п. 1,0.
Заказ N 100 Тираж 120 экз.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6