На правах рукописи

Грюнвальд Лилия Александровна

Аналитическая теория циркулянтных графов и ее приложения к комбинаторному анализу

Специальность 1.1.1 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Медных Александр Дмитриевич,** д.ф.-м.н., профессор
Официальные оппоненты:	**Мантуров Василий Олегович,** д.ф.-м.н., профессор РАН Московский физико-технический институт, профессор кафедры дискретной математики
	Ляпин Александр Петрович, к.ф.-м.н., доцент доцент базовой кафедры вычислительных и информационных технологий института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится "7 апреля 2025 г. в 16:00" на заседании диссертационного совета 24.1.074.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. академика Коптюга, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМ СО РАН и на сайте https://math.nsc.ru/dis-council/dissert

Автореферат разослан . . года.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.074.01,
д.ф.-м.н. Подвигин Иван Викторович

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению актуальных вопросов современного анализа, которые находятся на стыке комплексного анализа, комбинаторного анализа, теории графов и алгебры. В работе рассматриваются спектральные и алгебраические свойства дискретного лапласиана, применительно к широкому семейству циркулянтных графов и их различных обобщений.

Циркулянтные графы $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах с целочисленными параметрами $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ являются одним из ключевых объектов данного исследования. Это обширное семейство графов, которое иногда рассматривается как граф Кэли для циклической группы, включает: граф-цикл, полный граф, полные двудольные графы, граф-антипризму, граф-призму, граф-корону, пустые графы, ладейные графы, граф Пэли простого порядка, лестницу Мёбиуса, а также множество других.[1]

Введение дополнительных конструктивных элементов в конструкцию циркулянтного графа позволяет рассматривать циркулянтное расслоение как частный случай многослойных структур, известных в литературе как «многослойные графы». Каждый слой такого графа представляет собой циркулянтный граф, что делает его естественным обобщением базовой конструкции. Примеры циркулянтных расслоений включают обобщенный граф Петерсена, граф-сэндвич и дискретный тор. Циркулянтное расслоение также позволяет рассматривать пустые слои $C_n(\emptyset)$, включая в это семейство обобщенные I-графы, Y-графы и H-графы.[2]

Первая часть диссертации посвящена исследованию спектрального инварианта графа — числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и расслоениях. Этот инвариант может быть вычислен с использованием спектра матрицы Лапласа.

Матрица Лапласа L, или лапласиан, возникает из задачи дискретизации классического уравнения Лапласа для решеток[3] и при адаптации к

[1] *Some invariants of circulant graphs* / M. Munir, W. Nazeer, Z. Shahzadi, S. M. Kang // Symmetry. -v. 8, №11. –2016. -p. 1–8.

[2] Biggs, N. L. *Three remarkable graphs* // Canad. J. Math. -v. 15, №2. –1973. -p. 397–411.

[3] Cvetkovic, D. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra* / D. Cvetkovic, S. Simic, P. Rowlinson. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. —364 p.

произвольным графам G, приводит к формированию дискретного лапласиана $L(G)$ в виде квадратной матрицы размером, соответствующим числу вершин в графе.

Теорема А. К. Кельманса и В. М. Челнокова[4] устанавливает связь между структурно-геометрическими свойствами графа G и спектральными свойствами его матрицы Лапласа $L(G)$, что позволяет выразить число корневых остовных лесов $f(G)$ в графе G следующей формулой

$$f(G) = \det(I_n + L(G)),$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Однако, аналитические формулы для вычисления числа корневых остовных лесов известны только для ограниченного числа случаев.[5,6,7]

Следуя подходу, описанному в работе[7], во второй части диссертации исследуется структура другого инварианта, не относящегося к классу спектральных. Известный в литературе под различными названиями: критическая группа, песочная группа, якобиан и группа Пикара, этот инвариант отражает разные аспекты одного понятия, возникшего независимо в нескольких научных областях: в статистической физике[8,9], алгебраической геометрии как дискретные аналоги классических понятий из теории римановых поверхностей[7,10] и в комбинаторных играх на графах, например, в «долларовой игре».[11]

---

[4]Kelmans, A. K. *A Certain Polynomial of a Graph and Graphs with an Extremal Number of Trees* / A. K. Kelmans, V. M. Chelnokov. // J. Comb. Theory. –v. 16. –1974. –p. 197–214.

[5]Knill O. *Counting rooted forests in a network* // arXiv:1307.3810.

[6]Chebotarev, P. *Spanning forests and the golden ratio* // Discrete Appl. Math. –v. 156, №5. –2008. –p. 813–821.

[7]Baker, M. *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph* / M. Baker, S. Norine. // Adv. Math. –v. 215, №2. –2007. –p. 766–788.

[8]Bak, P. *Self-organized criticality* / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. // Physical Review A. –v. 38. –1988. –p. 364–374.

[9]Dhar, D. *Self-organized critical state of sandpile automaton models* // Phys. Rev. Lett. –v. 64. –1990. –p. 1613–1616.

[10]Bacher, R. *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph* / R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda. // Bull. Soc. Math. France. –v. 125, №2. –1997. —p. 167–198.

[11]Biggs, N. L. *Chip-firing and the critical group of a graph* // J. Algebraic Combin. –v. 9. –1999. –p. 25–45.

Для таких дискретных структур, как графы, этот инвариант представляет интерес, поскольку порядок критической группы равен числу остовных деревьев в графе.[10] Поэтому нахождение структуры критической группы является основной задачей при исследовании этого инварианта. В то же время структура известна только в некоторых специальных случаях.[11,12,13,14]

Вопросы о точной аналитической формуле числа корневых остовных лесов и структуре критических групп для множества семейств графов остаются открытыми. Исследованию этих вопросов для обширного семейства циркулянтных графов и их обобщений посвящена настоящая диссертация.

Цели и задачи.

1. Нахождение аналитической формы для числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях;

2. Изучение арифметических и асимптотических свойств числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях;

3. Изучение структуры критической группы конуса над циркулянтным графом.

Научная новизна. В данной работе разработаны уникальные аналитические формулы для определения числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и их расслоениях. Это позволило детальнее изучить теоретико-числовые и асимптотические свойства этих структур. Введение нового понятия лесной группы графа способствовало разработке и формулировке структурных теорем для критических групп циркулянтных графов.

[12] Cori, R. *On the sandpile group of dual graphs* / R. Cori, D. Rossin. // European J. Combin. –v. 21, Issue 4. –2000. –p. 447–459.

[13] Lorenzini, D. *Smith normal form and Laplacians* // J. Combin. Theory Ser. –v. 98, Issue 6. –2008. –p. 1271–1300.

[14] Jacobson, B. *Critical groups for complete multipartite graphs and Cartesian products of complete graphs* / B. Jacobson, A. Niedermaier, V. Reiner. // Graph Theory. –v. 44, Issue 3. –2003. –p. 231–250.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международной научной студенческой конференции (МНСК) (Новосибирск, апрель 2019-2021 г.); международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» (Москва, апрель 2021 г.); четырнадцатом международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, июнь 2022 г.); the 9th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics (Китай, август 2023 г.); международной научной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, август 2023 г.).

Результаты были представлены на международном семинаре «Knots and representation theory» под руководством В. О. Мантурова, И. М. Никонова и С. Кима (Москва, август 2023 г.); научно-исследовательском семинаре по дискретной геометрии и геометрии чисел под руководством профессоров Н. П. Долбилина, Н. Г. Мощевитина, М. Д. Ковалева и И. Х. Сабитова (Москва, апрель 2024 г.).

Результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинарах ИМ СО РАН «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И. А. Тайманова, на семинаре «Теория графов» под руководством Е. В. Константиновой и А. А. Добрынина и на семинаре «Геометрическая теория функций» под руководством А. Д. Медных, член-корр. А. Ю. Веснина и В. В. Асеева.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации были опубликованы в работах [1, 2, 3, 4, 5]. Реферируемые журналы из списка ВАК [4, 5]. Индексируются в базах Scopus и Web of Science [1, 2, 3, 4].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц. Список литературы содержит 72 наименования.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Александру Дмитриевичу Медных, за всестороннюю поддержку, регулярную помощь, кон-

сультации и советы в ходе выполнения работы. Также автор благодарен кандидату физико-математических наук Илье Александровичу Медных за плодотворное сотрудничество, постоянные консультации и дискуссионные встречи. Автор признателен всем сотрудникам лаборатории теории функций Института математики Сибирского отделения Российской академии наук за дружескую атмосферу и полученные знания.

Методы исследований. В исследовании числа корневых остовных лесов были использованы элементы теории результантов, что позволило выразить это число в терминах многочленов Чебышёва. Анализ корней многочлена Лорана с целыми коэффициентами был применен для исследования асимптотического поведения числа корневых остовных лесов. В результате было установлено, что это число асимптотически выражается через меру Малера при стремлении числа вершин графа к бесконечности.

Для изучения структуры критической группы применялись методы теории чисел, которые показали, что для получения необходимых результатов достаточно вычислить нормальную форму Смита для матрицы фиксированного размера, что упрощает задачу по сравнению с вычислением нормальной формы Смита для матрицы, размер которой неограниченно растет.

Основные результаты диссертации.

1. Установлено, что число корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях эффективно выражается через многочлены Чебышёва первого рода;

2. Изучены арифметические свойства, показывающие, что число корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях может быть представлено в виде квадрата целочисленной последовательности, умноженной на заданную константу, не зависящую от числа вершин в графах;

3. Изучены асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях. Показано, что при стремлении числа вершин к бесконечности, число корневых остов-

ных лесов асимптотически выражается через меру Малера сопровождающего многочлена Лорана;

4. Установлена взаимосвязь между числом корневых остовных лесов и числом остовных деревьев в конусе над графом. В результате найдена структура критической группы конуса над графом.

Положения, выносимые на защиту, могут быть полезны специалистам в области комплексного, действительного и функционального анализа, а также специалистам по теории графов.

Краткое содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность исследуемой темы, предоставляется обзор литературы и кратко излагаются основные результаты работы.

Первая глава посвящена аспектам спектральной теории графов. **В пунктах 1.1 и 1.3** анализируются ключевые спектральные инварианты, а **в пункте 1.5** подробно изучаются спектральные свойства циркулянтных графов. Понятие критической группы графа вводится и рассматривается **в пункте 1.4.** Понятие циркулянтного расслоения исследуется **в пункте 1.2.**

Рассмотрим неориентированный граф G на n вершинах без петель, допускающий кратные ребра. *Остовным лесом* в G называется ацикличный подграф, включающий все вершины G, связные компоненты которого являются *деревьями. Корневой остовный лес* определяется выбором корня для каждого дерева. Лес, состоящий из одного дерева, называется корневым остовным деревом, а лес из k деревьев называется k*-лесом.*

Обсуждаемый **в пункте 1.3** факт, следующий из теоремы Кельманса-Челнокова [4], позволяет выразить число корневых остовных лесов как определитель матрицы $I_n + L(G)$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Вторая глава посвящена рассмотрению двух инвариантов: число остовных деревьев и число корневых остовных лесов. Они играют ключевую роль в анализе свойств графов и могут быть вычислены с использованием спектральных характеристик матрицы Лапласа графа.

В данной главе будут изложены теоремы о представлении числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной и нечётной степенью вершин, а также теоремы, описывающие их теоретико-числовые и асимптотические свойства.

Циркулянтные графы $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах с параметрами $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ представляют собой одно из самых обширных и разнообразных семейств графов. В их число входят множество известных типов, таких как полный граф, граф-цикл, лестница Мёбиуса, граф-призма, граф-антипризма и другие.

Циркулянтный граф с параметром $s_k < \frac{n}{2}$, представляет собой граф, все вершины которого имеют чётную степень, равную $2k$.

В первом параграфе представлено исследование числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин.

Теорема 1.1. *Пусть* $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k < \frac{n}{2}$. *Тогда число* $f(G)$ *корневых остовных лесов в графе* G *задается формулой*

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где w_p, $p = 1, 2, \ldots, s_k$ *— корни алгебраического уравнения*

$$\sum_{j=1}^{k} (2T_{s_j}(w) - 2) = 1,$$

а $T_s(w)$ *— многочлен Чебышёва 1-го рода.*

В представленной теореме показано, что число корневых остовных лесов эффективно выражается через многочлены Чебышёва первого рода. Также стоит заметить, что количество вершин в графе не влияет на сложность вычислений, так как она определяется числом скачков, фиксированной характеристикой для каждого анализируемого графа. Это отражено в алгебраическом уравнении, корни которого определяют число корневых остовных лесов. Данная теорема обеспечивает основу для исследования теоретико-числовых свойств числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах, результаты которых представлены **в пункте 1.1**.

Теорема 2.1. *Пусть* $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_k < \frac{n}{2}$. *Обозначим через* p *количество нечётных элементов в последовательности* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. *Пусть* q *будет свободной от квадратов частью числа* $4p+1$. *Тогда существует целочисленная последовательность* $a(n)$ *такая, что*

1. $f(G) = a(n)^2$, *если* n *нечётное;*

2. $f(G) = q\, a(n)^2$, *если* n *чётное.*

В пункте 1.2 представлено асимптотическое свойство числа корневых остовных лесов при стремлении числа вершин в графе к бесконечности. Установлено, что оно асимптотически выражается через меру Малера фиксированного многочлена Лорана.

Теорема 3.1. *Число корневых остовных лесов* $f(G)$ *в циркулянтном графе* $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \frac{n}{2}$ *имеет следующую асимптотику*

$$f(G) \sim A^n, \text{ при } n \to \infty,$$

где $A = \exp(\int_0^1 \log(P(e^{2\pi i t}))dt)$ *— мера Малера многочлена Лорана*

$$P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Как видно, степень многочлена $P(z)$ зависит только от параметров s_i для $i = 1, \ldots, k$ в рассматриваемом циркулянтном графе, и поэтому он является фиксированным.

Параграф завершается **пунктом 1.3**, который посвящен конкретным примерам, демонстрирующим применение представленных результатов. В состав примеров входят граф-цикл $C_n(1)$, а также графы $C_n(1,2)$ и $C_n(1,3)$.

Во втором параграфе рассматривается другой вид циркулянтных графов $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, где последний параметр $s_k = \frac{n}{2}$, а остальные параметры удовлетворяют условиям $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$. В результате формируется циркулянтный граф с нечётной степенью вершин, равной $2k-1$.

Теорема 1.2. *Пусть* $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$. *Тогда число* $f(G)$ *корневых остовных лесов в графе* G *задается формулой*

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2)(2T_n(v_p) + 2),$$

где u_p *и* v_p, $p = 1, 2, \ldots, s_k$ *корни алгебраических уравнений* $Q(u) - 1 = 0$ *и* $Q(v) + 1 = 0$ *соответственно. Здесь* $Q(w) = 2k + 2 - 2\sum\limits_{i=1}^{k} T_{s_i}(w)$, *где* $T_k(w)$ *— многочлен Чебышёва первого рода.*

Этот результат качественно отличается от теоремы 1.1 первого параграфа. В данном случае, два фиксированных алгебраических уравнения определяют число корневых остовных лесов, что является следствием того, что собственные значения матрицы $I_n + L(G)$ разделяются на два класса в зависимости от чётности и нечётности индексации вершин в графе.

Теперь можно установить арифметические свойства числа корневых остовных лесов для циркулянтного графа с нечётной степенью вершин, следуя **пункту 2.1**, получен следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$. *Обозначим через* p *количество нечётных элементов в последовательности* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. *Пусть* q *будет свободной от квадратов частью числа* $4p+1$, *а* r *будет свободной от квадратов частью числа* $4p+3$. *Тогда существует целочисленная последовательность* $a(n)$ *такая, что*

1. $f(G) = q\, a(n)^2$, *если* n *чётное;*

2. $f(G) = r\, a(n)^2$, *если* n *нечётное.*

Сравнивая вышеуказанную теорему с теоремой 2.1 первого параграфа, можно подчеркнуть важные отличия между циркулянтными графами с чётными и нечётными степенями вершин, для последних, на что влияет нумерация вершин в графе.

Основные результаты второго параграфа завершаются теоремой об асимптотике числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин, представленной **в пункте 2.2.**

Теорема 3.2. *Число корневых остовных лесов $f(G)$ в циркулянтном графе $G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$ имеет следующую асимптотику*

$$f(G) \sim K^n, \text{ при } n \to \infty.$$

Здесь $K = \exp(\int\limits_0^1 \log(P^2(e^{2\pi i t}) - 1)dt)$ *— мера Малера многочлена Лорана* $P(z)^2 - 1$, *где* $P(z) = 2k + 2 - \sum\limits_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i})$.

В пункте 2.3 демонстрируется применение основных результатов второго параграфа на примере графа лестницы Мёбиуса.

В третьем параграфе исследуется число корневых остовных лесов для циркулянтного расслоения, что расширяет анализ из первого и второго параграфов. Циркулянтное расслоение включает графы, рассмотренные ранее, что позволяет применять разработанные для них методы. Это обеспечивает точное представление числа корневых остовных лесов, позволяет выявить его арифметические характеристики и описать асимптотическое поведение при увеличении структурной сложности расслоения.

Циркулянтным расслоением над графом H называется граф

$$H_n = H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m),$$

где каждый i-й слой представляет собой циркулянтный граф

$$G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i}), \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

при этом граф H выступает в роли базы расслоения. К числу известных примеров циркулянтных расслоений относятся *I-графы, Y-графы* и *H-графы, а также обобщенный граф Петерсена $GP(n, k)$, граф-сэндвич и дискретный тор $T_{n,m} = C_n(1) \times C_m(1)$.*

Для спектрального анализа циркулянтного расслоения удобно ввести обобщение понятия лапласиана. *Обобщенной матрицей Лапласа* графа G назовем матрицу $L(G, X)$ с набором переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Для циркулянтного расслоения набор переменных определяется как

$$x_i = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i}(z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}).$$

Пусть $Q(w) = \det(L(H, W))$, где $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, и каждая переменная w_i имеет вид

$$w_i = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} 2\,T_{s_{i,j}}(w),$$

где $T_k(w) = \cos(k \arccos w)$ — многочлен Чебышёва первого рода.

Теорема 1.3 *Число корневых остовных лесов $f(n)$ в циркулянтном расслоении H_n над графом H задается формулой*

$$f(n) = \eta^n \prod_{p=1}^{s} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \ldots + s_{m,k_m}$, w_p, $p = 1, 2, \ldots, s$ являются всеми корнями уравнения $Q(w) = 0$ и η, с точностью до знака, старший коэффициент многочлена $P(z) = \det(L(H,\, X))$.

Результат этой теоремы показывает, что усложнение структуры циркулянтного графа (то есть его циркулянтное расслоение) не влияет на его спектральную структуру. Формула для вычисления числа корневых остовных лесов остается аналогичной, лишь усложняются промежуточные вычисления.

В пункте 3.1, арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении демонстрируют, как геометрические конструкции циркулянтных расслоений выражаются в теоретико-числовом аспекте.

Теорема 2.3 *Пусть $f(n)$ — число корневых остовных лесов в графе H_n.*

Пусть q будет свободной от квадратов частью числа $Q(-1)$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(n) = f(H)\,a(n)^2$, *если n нечётное;*

2. $f(n) = q\,f(H)\,a(n)^2$, *если n чётное.*

Эта теорема показывает, что число корневых остовных лесов в базе расслоения проявляется как целочисленный множитель, умноженный на квадрат некоторой целочисленной последовательности.

В пункте 3.2 асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении, аналогично теоремам из предыдущих параграфов, показывает, что при стремлении числа вершин к бесконечности, число корневых остовных лесов выражается через меру Малера, в данном случае, многочлена $Q(w)$.

Теорема 3.3 *Число корневых остовных лесов $f(n)$ в графе H_n имеет следующую асимптотику*

$$f(n) \sim A^n, \ \ \textit{при} \ \ n \to \infty.$$

Здесь $A = \exp(\int\limits_0^1 \log|Q\,(\cos 2\pi t)\,|dt)$ *— мера Малера многочлена $Q(w)$.*

Основные результаты третьей главы построены вокруг связного, неориентированного графа-конуса $\hat{G}$, основанием которого служит произвольный граф G.

Эта глава посвящена инварианту, известному под различными названиями: критическая группа, песочная группа, якобиан, группа Пикара или долларовая группа. Разнообразие терминов объясняется различными областями их возникновения. Например, термин «якобиан» возник как дискретный аналог классического понятия из теории римановых поверхностей[3]. В данной работе используется термин *критическая группа*. Из классического определения группы следует, что ее порядок равен числу остовных деревьев в графе.

В первом параграфе было получено новое доказательство теоремы, которая была известна ранее[15], для графа-конуса с произвольным основанием, устанавливающая связь между числом остовных деревьев в конусе и числом корневых остовных лесов в его основании.

Теорема 1.1 *Число остовных деревьев $\tau(\hat{G})$ в графе $\hat{G}$, который является конусом над произвольным графом G, совпадает с числом корневых остовных лесов $f(G)$ в графе G.*

Эта взаимосвязь подтверждает существование специальной группы, наследующей структуру критической группы, но обобщающей ее функциональность, что подробно рассматривается в следующей теореме **третьего параграфа**.

Теорема 1.3 *Пусть G — связный граф на n вершинах. Тогда критическая группа конуса $\hat{G}$ над графом G изоморфна коядру линейного оператора $I_n + L(G)$, где $L(G)$ — матрица Лапласа графа G, а I_n — единичная матрица порядка n.*

Таким образом, критическая группа графа-конуса является обобщением классического понятия критической группы графа, с порядком, равным числу корневых остовных лесов в графе, служащим основанием этого конуса. Мы называем эту группу *лесной группой графа.*

Критическая группа конуса $\hat{G}$ над графом G изоморфна его лесной группе $F(G)$.

В исследовании структуры критической группы использовались методы теории чисел, благодаря которым было установлено, что для достижения требуемых результатов достаточно выполнить вычисление нормальной формы Смита для матрицы установленного размера, вместо обработки матрицы Лапласа с неограниченно возрастающими размерами. Этому аспекту посвящен **второй параграф** третьей главы.

Предложение 1.2 Пусть $P(z)$ — бимонический многочлен Лорана с целыми коэффициентами и $\mathcal{A}$ — сопровождающая матрица $P(z)$. Рассмот-

[15] Chebotarev, P. *Forest matrices around the Laplacian matrix* / P. Chebotarev, R. Agaev. // Linear Algebra Appl. –v. 356, Issue 1-3. -2002. –p. 253-274.

рим $L = P(T_n) : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ как $\mathbb{Z}$-линейный оператор. Тогда

$$\operatorname{coker} L \cong \operatorname{coker}(\mathcal{A}^n - I).$$

Этот результат обеспечивает возможность определения структуры лесной группы для графа-конуса, основанных на циркулянтных графах, что подробно разъяснено в заключительном **четвертом параграфе** третьей главы.

Основные выводы этой части представлены в следующих двух теоремах из **пунктов 4.1 и 4.2** соответственно.

Теорема 1.4 *Пусть $\hat{G}$ — конус над циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, где $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \frac{n}{2}$. Тогда*

$$Jac(\hat{G}) \cong coker(\mathcal{A}^n - I),$$

где $\mathcal{A}$ — сопровождающая матрица многочлена Лорана

$$2k + 1 - \sum_{l=1}^{k}(z^{s_l} + z^{-s_l}).$$

Теорема 2.4 *Пусть $\hat{G}$ — конус над циркулянтным графом*

$$G = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n),\ 1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n.$$

Тогда

$$Jac(\hat{G}) \cong coker(\mathcal{A}^n - (2k+2)I + \sum_{j=1}^{k}(\mathcal{A}^{s_j} + \mathcal{A}^{-s_j})),$$

где $\mathcal{A}$ — сопровождающаяя матрица многочлена Лорана

$$(2k + 2 - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}))^2 - 1.$$

Дополнительно анализируется особый случай графа-сэндвича, известного также как *обобщенная призма* или *кобордизм циркулянтных гра-*

фов. Структурная теорема лесной группы для этого случая представлена в **пункте 4.3**.

Теорема 3.4 *Пусть* $\hat{G}$ *— конус над кобордизмом* G*. Тогда* $Jac(\hat{G})$ *изоморфна коядру линейного оператора* $\mathcal{A}^n - I$*, где* $\mathcal{A}$ *— сопровождающаяя матрица многочлена Лорана*

$$(2k + 2 - \sum_{r=1}^{k}(z^{s_{1,r}} + z^{-s_{1,r}}))(2l + 2 - \sum_{r=1}^{l}(z^{s_{2,r}} + z^{-s_{2,r}})) - 1.$$

Третья глава завершается **пунктом 4.4**, в котором продемонстрировано применение результатов этой главы к конкретным примерам известных графов, входящих в рассматриваемые семейства. В них входят: *граф-колесо* $W(n)$*, конус над лестницей Мёбиуса* $\hat{M}(n)$ *и конус над призмой* $\hat{Pr}(n)$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Grunwald, L. A. The number of rooted forests in circulant graphs / L. A. Grunwald, I. A. Mednykh. // Ars Math. Contemp. –2022. –v. 22, №4.

[2] Grunwald, L. A. Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph / L. A. Grunwald, Young Soo Kwon, I. A. Mednykh. // Tohoku Math. J. –2022. –v. 74, №4. –p. 535–548.

[3] Counting rooted spanning forests in cobordism of two circulant graphs / N. V. Abrosimov, G. A. Baigonakova, L. A. Grunwald, I. A. Mednykh. // Sib. Elektron. Mat. Izv. –2020. –v. 17. –p. 814–823.

[4] Grunwald, L. A. On the Jacobian group of a cone over a circulant graph / L. A. Grunwald, I. A. Mednykh. // Mat. Zametki Sev. Vost. federal. Univ. –2021. –v. 28, №2. –p. 88–101.

[5] Grunwald, L. A. Spectral Invariants of Graphs and Their Applications to Combinatorics / L. A. Grunwald, A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. // H. Omsk Univ. –2023. –v. 28, №5. –p. 13–25.