На правах рукописи

Намсараева Гэрэлма Владимировна

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1.1.2. – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2025

Работа выполнена на кафедре Математики им. Ц. Б. Шойнжурова в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления".

Научный руководитель:
Кожанов Александр Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Имомназаров Холматжон Худайназарович,
доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией вычислительных задач геофизики.

Пятков Сергей Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования ”Югорский государственный университет”, профессор инженерной школы цифровых технологий.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Челябинский государственный университет".

Защита диссертации состоится **«08» апреля 2025 года** в **16:00** на заседании диссертационного совета **24.1.074.03** при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН https://math.nsc.ru.
Автореферат разослан «28» февраля 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.074.03,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости линейных обратных задач для некоторых неклассических дифференциальных уравнений с частными производными. Предметом изучения являются уравнения соболевского типа, к которым можно отнести псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения, возникающие в задачах физики и других областях. Псевдопараболические уравнения возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов фильтрации, волновых процессов и многих других[1]. Псевдогиперболические уравнения используются в теории нестационарного течения вязкого газа, при конвективной диффузии солей в пористой среде, распространении начальных уплотнений в вязком газе[2,3]. Уравнение распространения продольных волн (или уравнение Буссинеска) возникает в теории длинных волн, в физике плазмы, в задачах гидродинамики[4].

Прямые задачи для таких уравнений исследовались в многочисленных работах, из которых отметим работы Р.Е. Шоуолтера, С.Г. Россби, С.Л. Соболева, С.А. Гальперна и др. Имеется целый ряд монографий и обзорных статей, где излагается современное состояние теории таких уравнений и приведена подробная библиография (см., например, работы[5,6,7,8,9]). В основном для различных классов уравнений соболевского типа изучались вопросы разрешимости, асимптотического поведения и разрушения решений, указаны многочисленные приложения теории этих уравнений.

Теория обратных задач интенсивно развивается и постоянно расширяет области своего применения. Огромное количество работ российских и зарубежных авторов посвящено обратным задачам для классических дифференциальных уравнений с частными производными. В этом направлении важно отметить исследования А.С. Алексеева, Ю.Е. Аниконова, Ю.Я. Белова, А.М. Денисова, Н.И. Иванчова, С.И. Кабанихина, А.И. Кожанова, М.М. Лаврентьева, А.И. Прилепко, С.Г. Пяткова, В.Г. Романова, А.Н. Тихонова, A. Lorenzi, A. Hasanov, D. Lesnic и других.

Вопросы разрешимости обратных задач для уравнений параболического типа рассматривались в работах А.И. Прилепко, Н.И. Иванчова, А.И. Кожанова,

---

[1] Баренблатт Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 25, вып. 5. – С. 852-864.

[2] Икези Х. Экспериментальное исследование солитонов в плазме // Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – С. 163-184.

[3] Лонгрен К. Экспериментальные исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией // Солитоны в действии / Под. ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. – М.: Мир, 1981. – С. 138-162.

[4] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 638 с.

[5] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Б.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

[6] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 456 с.

[7] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov – Utrecht: VSP, 1999. – 171 p.

[8] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk , V.E. Fedorov - Utrecht: VSP, 2003. - 226 p.

[9] Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. - Marcel Dekker, Inc., New-York, 1999. - 336 p.

Ю.Я. Белова, Ю.Е. Аниконова, В.Л. Камынина, M. Yamamoto, М.В. Клибанова, В.М. Исакова, В.В. Васина, A. Lorenzi, С.Г. Пяткова, С.И. Кабанихина, А.Б. Костина и многих других.

Обратные задачи для уравнений соболевского типа недостаточно исследованы и им посвящено небольшое количество работ. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений начали изучаться в работе W. Rundell[10] в 1980 году. W. Rundell методом полугрупп исследовал обратную задачу восстановления правой части в многомерном псевдопараболическом уравнении. Другие задачи исследовались в работах А.И. Кожанова[11], В.Е. Федорова[12], С.Г. Пяткова, С.Н. Шергина[13], А.Ш. Любановой[14], А.А. Асанова[15], Э.Р. Атаманова, М. Ш. Мамаюсупова[16], Б.С. Аблабекова[17], A. Lorenzi, E. Paparoni[18]. В работах А.Ш. Любановой исследуются обратные задачи нахождения, помимо решения, старшего коэффициента, зависящего от времени, в псевдопараболическом уравнении, доказана локальная теорема существования и единственности сильного решения, а также установлен ряд свойств решений обратных задач этого типа. В.Е. Федоров, А.В. Уразаева в обратных задачах для псевдопараболического уравнения восстанавливали элемент банахова пространства по интегральному условию переопределения с использованием метода полугрупп операторов. С.Г. Пятков , С.Н. Шергин изучали обратные задачи идентификации правой части соболевского уравнения с точечными условиями переопределения в многомерной области. В работах А.А. Асанова, A. Lorenzi, E. Paparoni исследуются задачи восстановления ядра в интегральном члене уравнения типа Соболева по заданному функционалу от решения. Отметим, что в работах А.И. Кожанова и его учеников методом регуляризации и продолжения по параметру были исследованы как линейные, так и нелинейные обратные задачи для уравнений соболевского типа с различными типами условий переопределения. В работе Б.С. Аблабекова исследован ряд коэффициентных обратных задач для уравнений псевдопараболического типа, где использовался метод полуобращения и уравнения сводились к уравнению Вольтера II рода.

Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений изучались в работах A. Lorenzi, E. Paparoni, Б.С. Аблабекова, А.Р. Асанова, А.К. Курманбае-

---

[10] Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data /W. Rundell // Appl. Anal. – 1980. – V. 10. – P. 231–242.

[11] Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа / А.И. Кожанов // Вестник Южно-Уральского гос. университета. – 2008. – Вып.1. – С. 27-36.

[12] Fedorov V.E., Urazaeva A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equations /V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva// J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2004. – V.12, № 4. – P.387-395.

[13] Шергин С.Н., Пятков С.Г. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. –2014. – Т.21, № 2. – С. 106–130.

[14] Любанова А.Ш. Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации / А.Ш. Любанова // Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54. – № 6. – С. 1315-–1330.

[15] Асанов А.А., Атаманов Э.Р. Обратная задача для операторного интегродифференциального псевдопараболического уравнения / А.А. Асанов, Э.Р. Атаманов // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36,– №4. – С. 752–762.

[16] Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений / Э.Р. Атаманов, М.Ш. Мамаюсупов. – Фрунзе: Илим. – 1990. – 124 с.

[17] Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка / Б.С. Аблабеков. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 300 с.

[18] Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudoparabolic integrodifferential operator equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 1997. – V. 5. – P. 235–253.

вой, А.М. Гулиевой. Для уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява) разрешимость некоторых линейных и нелинейных обратных задач ранее изучалась в работах Я.Т. Мегралиева[19,20] и его учеников.

В теории обратных коэффициентных задач А.И. Кожанов[21] выделяет два направления: в теории обратных задач пространственного типа предполагают, что неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от пространственных переменных; второе направление связано с ситуацией, в которой неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от временной переменной, данное направление называется теорией обратных задач временного типа.

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного и временного типа посвящены все вышеперечисленные работы. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для дифференциальных уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа. Так, Е.Г. Саватеев[22], И.В. Фроленков и Е.Н. Кригер[23], D. Lesnic[24] изучали задачи, в которых неизвестный коэффициент содержит компоненты, зависящие от всех переменных, входящих в уравнение. Такие обратные задачи мы называем задачами комбинированного типа.

В диссертации также изучаются обратные задачи для параболических уравнений комбинированного типа, в которых неизвестная правая часть содержит компоненты, зависящие от пространственной и от временной переменных.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопросов разрешимости (существования и единственности решения) линейных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Переход от обратных задач для псевдопараболических и пседогиперболических уравнений к нелокальным задачам. Доказательство теорем разрешимости новых нелокальных и обратных задач для уравнений соболевского типа.

2. Доказательство теорем существования и единственности решений обратных задач для псевдопараболических и пседогиперболических уравнений, уравнений Буссинеска - Лява и вспомогательных задач для нагруженных уравнений и уравнений составного типа.

Методология и методы исследования. В диссертации при доказательстве теорем разрешимости обратных задач используются различные техники редукции поставленных задач к вспомогательным прямым задачам для урав-

---

[19]Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява с дополнительным интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Сиб. журн. индустр. мат. – 2013. – Т. 16. – №1. – С. 75-83.

[20]Мегралиев Я.Т. Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев, Ф.Х. Ализаде // Чебышевский сборник – 2013. – Т. 14. – Вып. 4. – С. 167-179.

[21]Кожанов А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении / А.И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т.23. – №4. – С. 31–45.

[22]Саватеев Е.Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения / Е.Г. Саватеев // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 177–185.

[23]Фроленков И.В., Кригер Е.Н. Об одной задаче идентификации функции источника специального вида для многомерного параболического уравнения с данными Коши // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2013. – Т. 6. – № 2. – С. 186–199.

[24]Lesnic D. Inverse problems with applications in science and engineering // Taylor and Francis Group, LLC, 2022. – 359 p.

нений соболевского типа. В этой процедуре необходимую помощь оказывают условия переопределения. В результате подобного перехода получаем либо новые краевые задачи для "нагруженного" уравнения, либо нелокальные краевые задачи для соответствующего дифференциального уравнения. Другая техника предполагает переход от обратной задачи к прямой краевой задаче для уравнения составного типа.

При доказательстве теорем используются методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа, основанные на априорных оценках, методе регуляризации и методе продолжения по параметру. Для рассмотренных обратных задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. В качестве функциональных пространств используются пространства А. Лебега и С.Л. Соболева.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказано существование и единственность регулярных решений обратных задач нахождения вместе с решением псевдопараболических уравнений неизвестного коэффициента в правой части в случае интегрального или граничного переопределения.

2. Доказана разрешимость линейных обратных задач с интегральным и граничным условием переопределения для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

3. Доказана разрешимость линейных обратных задач с интегральным и граничным условием переопределения для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной.

4. Доказана разрешимость начально-краевых задач с нелокальными краевыми условиями для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений.

5. Доказана разрешимость линейных обратных задач с интегральным переопределением для соболевских уравнений высокого порядка.

Все основные результаты работы являются новыми.

Положения, выносимые на защиту.

1. Исследованы новые линейные обратные задачи для псевдопараболических уравнений с одним и двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие новые нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдопараболических уравнений;

2. Исследованы новые линейные обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной. Для этих задач построены соответствующие новые нелокальные задачи, сформулированы и доказаны теоремы разрешимости обратных и нелокальных задач для псевдогиперболических уравнений;

3. Получены условия однозначной разрешимости новых линейных обратных задач для параболических уравнений с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида. При этом обратная задача сведена к начально-краевой задаче для псевдопараболического уравнения, которая также была исследована;

4. Исследованы вопросы разрешимости линейных обратных задач для уравнения Буссинеска-Лява временного и пространственного типов в одномерном случае. При этом применялись точечные и интегральные условия переопределения;

5. Исследованы вопросы разрешимости обратных задач для уравнений соболевского типа высокого порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной в многомерном случае. Использовались условия переопределения интегрального вида. В специальном случае эти задачи были сведены к уравнению распространения продольных волн (Буссинеска-Лява) и также получены условия их разрешимости;

6. Исследованы вопросы разрешимости новых обратных задач для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной, в многомерном случае. Использовались финальные условия переопределения.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в теорию дифференциальных уравнений, особенно в теорию обратных задач для неклассических дифференциальных уравнений, поскольку обобщают ряд исследований для более общих уравнений соболевского типа.

Значение работы также может быть определено прикладной значимостью исследованных обратных задач при использовании теоретических результатов для численного изучения асимптотических свойств решений соболевских уравнений и разработки численных алгоритмов для исследования устойчивости.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов теории обратных задач математической физики, а также апробацией результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научном семинаре "Обратные задачи" в Институте математики и фундаментальной информатики СФУ под руководством доктора физ.-мат. наук Ю.Я. Белова (г. Красноярск), на семинарах по неклассическим дифференциальным уравнениям Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством доктора физ.-мат. наук А.И. Кожанова (г. Новосибирск, 2013 – 2024 гг.), на семинаре молодых ученых в рамках V Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование", 19-28 июня 2014 г. "Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа", на Всероссийском научном семинаре "Неклассические задачи математической физики" (г. Якутск, 2022 г.), а также на следующих научных конференциях: Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (г. Новосибирск, 2013 г.); Международной научной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева "Методы создания, исследования и идентификации математических моделей" (г. Новосибирск, 2013 г.); V международной молодежной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (г. Новосибирск, 2013 г.); VII Международной конференции по математическому моделированию (г. Якутск, 2014 г.); V Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО14)" (Байкал, 2014 г.); Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения В.Н. Врагова "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование" (г. Улан-Удэ, 2015 г.); Международной научной конференции "Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных", посвященной 100-летию А.В. Бицадзе (г. Москва, 2016 г.); Международной школе-конференции "Соболевские чтения" (г. Новосибирск, 2016 г.); VII Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование" (г. Улан-Удэ, 2020 г.); II Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование" (г. Улан-Удэ, 2022 г.); VIII Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование" (г. Улан-Удэ, 2023 г.); 6-ой Международной конференции "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2024) (г. Иркутск, 2024 г.).

Публикации. Список публикаций автора включает 14 публикаций [1–14], из которых 4 опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК или приравненных к ним, поскольку входят в издания, индексируемые международными реферативными базами данных и системами цитирования Web of Science и/или Scopus [1–4]. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1–7]. Список работ приведен в конце автореферата. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, принадлежащие непосредственно автору. Работы [2-4] написаны в соавторстве. Основной вклад в доказательство априорных оценок принадлежит автору, А.И. Кожанову принадлежат идеи постановок задач и решающий вклад при доказательстве теорем существования. В работах [1, 5, 6, 7] решающий вклад в доказательство основных результатов принадлежит автору.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 8 параграфов, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 132 наименования. Объем диссертации составляет 170 страниц.

Основное содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы, определены методы исследования, обоснована научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации, сформулированы положения, выносимые на защиту, описана степень достоверности и апробация полученных результатов, а также описана структура диссертации.

Первая глава включает в себя три параграфа. Основные результаты §1.1 и §1.2 данной главы опубликованы в [5], результаты §1.3 – в [4].

§1.1 посвящен вопросам разрешимости обратной задачи определения неизвестного коэффициента, зависящего от временной переменной, в линейном псевдопараболическом уравнении с граничными условиями переопределения.

Здесь и далее в одномерном случае рассматриваются задачи в прямоугольнике Q:

$$Q = \{(x,t) : x \in \Omega = (0,1), t \in (0,T), T < \infty\}.$$

Обратная задача 1.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{4}$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t)$ – заданные функции).

В результате некоторых построений получаем нелокальную задачу для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. С помощью решения этой задачи и будет построено решение исходной обратной задачи 1.1.

Пусть $b_i(x,t), i = 1,2,3,4,5, F_1(x,t)$ - заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}, \eta_j(t), \gamma_j(t), j = 1,2,3, \varphi_1(t), \psi_1(t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0,T]$.

Нелокальная задача 1.1: Найти функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$v_t - v_{xxt} + b_1(x,t)v + b_2(x,t)v_x + b_3(x,t)v_{xx} + \\ + b_4(x,t)u_x + b_5(x,t)u = F_1(x,t),$$

$$v = u_{xx},$$

а также условиям

$$-v_t(1,t) = \gamma_1(t)v(1,t) + \gamma_2(t)v_t(0,t) + \gamma_3(t)v(0,t) + \varphi_1(t), \;\; 0 < t < T,$$

$$-v_{xt}(0,t) = \eta_1(t)v_x(0,t) + \eta_2(t)v_t(0,t) + \eta_3(t)v(0,t) + \psi_1(t), \;\; 0 < t < T,$$

$$v(x,0) = 0, \;\; x \in \bar{\Omega},$$

$$u(1,t) = 0, \;\; u_x(0,t) = 0, \;\; 0 < t < T.$$

Определим для дальнейшего исследования пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2)dxdt < +\infty \right\}.$$

Положим

$$\bar{\gamma}_2 = \max_{0 \le t \le T} |\gamma_2(t)|, \;\; k_1 = 1 - \delta_1^2 \bar{\gamma}_2 \delta_2,$$

$$k_2 = 2 - \frac{\bar{\gamma}_2 \delta_2}{\delta_1^2} - \bar{\gamma}_2 \delta_1^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right), \;\; k_3 = 1 - \frac{\bar{\gamma}_2}{\delta_1^2}\left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right).$$

Числа δ_1 и δ_2 есть некоторые фиксированные положительные числа, величины которых будут уточнены при получении априорных оценок.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия

$$b_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = 1,2,3,4,5,$$

$$F_1(x,t) \in L_2(Q), \;\; \varphi_1(t) \in L_2([0,T]), \;\; \psi_1(t) \in L_2([0,T]),$$

$$\eta_2(t) \ge 0, \;\; t \in [0,T],$$

существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что

$$k_1 > 0, \;\; k_2 > 0, \;\; k_3 > 0.$$

Тогда нелокальная задача 1.1 имеет решение $u(x,t), v(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $v(x,t) \in V$.

Методом продолжения по параметру доказаны теоремы разрешимости нелокальной задачи 1.1 и редуцированной нелокальной задачи, установлена связь с исходной обратной задачей. Для этой задачи построена другая нелокальная задача для составного уравнения, доказаны теоремы разрешимости нелокальных и обратной задач.

В **§1.2** поставлена обратная задача для псевдопараболического уравнения с двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от временной переменной. При этом заданы граничные условия переопределения.

Обратная задача 1.2: найти функции $u(x,t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t), \qquad (5)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2), (3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \qquad (6)$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h_1(x,t), h_2(x,t)$ – заданные функции).

Для этой задачи также построены две различные нелокальные задачи, имеющие самостоятельное значение. Доказаны теоремы разрешимости нелокальной и исходной обратной задач.

§1.3 посвящен обратным задачам для параболического уравнения с неизвестным внешним воздействием комбинированного вида, т.е. правая часть уравнения содержит компоненты, зависящие от всех переменных, входящих в уравнение. Используются совокупности финального и интегрального условий переопределения, а также граничного и интегрального условий.

Обратная задача 1.3: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \qquad (7)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2), (3) и

$$u(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad (8)$$

$$\int_0^1 N(x)u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \qquad (9)$$

Обратная задача 1.4: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (7), при выполнении для функции $u(x,t)$ условия (3), а также условий

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \qquad (10)$$

$$\int_0^T R(t)u(x,t)dt = 0, \quad 0 < x < 1. \qquad (11)$$

$(f(x,t), \varphi(t), \psi(x), N(x), R(t)$ – заданные функции).

Поставленные задачи сводятся к прямым вспомогательным задачам для псевдопараболических уравнений. Получены условия существования и единственности решений поставленных и вспомогательных задач.

Вторая глава посвящена исследованию линейных обратных задач для псевдогиперболических уравнений. Результаты §2.1 включены в работы [7], результаты §2.2 опубликованы в [6], а §2.3 – в [1].

В **§2.1** поставлены две обратные задачи, в которых необходимо помимо неизвестной функции определить неизвестный коэффициент, зависящий от временной переменной. Для доказательства разрешимости первой задачи применяется техника сведения к нелокальной задаче, для другой - техника сведения к прямой задаче, которая заключается в повышении порядка исходного уравнения путем исключения неизвестного коэффициента в правой части. При этом получается уравнение составного типа.

Обратная задача 2.1: необходимо найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{12}$$

при выполнении для $u(x,t)$ условий (2) и условий

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{14}$$

Обратная задача 2.2: необходимо найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (12), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (13), (14), а также условия

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{15}$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t)$ – заданные функции).

Для обратной задачи 2.1 построена нелокальная задача, доказаны теоремы разрешимости нелокальной задачи и обратной задачи 2.1.

Для доказательства разрешимости обратной задачи 2.2 сформулирована теорема 2.4. Определим пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v^2 + v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2)dxdt < +\infty \right\},$$

норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_V = \left(\int\limits_Q (v^2 + v_t^2 + v_x^2 + v_{xxt}^2)dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем обозначения:

$$a_1(x,t) = c(x,t); \quad a_2(x,t) = a_x(x,t) - \frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \quad a_3(x,t) = a(x,t);$$

$$a_4(x,t) = \frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; \quad a_5(x,t) = c_x(x,t) - \frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \quad a_6(x,t) = -\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$f_2(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия

$$a_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = \overline{1,6}; \;\; f_2(x,t) \in L_2(Q); \tag{16}$$

$$a_6(x,t) = a_{6,1}(x,t) + a_{6,2}(x,t); \;\; \max_Q |a_{6,2}(x,t)| < 2; \tag{17}$$

$$h(x,t) \neq 0; \;\; a'_{6,1x}(x,t) \leq 0; \;\; a_{6,1}(1,t) \geq 0; \;\; t \in [0,T], \;\; x \in [0,1]. \tag{18}$$

Тогда обратная задача 2.2 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

§2.2 посвящен обратным задачам для уравнения Буссинеска-Лява с неизвестным коэффициентом, зависящим от временной переменной. Используются условия переопределения точечного и интегрального типов.

Обратная задача 2.3: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} + a(x,t)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{19}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) и условий

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{21}$$

Обратная задача 2.4: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (19), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (20), (21), а также условия

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{22}$$

Обратная задача 2.5: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (19), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) и (20), а также условия

$$\int\limits_0^1 K(x,t)u(x,t)dx = 0, \qquad 0 < t < T. \tag{23}$$

$(a(x,t), c(x,t), f(x,t), h(x,t), K(x,t)$ – заданные функции).

Для разрешимости обратной задачи 2.3 использовали технику приведения к нелокальной задаче. Получены условия существования регулярных решений этих задач.

§2.2.2 посвящен разрешимости обратной задачи 2.4. Введем обозначения:

$$a_1(x,t) = a_x(x,t) - \frac{a(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_2(x,t) = a(x,t); \qquad a_3(x,t) = \frac{h_x(x,t)}{h(x,t)};$$

$$a_4(x,t) = -\frac{h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_5(x,t) = c_x(x,t) - \frac{c(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}; \qquad a_6(x,t) = c(x,t);$$

$$f_1(x,t) = \frac{f_x(x,t)h(x,t) - f(x,t)h_x(x,t)}{h(x,t)}.$$

Определим пространство:

$$V = \left\{ v(x,t) : \int\limits_Q (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xx}^2 + v_{xxtt}^2)dxdt < \infty \right\}.$$

Пусть $\bar{a}_4 = \max\limits_{Q} |a_4(x,t)|$.

Теорема 2.8. Пусть выполняются условия

$$a_i(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; i = \overline{1,6}; \;\; f_1(x,t) \in L_2(Q); \tag{24}$$

$$h(x,t) \neq 0, \;\; (x,t) \in \bar{Q}; \tag{25}$$

$$a_{3x}(x,t) \leq 0, \;\; \bar{a}_4 < 1. \tag{26}$$

Тогда обратная задача 2.4 имеет решение $u(x,t)$, $q(t)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Теорема 2.8 доказана методом продолжения по параметру.

В **§2.2.3** изучена разрешимость обратной задачи 2.5. Доказательство теоремы разрешимости включает построение вспомогательной задачи, применяется метод продолжения по параметру. Доказывается разрешимость вспомогательной и обратной задач.

В третьем параграфе второй главы исследована разрешимость обратных задач для уравнения Буссинеска с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной.

Пусть α, β - положительные постоянные, $f(x,t), h(x,t), N(x,t)$ - заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}, t \in [0,T]$.

Обратная задача 2.6: найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxtt} = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{27}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) и условий

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{28}$$

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{29}$$

Обратная задача 2.7: найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (27), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (28) и (2), а также условия

$$\int\limits_0^T N(x,t)u(x,t)dt = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{30}$$

Для исследования разрешимости обратных задач применяется техника перехода к вспомогательным задачам для "нагруженных" интегро-дифференциальных уравнений. Сформулированы и доказаны теоремы разрешимости прямых и обратных задач.

Обозначим $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma^2$. Положим

$$m_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau}, \;\; \bar{m}_1 = \max_{\bar{Q}} |m_1(x,t)|.$$

Теорема 2.10. Пусть выполняются условия

$$h(x,t) \in C(\bar{Q}), \;\; f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$\int\limits_0^T \sin\gamma(T-\tau)h(x,\tau)d\tau \neq 0, x \in [0,1];$$

$$\alpha T^4 \overline{m_1}^{-2} < \beta^3.$$

Тогда обратная задача 2.6 имеет решение $u(x,t)$, $q(x)$ такое, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_2(Q)$.

Для исследования разрешимости обратной задачи 2.7 применялся тот же метод перехода к интегродифференциальному уравнению, что и для обратной задачи 2.6, а также несколько иной подход, основанный на сведении исходной обратной задачи к прямой задаче для "нагруженного" уравнения.

В **третьей главе** диссертации исследованы линейные обратные задачи для соболевских уравнений в многомерном случае. Результаты §3.1 включены в публикацию [2], а §3.2 – в [3].

В **§3.1** изучается разрешимость обратных задач для уравнений соболевского типа, более общих, чем уравнение распространения продольных волн (уравнение Буссинеска) высокого порядка. В качестве условия переопределения в изучаемых задачах используется условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q, p — натуральное число, $f_0(x,t)$, $h_0(x,t)$, $N(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Через D_t^k, $k = 1,2,\dots$, будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, через B — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij}(x)v_{x_j}\right) + b_0(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n). Наконец, для натурального числа p через L обозначим дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = D_t^{2p}(v - \Delta v) + Bv$$

(Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным).

Обратная задача 3.1: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$Lu = f_0(x,t) + q(t)h_0(x,t), \tag{31}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{32}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0,\dots,2p-1, \tag{33}$$

$$\int\limits_\Omega N(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T. \tag{34}$$

Обратная задача 3.2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (31), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (32) и (34), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1, \tag{35}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1. \tag{36}$$

Через V_1 обозначим банахово пространство функций $v(x,t)$

$$V_1 = \{v(x,t) : \ D_t^k v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \ k = 0, 1, \dots, 2p\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \sum_{k=0}^{2p} \|D_t^k v\|_{L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))}.$$

Введем обозначение:

$$N_1 = \int\limits_\Omega [\Delta N(x)]^2 \, dx \max_{0 \le t \le T} \left(\int\limits_\Omega h_1^2(x,t)\, dx \right).$$

Для функций $v(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega v^2(x)\, dx \le d_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i}^2(x)\, dx,$$

число d_0 в котором определяется лишь областью Ω.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия

$$b^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1, \dots, n, \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \tag{37}$$

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_0(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)); \tag{38}$$

$$N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma; \tag{39}$$

$$|\psi(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{40}$$

$$N_1 < \left(1 + \frac{1}{d_0}\right)^2. \tag{41}$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ обратная задача 3.1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

В **§3.1.2** получены условия разрешимости обратной задачи 3.2.

В **§3.1.3** исследована разрешимость обратных задач 3.1 и 3.2, а также некоторых новых задач для уравнения (31) в случае $Bu = \beta_0 \Delta u + \beta_1 u$ ($\beta_i = const$). Уравнение (31) в этом специальном случае можно назвать непосредственным аналогом уравнения распространения продольных волн (уравнения Буссинеска–Лява).

Обратная задача 3.3: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (31), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (32) и (34), а также условий

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p, \tag{42}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Обратная задача 3.4: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (31), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (32), (34) и (42), а также условия

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = p+1, \dots, 2p-1.$$

Обратные задачи 3.3 и 3.4 исходят в своих постановках из квазигиперболичности оператора L. Специальный вид оператора B позволит получить как теоремы существования, подобные теоремам 3.1 и 3.2, так и новые теоремы, причем новые теоремы существования получены и для обратных задач 3.1 и 3.2.

Положим

$$\gamma_0(T) = \left(\frac{\pi T^2}{8}\right)^{p-1}, \quad \gamma_1(T) = \frac{2|\beta_0| T^{\frac{3}{2}} \gamma_0(T)}{2p-1},$$

$$\gamma_2(T) = \sqrt{N_1} + \frac{2|\beta_1| T^{\frac{3}{2}} \gamma_0(T)}{2p-1} + \frac{2\sqrt{N_2} T^{\frac{3}{2}} \gamma_0(T)}{2p-1}.$$

Теорема 3.3. Пусть выполняется условие (40), а также условия

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma; \tag{43}$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)); \tag{44}$$

$$(-1)^p \beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p \beta_1 \leq 0; \tag{45}$$

$$T\gamma_1(T) < 1, \quad T\gamma_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\gamma_1(T)\right). \tag{46}$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ обратная задача 3.3 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Положим

$$\overline{\gamma}_0(T) = \left(\frac{T^2}{2}\right)^{p-1}, \quad \overline{\gamma}_1(T) = \frac{2|\beta_0| T^{\frac{3}{2}} \overline{\gamma}_0(T)}{2p-1},$$

$$\overline{\gamma}_2(T) = \sqrt{N_1} + \frac{2|\beta_1| T^{\frac{3}{2}} \overline{\gamma}_0(T)}{2p-1} + \frac{2\sqrt{N_2} T^{\frac{3}{2}} \overline{\gamma}_0(T)}{2p-1}.$$

Теорема 3.4. Пусть выполняется условие (40), а также условия

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad N(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma; \tag{47}$$

$$h_0(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)); \tag{48}$$

$$(-1)^p \beta_0 \geq 0, \quad (-1)^p \beta_1 \leq 0; \tag{49}$$

$$T\overline{\gamma}_1(T) < 1, \quad T\overline{\gamma}_2(T) < 1 + \frac{1}{d_0}\left(1 - T\overline{\gamma}_1(T)\right). \tag{50}$$

Тогда для любой функции $f_0(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ обратная задача 3.4 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

В **§3.2** рассмотрены линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа с неизвестным коэффициентом, зависящим от пространственной переменной.

Обратная задача 3.5: найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$\triangle u_t + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{51}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{52}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{53}$$

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{54}$$

Обратная задача 3.6: найти функции $u(x,t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$\triangle u_{tt} + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{55}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (52) — (54), а также условия

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{56}$$

Всюду ниже будем считать выполненным условие

$$h(x,t) \geq h_0 > 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{57}$$

Определим функции $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$ и $F(x,t,\xi,\eta)$ при $\xi = (\xi_1,..,\xi_n) \in R^n$, $(x,t) \in \bar{Q}$, $\eta \in R$:

$$h_1(x,t) = -\frac{h_t(x,t)}{h(x,t)},$$

$$h_2(x,t) = h_1(x,t)b_0(x) + \frac{1}{2}(b^{ij}(x)h_{1x_i}(x,t))_{x_j},$$

$$F(x,t,\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} h_{1x_i}(x,t)\xi_i\right)\eta + h_2(x,t)\eta^2.$$

Далее определим операторы C_1 и C_2:

$$C_1 = h_1(x,t)\Delta + B,$$

$$C_2 = -(h_1(x,t)B - h_{1t}(x,t)\Delta).$$

Теорема 3.9. Пусть выполняется условие (57), а также условия

$$\begin{gathered} b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad i,j = 1,..,n, \\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in R^n; \end{gathered} \tag{58}$$

$$b_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{59}$$

$$\begin{gathered} h(x,t) \in C^3(\bar{Q}), \quad h_1(x,t) \leq 0, \quad h_{1t}(x,t) \leq 0, \\ h_2(x,t) \geq 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q; \end{gathered} \tag{60}$$

$$F(x,t,\xi,\eta) \geq \gamma_0 \sum_{i=0}^{n} \xi_i^2, \quad \gamma_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \quad \xi \in R^n, \quad \eta \in R; \tag{61}$$

оператор C_1 эллиптичен при $(x,t) \in \bar{Q}$,
оператор C_2 эллиптико-параболичен в $\bar{Q}$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, обратная задача 3.5 имеет решение $\{u(x,t), q(x)\}$, для которого выполняются включения

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad k = 0,1,2, \quad q(x) \in L_2(Q).$$

Теорема доказана методом продолжения по параметру.

Для доказательства разрешимости обратной задачи 3.6 также сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения.

Заключение

В диссертации исследованы линейные обратные задачи для уравнений соболевского типа в банаховых пространствах. Для этих задач построены новые нелокальные задачи, либо краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения или уравнения составного типа, имеющие и самостоятельное значение. Доказаны теоремы о существовании и единственности регулярного решения обратных и вспомогательных задач. Достоинством методов, применяемых в диссертации, является их эффективность и возможность применения в более общих случаях. Результаты обобщены на различные классы обратных задач для соболевских уравнений: обратные задачи временного типа высокого порядка в многомерном случае; обратные задачи пространственного типа для различных классов уравнений соболевского типа в многомерном случае.

Область применения полученных результатов – обратные задачи для уравнений соболевского типа, теория нелокальных краевых задач, а также теория нагруженных уравнений. Полученные результаты позволят перейти к изучению новых обратных задач, обобщить и систематизировать исследования в данной области.

Благодарность. Соискатель выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Кожанову Александру Ивановичу за постановку задачи, а также поддержку и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Намсараева Г.В. Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн / Г.В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. матем. – 2016. –Т.19. – № 3. – С. 28-40.

2. Кожанов А.И., Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Челяб. физ.-мат. журн. – 2018. – Т.3. – Вып. 2. – С. 153–171.

3. Кожанов А.И., Намсараева Г.В. Уравнения соболевского типа с неизвестной правой частью / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2021. – № 4. – С. 34–47.

4. Кожанов А.И., Намсараева Г.В. Исследование разрешимости задач определения внешнего воздействия комбинированного типа в процессах, описываемых параболическими уравнениями / А.И. Кожанов, Г.В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. матем. – 2024. –Т.27. – № 2. – С. 66-79.

Другие публикации

5. Намсараева Г.В. О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений / Г.В. Намсараева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т.20. – № 2. – С. 111-137.

6. Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска / Г.В. Намсараева // Математические заметки СВФУ. –2014. – Т.21. – № 2. – С. 47-59.

7. Намсараева Г.В. Разрешимость обратных задач для некоторых псевдогиперболических уравнений / Г.В. Намсараева // Вестник ВСГУТУ. – 2014. – Т.50. – № 20. – С. 6-14.

8. Намсараева Г.В. Разрешимость обратных задач для некоторых классов псевдопараболических уравнений / Г.В. Намсараева // Методы создания, исследования и идентификации математических моделей. Международная научная конференция, посвященная 85-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева (Новосибирск, 10–13 окт. 2013 г.): Тез. докл. / Сибирское научное издательство. – Новосибирск, 2013. – С. 64-65.

9. Намсараева Г.В. Разрешимость обратной задачи для одного псевдогиперболического уравнения / Г.В. Намсараева // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы V Международной конференции / – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2014. – С. 229-235.

10. Намсараева Г.В. Об обратных задачах для некоторых дифференциальных уравнений / Г.В. Намсараева // VII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. / Под редакцией д.ф.-м.н. И.Е. Егорова, д.ф.-м.н. Ф.М. Федорова / ООО "Компания "Дани-Алмас". – Якутск, 2014. – С. 50-51.

11. Намсараева Г.В. Об одной обратной задаче для линейного псевдогиперболического уравнения / Г.В. Намсараева // Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа: материалы семинара молодых ученых в рамках V Международной конференции ”Математика, ее приложения и математическое образование”, 19-28 июня 2014 г. – Улан-Удэ: издательско-полиграфический комплекс ФГБОУ ВПО ВСГАКИ, 2014. – С. 86-90.

12. Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска / Г.В. Намсараева // Международная конференция ”Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”: Тезисы докладов / под ред. д. ф.-м.н. А.И. Кожанова, к. ф.-м. н. Б.Б. Ошорова – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. – С. 200-201.

13. Намсараева Г.В. О задаче восстановления граничных режимов для уравнения Буссинеска / Г.В. Намсараева // Соболевские чтения. Международная школа-конференция (Новосибирск, 18-22 декабря 2016 г.): Тез. докладов. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. – С. 126.

14. Намсараева Г.В. Обратные задачи для некоторых уравнений соболевского типа / Г.В. Намсараева // Международная конференция ”Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому: Тез. докл. [Электронный ресурс]. – Москва, 2022. – С. 266-267. URL: http://diffur.math.msu.su/petrovskii-120/