На правах рукописи

Артюшин Александр Николаевич

Метод априорных оценок для уравнений с дробными производными

Специальность 1.1.2
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет".

Научный руководитель:	**Кожанов Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ситник Сергей Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Белгородский государственный национальный исследовательский университет", профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
	Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Челябинский государственный университет", заведующий кафедрой математического анализа
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Иркутский государственный университет"

Защита состоится 08 апреля 2025 г. в 17:30 на заседании диссертационного совета 24.1.074.03 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан 28 февраля 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.074.03,
кандидат физико-математических
наук Скворцова М. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние годы наблюдается практически взрывной рост числа публикаций на тему дробных производных. С прикладной точки зрения дробные производные присутствуют во многих моделях физики, биологии, механики (см. работы А. М. Нахушева, В. В. Учайкина, Ю. А. Россихина, М. В. Шитиковой, F. Mainardi, R. Hilfer и др.). С теоретической точки зрения дробные производные представляют собой достаточно трудный математический объект со специфическими свойствами. В известных монографиях А. М. Нахушева, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева представлен, в основном, базовый технический аппарат работы с дробными производными и их основные свойства. Аналитические методы решения и анализа краевых задач представлены в книгах А. В. Псху, М. О. Мамчуева. Однако большое количество задач не поддается исследованию такими методами. К таким можно отнести задачи с переменными коэффициентами, коэффициентные и иные обратные задачи, задачи с нелинейными членами и др. Все они нуждаются в дальнейшем изучении.

Степень разработанности темы. Идея дифференцирования нецелого порядка связана с именами Г. Лейбница, Л. Эйлера, П. Лапласа, Ж. Фурье. Среди первых работ на тему дробного интегрирования и дифференцирования были работы Н. Абеля и Ж. Лиувилля, Б. Римана. Дальнейшее развитие теория получила в работах А. Грюнвальда, А. В. Летникова, Н. Я. Сонина, Г. Харди, Д. Литтлвуда, М. Рисса и др. Среди авторов последнего времени отметим М. В. Шитикову, А. В. Псху (с учениками), В. Е. Федорова (с учениками), М. В. Плеханову (с учениками), М. О. Мамчуева, С. М. Ситника, Э. Л. Шишкину, R. Zacher, M. Yamomoto, E. Bazhlekova и др.

Интегральные неравенства с дробными производными (и даже более общими сверточными интегралами) известны достаточно давно (O. Staffans, H. Engler, G. Gripenberg). Они с успехом применялись при исследовании различных моделей вязкоупругости. Впоследствии многократно переоткрывались разными авторами (А. А. Алиханов, М. И. Гомоюнов, А. Н. Артюшин и др). Эти неравенства (и их обобщения) лежат в основе метода априорных оценок.

Разрешимость задачи Коши (типа Коши) для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто хорошо известна (см. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, I. Podlubny, K. Diethelm, A. Kochubei, Y. Luchko). Для задач с липшицевой нелинейностью существует глобальное единственное решение. В случае монотонной нелинейности можно применять технику верхних и нижних решений (V. Lakshmikanthama, A.S. Vatsalab), а также интегральные неравенства (M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J-C. Yao). Вырождающиеся уравнения рассматривались только в ряде простых случаев. Вырождающиеся уравнения с монотонной нелинейностью, по-видимому, не рассматривались.

Уравнение дробной диффузии рассматривалось многими авторами. Построено фундаментальное решение задачи Коши (С. Д. Эйдельман, А. Н. Кочубей, А. В. Псху). Смешанная задача с различными краевыми условиями изучалась с использованием метода потенциалов (J. Kemppainen), построена функция Грина (А. В. Псху). Рассмотрено более общее уравнение континуального порядка (А. В. Псху), установлено свойство максимальной регулярности (R. Zacher), рассмотрены обобщенные решения (R. Zacher, M. Yamomoto) и решения в классе бесселевых потенциалов (А. О. Лопушанский). Установлены принцип максимума и принцип сравнения (Y. Luchko), рассматривалось уравнение с вырождением в нелинейности (R. Zacher). Наконец, рассматривалось уравнение дробной диффузии с переменным показателем производной (K. V. Bockstal). Уравнения с произвольным вырождающимся коэффициентом при дробной производной, по-видимому, не рассматривались.

Эллиптико-параболические вырождающиеся уравнения и корректные задачи для них имеют долгую историю. Отметим фундаментальную работу О. А. Олейник, Е. В. Радкевича[1]. В дальнейшем в работах С. А. Терсенова, Н. В. Кислова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова изучались так называемые параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Особо отметим работу С. Г. Пяткова[2]. Изучение корректных задач для уравнения смешанного типа в цилиндрической области берет начало с работ В. Н. Врагова и Г. Д. Каратопраклиева. Типичная корректная задача ставится с помощью функции Фикеры. Далее подобные задачи для уравнений второго и высокого порядка изучались в работах И. Е. Егорова, В. Е. Федорова, А. Н. Терехова, А. В. Чуешева, С. Н. Глазатова, С. Г. Пяткова. Уравнения с дробными производными и меняющимся направлением эволюции, по-видимому, не рассматривались.

Обратные задачи для уравнений с дробной производной изучались в работах M. Yamamoto, K. Sakamoto, K. V. Bockstal, J. Janno, Д. Г. Орловского, Ш. А. Алимова, Р. Р. Ашурова. Рассматривались коэффициентные обратные задачи, задача восстановления источника и задача определения показателя дробной производной (константы). Задача восстановления переменного показателя дробной производной не рассматривалась.

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование возможностей метода априорных оценок в приложении к сложным задачам с

[1] *Олейник, О. А.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки. 1971. С. 7—252. (Серия математика, Математический анализ).

[2] *Пятков, С. Г.* Краевые задачи для некоторых классов сингулярных параболических уравнений / С. Г. Пятков // Математические труды. 2004. Т. 14, № 3. С. 63—125.

дробными производными. Речь идет о переменных коэффициентах, вырождении и нелинейностях. В качестве задач для такого исследования были выбраны следующие.

1. Вырождающееся ОДУ с нелинейными монотонными членами произвольного роста.
2. Уравнение дробной диффузии с вырождением и сменой направления времени.
3. Дробно-волновое уравнение со сменой направления времени.
4. Обратная задача определения переменного показателя дробной производной в уравнении дробной диффузии.

Научная новизна:

1. Доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений для вырождающихся уравнений с произвольной монотонной нелинейностью. С учетом произвольного вырождения требование монотонности является необходимым, и, по сути дела, минимальным. Ранее подобные задачи в такой общности не рассматривались.
2. Для вырождающегося уравнения дробной диффузии доказано существование и единственность обобщенного решения задачи типа Коши. Для уравнения с меняющимся направлением времени указана корректная постановка задачи, доказана ее однозначная разрешимость. Ранее такие задачи не рассматривались.
3. Аналогичный результат был установлен для дробно-волнового уравнения с меняющимся направлением времени. Ранее такие задачи не рассматривались.
4. Доказана единственность решения обратной задачи определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии. Указан эффективный алгоритм поиска решения. Ранее рассматривалась лишь задача по определению постоянного показателя (константы). Случай переменного показателя производной ранее не рассматривался.

Таким образом, все результаты новые.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа посвящена приложению метода априорных оценок к уравнениям с дробными производными, в случаях с вырождением и нелинейностью. В этих случаях стандартные подходы, опирающиеся на идею разделения переменных, не работают. Предложен новый эффективный метод регуляризации дробной производной, а также ряд эффективных технических приемов получения априорных оценок. Эти идеи и инструменты дают возможность в дальнейшем изучать и другие сложные задачи с дробными производными.

Модели с дробными производными все чаще используются в прикладных задачах. Так что задача определения порядка дробной производной в уравнении диффузии безусловно имеет практический интерес. В работе предложен эффективный алгоритм решения этой задачи, который может быть реализован на ЭВМ.

Методология и методы исследования. Основу методологии данной диссертации составляют интегральные неравенства с дробными производными. Хорошо известны положительность операторов дробного интегрирования и дифференцирования (с однородными начальными данными). Соответствующие неравенства могут быть распространены и на более общие случаи сложных функций с весом. Эти неравенства во многом аналогичны неравенствам с обычной производной, что позволяет прменить известную технику априорных оценок (энергетических неравенств) к дифференциальным уравнениям с дробными производными. Кроме этого, при доказательстве разрешимости задач на постоянной основе используется метод регуляризации как уравнения, так и собственно дробной производной. Например, в случае уравнения дробной диффузии используется параболическая регуляризация вместе с регуляризацией дробной производной. В результате разрешимость такой задачи не вызвывает никаких затруднений. Для уравнений с меняющимся направлением эволюции дополнительно применяется специальная регуляризация краевых условий, предложенная автором[3]. Комбинация всех этих элементов позволяет единообразно доказывать теоремы существования для уравнений с дробной производной.

Отдельно отметим обратную задачу определения переменного порядка дробной производной в уравнении дробной диффузии. Особенность данной задачи заключается в том, что для нее не удается получить подходящие оценки гладкости и устойчивости. Поэтому стандартные методы типа сжимающего отображения или теоремы Шаудера в данном случае неприменимы. Вместо этого применяется теорема о неподвижной точке Биркгофа-Тарского. Замечательная особенность этой теоремы заключается в том, что она использует лишь отношение нестрогого порядка. Для уравнения дробной диффузии при определенных условиях имеет место принцип сравнения, который и позволяет ввести требуемое отношение.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши как для линейного так и для нелинейного обыкновенного вырождающегося уравнения с дробной производной. На поведение вырождающегося коэффициента при дробной производной не накладываются никакие ограничения кроме неотрицательности. Нелинейность удовлетворяет условию типа монотонности.

[3] *Артюшин, А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 2. С. 274—289.

2. Доказана разрешимость задачи типа Коши для вырождающегося уравнения дробной диффузии. На поведение вырождающегося коэффициента при дробной производной не накладываются никакие ограничения кроме неотрицательности. При некоторых дополнительных упрощающих предположениях доказана единственность обобщенного решения.
3. Указана постановка краевой задачи для уравнения дробной диффузии с меняющимся направлением эволюции и доказана ее разрешимость. При некоторых дополнительных упрощающих предположениях доказана единственность обобщенного решения.
4. Указана постановка краевой задачи для дробно-волнового уравнения с меняющимся направлением эволюции и доказана ее разрешимость. Единственность обобщенного решения доказана при некоторых дополнительных предположениях относительно поведения вырождающегося коэффициента.
5. Рассмотрена обратная задача восстановления переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии. При определенных условиях на правую часть доказана теорема единственности решения. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в терминах некоторого конструктивного оператора A. Предложен конструктивный алгоритм поиска такого решения, который может быть реализован на ЭВМ.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими доказательствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: Межгородском научно-исследовательском семинаре "Неклассические задачи математической физики" (под руководством проф. Кожанова А. И.), научном семинаре "Избранные вопросы математического анализа" (под руководством проф. Демиденко Г. В.), научном семинаре "Современные проблемы математической физики" (под руководством ак. Алимова Ш. А., Ташкент), на российско-французском семинаре "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование", Ханты-Мансийск, 2019, на научном семинаре "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (АМАДЕ-2021), Минск, на VII Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (B&NAK 2023), Нальчик, на конференции "Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование", Самара, 2024.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 работах [1-4], которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК. В работах [3], [4] соавтору принадлежит только вывод первой априорной оценки для регуляризованного уравнения.

В диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 100 страниц. Список литературы содержит 97 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановки задач, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая ценность, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробоации, краткое содержание работы.

Первая глава посвящена формулировке и доказательству основного интегрального тождества, и, как следствие, интегральных неравенств с дробными производными, которые будут использоваться при получении априорных оценок.

Сначала формулируется основное тождество для интегралов сверточного типа. Пусть $T > 0$, $R(\eta) \in C^1(0,T]\bigcap L_1(0,T)$, $R(\eta) \geqslant 0$, $R'(\eta) \leqslant 0$, причем

$$\lim_{\eta\to 0} \eta R(\eta) = 0.$$

Пусть $\psi(\eta) \in C^1_{loc}(R)$, $\psi(0) = 0$. Обозначим

$$\Psi(a,b) = \psi(b) - \psi(a) - \psi'(a)(b-a), \qquad \Psi_0(a) = \Psi(a,0) = \psi'(a)a - \psi(a).$$

Для гладких функций $r(t), k(t), y(t)$ и $0 < z < T$ положим

$$J(z) = \int\limits_0^z r(t)\psi'(y(t))\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t R(t-s)k(s)y(s)\,ds\right)\,dt.$$

Лемма 1. *Пусть* $r(t), k(t), y(t) \in C^1[0,T]$. *Тогда*

$$J(z) = \int\limits_0^z \int\limits_0^t |R'(t-s)| r(t)k(s)\Psi(y(t),y(s))\,ds\,dt +$$

$$\int\limits_0^z r(t)\Psi_0(y(t))\left(k(0)R(t) + \int\limits_0^t R(t-s)k'(s)\,ds\right)\,dt -$$

$$\int\limits_0^z k(t)\psi(y(t))\left(r(z)R(z-t) - \int\limits_t^z R(s-t)r'(s)\,ds\right)\,dt.$$

Из этого тождества при надлежащем выборе функций $k(t)$, $r(t)$, $\psi(\eta)$, $R(\eta)$ получаем разнообразные интегральные неравенства.

Лемма 2. *Пусть $\psi(\eta) \geqslant 0$ — выпуклая функция, $y(t) \in C^1[0,T]$. Тогда*

$$\int_0^z \psi'(y(t)) \frac{d}{dt} \left(\int_0^t R(t-s) y(s)\, ds \right) dt \geqslant R_{0z} \int_0^z \left(\psi(y(t)) + \Psi_0(y(t))\right) dt,$$

где

$$R_{0z} = \inf_{t \in (0,z)} R(t).$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, причем $k(t) \geqslant 0$ и $r(t) \geqslant 0$. Тогда для $1 \leqslant p < \infty$*

$$p \int_0^z r(t) \operatorname{sign}(y(t)) |y(t)|^{p-1} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t R(t-s) k(s) y(s)\, ds \right) dt \geqslant$$
$$-\|R\|_{L_1(0,z)} ((p-1) \| |k'(t)\|_{C[0,z]} \|r(t)\|_{C[0,z]} + \|k(t)\|_{C[0,z]} \|r'(t)\|_{C[0,z]}) \|y(t)\|^p_{L_p(0,z)}.$$

А если $k'(t) \geqslant 0$, $r'(t) \leqslant 0$ для $t \in (0,z)$, то

$$p \int_0^z r(t) \operatorname{sign}(y(t)) |y(t)|^{p-1} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t R(t-s) k(s) y(s)\, ds \right) dt \geqslant C_{rk}(z) \|y\|^p_{L_p(0,z)},$$

где

$$C_{rk}(z) = \inf_{t \in (0,z)} \left((p-1) k(0) r(t) R(t) + r(z) k(t) R(z-t) \right).$$

Лемма 4. *Пусть $k(t), y(t) \in C^1[0,T]$, $k(t) \geqslant 0$, $1 < p < \infty$. Тогда для любого $\mu > 0$ найдутся такие константы $\delta(\mu) > 0$, $C(\delta(\mu)) > 0$, что для $z \in (\delta(\mu), T)$ имеет место неравенство*

$$\int_0^z r(t) \operatorname{sign}(y(t)) |y(t)|^{p-1} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t R(t-s) k(s) y(s)\, ds \right) dt \geqslant$$
$$- \mu \|y(t)\|^p_{L_p(0,z)} - C(\delta(\mu)) \mu^{1-p} \|y(t)\|^p_{L_1(0,z-\delta(\mu))}.$$

Как следствие, получаем серию интегральных неравенств с дробными производными, если положить $R(\eta) = \eta^{-\nu}$.

Если нет вырождения, то из основного тождества следуют оценки в пространствах Соболева-Слободецкого.

Лемма 5. *Пусть $y(t) \in C^1[0,T]$. Обозначим как $\tilde{y}(t)$ продолжение нулем функции $y(t)$ на всю ось. Тогда*

$$C_1(\nu)\|\tilde{y}(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(R)} \leqslant \int\limits_0^T y(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant C_2(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{\nu/2}(0,T)}.$$

Если $y(0) = 0$, тогда

$$C_3(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\nu)/2}(0,T)} \leqslant \int\limits_0^T y'(t)D^\nu y(t)\,dt \leqslant C_4(\nu)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\nu)/2}(0,T)}.$$

В дальнейшем, при построении приближенных решений нам понадобится одна регуляризация дробных интегралов и дробных производных.

Пусть $0 < \mu < 1$, $0 < \theta < 1$. Положим

$$K_{\mu,\theta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s+\theta)^\mu}\,ds.$$

Для регуляризованного оператора имеет место неравенство

$$\int\limits_0^T y(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt \geqslant \frac{C(\mu)}{(T+1)^\mu}\|y(t)\|^2_{L_2(0,T)} = C(\mu,T)\|y(t)\|^2_{L_2(0,T)}. \quad (1)$$

Далее нам понадобится оценка уклонения регуляризованного оператора от дробной производной. Обозначим

$$D(y(t),z(t)) = \int\limits_0^T \left(D^\mu y(t) - K_{\mu,\theta}y(t)\right) z(t)\,dt.$$

Лемма 6. *Найдется некоторая константа $C(\mu,T) > 0$, не зависящая от θ, такая, что для $y(t)$, $z(t) \in C^1[0,T]$ справедливо неравенство*

$$|D(y(t),z(t))| \leqslant C(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|_{W_2^1(0,T)}\|z(t)\|_{W_2^1(0,T)}.$$

С помощью последней леммы можно получать оценки снизу для интегралов с оператором $K_{\mu,\theta}y(t)$.

Лемма 7. *При условии леммы 6 имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T y(t)K_{\mu,\theta}y(t)\,dt \geqslant C_{K1}(\mu,T)\|y(t)\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T)} - C_{K2}(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|^2_{W_2^1(0,T)}$$

с некоторыми константами $C_{K1}(\mu,T) > 0$, $C_{K2}(\mu,T) > 0$, *не зависящими от* θ. *Если* $y(t) \in C^2[0,T]$ *и* $y(0) = 0$, *тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T y'(t) K_{\mu,\theta} y(t)\,dt \geqslant$$
$$C_{K3}(\mu,T)\|y(t)\|^2_{W_2^{(1+\mu)/2}(0,T)} - C_{K4}(\mu,T)\theta^{(1-\mu)/2}\|y(t)\|^2_{W_2^2(0,T)}$$

с некоторыми константами $C_{K3}(\mu,T) > 0$, $C_{K4}(\mu,T) > 0$, *не зависящими от* θ.

Вторая глава посвящена доказательству однозначной разрешимости линейного и нелинейного вырождающегося ОДУ. Всюду далее предполагается, что $0 < \nu < 1$, $k(t) \in C^1[0,T]$ и $k(t) \geqslant 0$.

Пусть $T > 0$. На интервале $(0,T)$ рассматриваем задачу для линейного ОДУ

$$\partial^\nu(k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t), \tag{2}$$
$$k(0)y(0) = 0, \tag{3}$$

где $c(t) \in C[0,T]$, $c(t) \geqslant c_0 > 0$.

Обобщенным решением задачи (2), (3) называем такую функцию $y(t) \in L_1(0,T)$, что для любой $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$ имеет место тождество

$$\int\limits_0^T y(t)(k(t)D_T^\nu\varphi(t) + c(t)\varphi(t))\,dt = \int\limits_0^T \varphi(t)f(t)\,dt.$$

Для доказательства разрешимости задачи (2), (3) применяем регуляризацию. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t) + \partial^\nu(k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t), \tag{4}$$
$$y(0) = 0. \tag{5}$$

Регуляризованная задача легко сводится к уравнению Вольтерры второго рода. Поэтому ее разрешимость не вызывает проблем. С помощью неравенств из первой главы для ее решений получаем равномерные по ε оценки. Для этого сначала получаем оценку умножением уравнения (4) на $\operatorname{sign} y(t)$, а затем умножением на $\operatorname{sign} y(t)|y(t)|^{p-1}$. После этого из последовательности приближенных решений можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Тем самым доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p \geqslant 1$. *Тогда для любой функции* $f(t) \in L_p(0,T)$ *задача* (2), (3) *имеет единственное обобщенное решение* $y(t) \in L_p(0,T)$. *Пусть*

$q > \frac{1}{\nu}$ и для некоторого $0 < t_0 < T$ имеет место включение $f(t) \in L_q(0,t_0)$. Тогда $k(t)y(t) \in C[0,t_0)$ и $k(0)y(0) = 0$.

После этого рассматриваем нелинейное ОДУ. Пусть $c(\eta) \in C_{loc}(\mathbb{R})$, $c(0) = 0$, и для некоторой константы $c_0 > 0$ имеет место неравенство

$$(a-b)(c(a)-c(b)) \geqslant c_0(a-b)^2, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$Ly(t) = \partial^\nu(k(t)y(t)) + c(y(t)).$$

На интервале $(0,T)$ рассматриваем задачу

$$Ly(t) = f(t), \tag{6}$$

$$k(0)y(0) = 0. \tag{7}$$

Аналогично предыдущему, обобщенным решением задачи (6), (7) называем такую функцию $y(t) \in L_1(0,T)$, что $c(y(t)) \in L_1(0,T)$, и для любой $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$ имеет место тождество

$$\int\limits_0^T (k(t)y(t)D_T^\nu\varphi(t) + c(y(t))\varphi(t))\,dt = \int\limits_0^T \varphi(t)f(t)\,dt.$$

Для доказательства разрешимости поставленной задачи применяем регуляризацию. На сей раз в уравнении присутствует нелинейность. Для предельнго перехода в нелинейном слагаемом слабой сходимости приближенных решений недостаточно. Поэтому надо построить сильно сходящуюся последовательность. А для этого нужны дополнительные оценки. Так что приходится использовать более сложную схему.

Пусть $m > 0$ — фиксировано. Для $\varepsilon > 0$ полагаем $k_\varepsilon(t) = \varepsilon + k(t)$ и

$$L_\varepsilon y(t) = \varepsilon^m y'(t) + \partial^\nu(k_\varepsilon(t)y(t)) + c(y(t)).$$

Пусть $f_\varepsilon(t) \in C^1[0,T]$, $f_\varepsilon(T) = 0$. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon y_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t), \tag{8}$$

$$y_\varepsilon(0) = 0. \tag{9}$$

Как и раньше, нетрудно доказать локальную разрешимость этой задачи. После этого доказывается ряд лемм, в которых получаются оценки решения этой задачи. Все оценки получаются с помощью умножения уравнения (8) на подходящие сомножители и интегрирования по частям.

Полученные оценки позволяют в линейном случае построить сильно сходящуюся последовательность приближенных решений.

Лемма 8. *Пусть* $c(\eta) = c_0\eta$, $c_0 > 0$. *Пусть* $p \geqslant 1$, $f \in L_p(0,T)$, $y(t)$ — *обобщенное решение задачи* (6), (7). *Найдется такая последовательность функций* $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что*

1. $y_n(t) \in C^1[0,T]$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n(t) - y(t)\|_{L_p(0,T)} + \|Ly_n(t) - f(t)\|_{L_p(0,T)} = 0$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$ *для п.в.* $t \in (0,T)$.

Для решения $y(t)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T c_0|y(t)|\,dt \leqslant \int\limits_0^T f(t)\,\mathrm{sign}(y(t))\,dt.$$

С помощью этой леммы доказываем теорему единственности решения нелинейного ОДУ.

Теорема 2. *Пусть* $p \geqslant 1$, $f_1(t), f_2(t) \in L_p(0,T)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ — *соответствующие им решения задачи* (6), (7). *Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T |c(y_1(t)) - c(y_2(t))|\,dt \leqslant \int\limits_0^T (f_1(t) - f_2(t))\,\mathrm{sign}(y_1(t) - y_2(t))\,dt.$$

В частности, если $f_1(t) \equiv f_2(t)$, *то* $y_1(t) \equiv y_2(t)$, *и решение задачи* (6), (7) *единственно.*

Наконец, с помощью всех вспомогательных утверждений доказывается теорема существования обобщенного решения.

Теорема 3. *Пусть функция* $k(t) \in C^2[0,T]$, $p \geqslant 1$, $f \in L_p(0,T)$. *Тогда существует* $y(t)$ — *решение (единственное) задачи* (6), (7), *и для него справедливо утверждение, аналогичное утверждению леммы 8.*

В **третьей главе** рассматривается уравнение дробной диффузии с вырождением и меняющимся направлением эволюции. Пусть $T > 0$, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $S = (0,T) \times \Gamma$, $0 < \nu < 1$. В цилиндре Q рассматриваем задачу

$$\partial_{0t}^{\nu}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u(t,x) = f(t,x), \tag{10}$$

$$u(t,x)\big|_S = 0,$$

$$k(0,x)u(0,x) = 0. \tag{11}$$

Здесь ∂_{0t}^{ν} — производная Герасимова-Капуто по переменной t с началом в точке $t = 0$ (в дальнейшем пишем просто ∂^{ν}), а $L(x,t,D_x)$ — равномерно эллиптический оператор второго порядка

$$Lu(t,x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(t,x)u_{x_j}(t,x))$$

с симметричной и положительно определенной матрицей $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$.

Всюду далее считаем, что $a_{ij}(t,x)$, $c(t,x)$, $k(t,x)$, $k_t(t,x) \in C(\bar{Q})$. Обозначим через V пространство таких функций $\varphi(t,x) \in C^2(\bar{Q})$, что $\varphi(t,x) = 0$ и $\varphi(t,x)\big|_S = 0$. Обобщенным решением задачи (10)-(11) назовем такую функцию $u(t,x) \in L_1(Q)$, что для любой функции $\varphi(t,x) \in V$ справедливо равенство

$$\int\limits_Q kuD_T^\nu \varphi\, dQ - \int\limits_Q u \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\varphi_{x_j})\, dQ + \int\limits_Q cu\varphi\, dQ = \int\limits_Q f\varphi\, dQ.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $p > 1$, $k(t,x) \geqslant 0$ и $c(t,x) \geqslant c_0$ для некоторого $c_0 > 0$ и $(t,x) \in \bar{Q}$. Тогда для любой $f \in L_p(Q)$ существует обобщенное решение задачи (10)-(11) из класса $L_p(Q)$. При этом если $p < 2$, то $u \in L_p(0,T; W_p^1(\Omega))$, а если $p \geqslant 2$, то $u \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$.*

Для доказательства этой теоремы применяется метод регуляризации с привлечением оператора регуляризации дробной производной.

Пусть $\varepsilon > 0$. В цилиндре Q рассмотрим задачу

$$\varepsilon u_t + K_{\nu,\varepsilon}(k(t,x)u(t,x)) - L(x,t,D_x)u(t,x) + c(t,x)u = f_\varepsilon(t,x), \tag{12}$$

$$u(t,x)\big|_S = 0,$$

$$u(0,x) \ = 0, \tag{13}$$

с регуляризованным оператором $K_{\nu,\varepsilon}$, определенным в главе 1. Считаем, что $f_\varepsilon \in C(\bar{Q})$ и $f_\varepsilon \to f$ сильно в $L_p(Q)$ при $\varepsilon \to 0$. Коль скоро ядро оператора не имеет особенности, нетрудно показать, что задача (12)-(13) имеет решение $u(t,x) \in L_\infty(Q)$. При этом $u_t \in L_2(Q)$, $u \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega))$.

Для решений задачи (12)-(13) получаем равномерные ε по оценки и переходим к пределу.

Можно показать, что обобщенное решение единственно. В работе рассмотрен лишь сравнительно простой случай, когда коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ и $c(t,x)$ не зависят от x.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ и $c(t,x)$ не зависят от x. При условиях теоремы 4 обобщенное решение задачи (10)-(11) единственно.*

Далее рассматриваем уравнение дробной диффузии с меняющимся направлением эволюции. В цилиндре Q рассматриваем следующую задачу для модельного уравнения

$$\partial^\nu(k(t,x)u(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma u(t,x) = f(t,x), \tag{14}$$
$$u(t,x)|_S = 0,$$
$$u(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\}, \tag{15}$$
$$u(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}. \tag{16}$$

Прежде всего, дадим определение обобщенного решения. Обозначим

$$\chi_0(x) = k(0,x)u(0,x), \quad \chi_T(x) = k(T,x)u(T,x).$$

Формально применяя оператор J^ν к уравнению (14), приходим к равенству $(t \in [0,T])$

$$k(t,x)u(t,x) - J^\nu \Delta u(t,x) + \gamma J^\nu u(t,x) = J^\nu f(t,x) + \chi_0(x). \tag{17}$$

В частности, для $t = T$

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^\nu \Delta u(T,x) + \gamma J^\nu u(T,x) = J^\nu f(T,x). \tag{18}$$

Принимая во внимание (15) и (16), получаем включения

$$\operatorname{supp}\chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp}\chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+, \tag{19}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (15), (16). В соответствии с этим, мы называем функцию $u(t,x) \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))$ обобщенным решением задачи (14)-(16), если

$$J^\nu u(t,x) \in C([0,T];\mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad k(t,x)u(t,x) \in C([0,T],W_2^{-1}(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_1(\Omega)$ справедливы равенства (17), (18) и включение (19).

Далее используем обозначение $\mu = 1 - \nu$.

Теорема 6. *Пусть $\gamma > 0$, $k(t,x), k_t(t,x) \in L_\infty(Q)$, $D^{\mu/2}f(t,x) \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и для некоторого $\gamma_0 > 0$ справедливо неравенство*

$$2C(\mu,T)\gamma + k_t(t,x) \geqslant \gamma_0, \quad (t,x) \in Q,$$

с константой $C(\mu,T)$ из неравенства (1).

Тогда существует обобщенное решение задачи (14)-(16), *для которого справедлива оценка*

$$\|\chi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\chi_T\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C\|f\|^2_{W_2^{\mu/2}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}.$$

Что касается единственности обобщенных решений, то в работе доказан лишь один весьма простой результат.

Теорема 7. *Предположим, что* $k(0,x) \geqslant 0$ *и* $k(T,x) \geqslant 0$, *а* $\gamma > 0$ *достаточно велико. Тогда обобщенное решение задачи* (14)-(16) *единственно.*

В **четвертой главе** рассматривается дробно-волновое уравнение с меняющимся направлением эволюции. В целом, все построения аналогичны построениям из главы 3. Однако с помощью техники усреднения доказана существенно более содержательная теорема единственности обобщенного решения.

По некоторым техническим причинам мы рассматриваем несколько более общее уравнение

$$\partial^\nu(k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma_1 u_t(t,x) + \gamma_2 \partial^\nu u(t,x) = f(t,x), \tag{20}$$

$$u(t,x)|_S = 0, \tag{21}$$

$$u(0,x) = 0,$$

$$u_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0^+ = \{x|\, k(0,x) > 0\}, \tag{22}$$

$$u_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_T^- = \{x|\, k(T,x) < 0\}. \tag{23}$$

Обобщенное решение определяется вполне аналогично определению для уравнения дробной диффузии. Обозначим

$$\chi_0(x) = k(0,x)u_t(0,x), \quad \chi_T(x) = k(T,x)u_t(T,x).$$

Заметим, что в силу (22) и (23), справедливы включения

$$\operatorname{supp}\chi_0(x) \subseteq \Omega_0^-, \quad \operatorname{supp}\chi_T(x) \subseteq \Omega_T^+, \tag{24}$$

где Ω_0^-, Ω_T^+ определяются аналогично (22), (23). Формально применяя оператор J^ν к уравнению (20), приходим к равенству ($t \in [0,T]$)

$$k(t,x)u_t(t,x) - J^\nu \Delta u(t,x) + \gamma_1 J^\nu u_t(t,x) + \gamma_2 u(t,x) = J^\nu f(t,x) + \chi_0(x). \tag{25}$$

В частности,

$$\chi_T(x) - \chi_0(x) - J^\nu \Delta u(T,x) + \gamma_1 J^\nu u_t(T,x) + \gamma_2 u(T,x) = J^\nu f(T,x). \tag{26}$$

Обобщенным решением задачи (20)-(23) называем такую функцию $u(t,x) \in L_2(Q)$, что

$$u_t(t,x) \in L_2(Q), \quad u(0,x) = 0,$$
$$\partial^{1-\nu}u(t,x) \in C([0,T]; W_2^{-1}(\Omega)), \quad k(t,x)u_t(t,x) \in C([0,T], W_2^{-1}(\Omega)),$$
$$u(t,x) \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad J^\nu u(t,x) \in C([0,T]; \mathring{W}_2^1(\Omega)),$$

и для некоторых функций $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_2(\Omega)$ справедливы уравнения (25), (26) и включения (24).

Далее используем обозначение $\mu = 1 - \nu$.

Теорема 8. *Пусть* $\gamma_1 \geqslant 0$, $f(t,x) \in W_2^{\mu/2}(0,T; L_2(\Omega))$ *и для некоторого* $\gamma_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$2C_K(\mu,T)\gamma_1 + 2\gamma_2 + k_t(t,x) \geqslant \gamma_0, \quad (t,x) \in Q, \tag{27}$$

с константой $C_K(\mu,T)$ *из неравенства* (1). *Тогда у задачи* (20)-(23) *существует обобщенное решение из класса*

$$u(t,x) \in W_2^{\frac{1+\mu}{2}}(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega)), \quad u_t(t,x) \in W_2^{\frac{\mu}{2}}(0,T; L_2(\Omega)). \tag{28}$$

Далее доказываются теоремы единственности обобщенного решения. Сначала рассматривается один простой случай.

Теорема 9. *Предположим, что* $k(0,x) \geqslant 0$ *и* $k(T,x) \geqslant 0$, $\gamma_1 > 0$, *а* $\gamma_2 > 0$ *достаточно велико. Тогда обобщенное решение задачи* (20)-(23) *единственно.*

Для доказательства этой теоремы умножаем уравнениние (25) на $u(t,x)$ и интегрируем по частям. Любопытно отметить, что данное доказательство весьма похоже на доказательство теоремы единственности решений волнового уравнения[4].

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 8. Предположим, что* $k(0,x) \geqslant 0$ *и* $k(T,x) \geqslant 0$. *Тогда обобщенное решение задачи* (20)-(23) *единственно.*

К сожалению, такие простые рассуждения как в теореме 9, не применимы, если $k(0,x) \leqslant 0$ или $k(T,x) \leqslant 0$. В этих случаях приходится применять технику с усреднением. В целом, рассуждения не очень сложные, но осложнены громоздкими техническими деталями. В конечном итоге, пришлось рассмотреть четыре случая

(C1) $k(0,x) \geqslant 0$, $k(T,x) \geqslant 0$.
(C2) $k(0,x) \leqslant 0$, $k(T,x) \geqslant 0$.
(C3) $k(0,x) \leqslant 0$, $k(T,x) \leqslant 0$.
(C4) $k(0,x) \geqslant 0$, $k(T,x) \leqslant 0$.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* (27). *У задачи* (20)-(23) *может существовать не более одного обобщенного решения, удовлетворяющего включениям* (28), *при условии, что функции* $k(0,x)$ *и* $k(T,x)$ *не меняют знак.*

В **пятой главе** рассматривается обратная задача определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии.

[4] *Ладыженская, О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. Москва : Наука, 1973. 403 с., теорема 3.1, стр. 210.

В цилиндре Q рассматриваем краевую задачу

$$\partial^{\mu(x)}u(t,x) + L(x,D_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{29}$$

$$u_n(t,x)\big|_S = 0, \tag{30}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{31}$$

Здесь $L(x,D_x)$ — равномерно-эллиптический оператор второго порядка, $u_n(t,x)$ — конормальная производная. Функция $\mu(x)$ предполагается измеримой, причем для некоторого $\lambda < 1$

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \lambda, \quad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{32}$$

В дальнейшем, всякую такую функцию $\mu(x)$ будем называть допустимым показателем.

Обратная задача заключается в одновременном определении пары функций $(u(t,x),\mu(x))$ с помощью дополнительного условия

$$u(T,x) = \varphi(x). \tag{33}$$

Сначала доказывается однозначная разрешимость прямой задачи.

Теорема 11. *Пусть $u_0(x) \in L_2(\Omega)$, $f(t,x) \in L_2(Q)$. Тогда у задачи (29)-(31) существует и единственно такое решение, что*

$$u(t,x) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)), \quad \partial^{\mu(x)/2}u(t,x) \in L_2(Q).$$

Причем, если $u_0(x) \geqslant 0$ и $f(t,x) \geqslant 0$, то $u(t,x) \geqslant 0$. А если $f_t(t,x) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \equiv 0$, $f(0,x) \equiv 0$, то

$$\partial^{\mu(x)}u(t,x) \in C(0,T;L_2(\Omega)), \quad u(t,x) \in C(0,T;W_2^2(\Omega)).$$

Особо отметим тот факт, что решение имеет определенный знак (аналог принципа максимума), если такой знак имеют начальные данные и правая часть.

Далее рассматривается обратная задача. Прежде всего надо предъявить какое-то уравнение для искомой функции $\mu(x)$. Обозначим

$$R(x,z,u) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-z)T^z} + z\int_0^T \frac{u(T,x)-u(\tau,x)}{\Gamma(1-z)(T-\tau)^{1+z}}\,d\tau.$$

Легко убедиться, что если $(u(t,x),\,\bar{\mu}(x))$ — решение обратной задачи, то

$$R(x,\bar{\mu}(x),u) = G(x),$$

где

$$G(x) = f(t,x) - L(x,D_x)\varphi(x).$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 9. *Найдется некоторая величина $T(\lambda) > 0$ такая, что если $u(t,x) - u(\tau,x) \geqslant 0$ для $0 < \tau \leqslant t \leqslant T(\lambda)$, то функция $R(x,z,u)$ монотонно возрастает по z на отрезке $[0,\lambda]$.*

Поэтому **для любой** монотонной по переменной t функции $u(t,x)$ формально определена функция $\tilde{\mu}(x)$, для которой выполняется равенство

$$R(x,\tilde{\mu}(x),u) = G(x). \tag{34}$$

С помощью (34) формально определяем оператор A по следующему правилу. Для всякого допустимого показателя $\mu(x)$ решаем прямую задачу и находим решение $u(t,x)$. Если функция $u(t,x)$ монотонна по переменной t, то разрешаем уравнение (34) относительно $\tilde{\mu}(x)$. Наконец, если функция $\mu(x)$ допустима, то полагаем

$$A\mu(x) = \tilde{\mu}(x).$$

Оказывается, что этот оператор изотонный и для него применима теорема о неподвижной точке Биркгофа-Тарского. Так что имеет место следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть $u_0(x) \equiv 0$, $T \leqslant T(\lambda)$, $f(t,x), f_t(t,x) \in L_2(Q)$, причем $f(0,x) = 0$ и $f_t(t,x) \geqslant 0$. Пусть $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$ и*

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ для п.в. } x \in \Gamma.$$

Предположим, что для некоторых $K > 0$ и $\lambda_1 > \lambda$ справедливо неравенство

$$\|f(t,x) - f(t,x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K(T-t)^{\lambda_1}, \quad t \in (0,T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(P1) Для разрешимости обратной задачи (29)-(31), (33) необходимо, чтобы

$$0 < \varphi(x) \leqslant G(x), \qquad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{35}$$

(P2) Пара функций $(u(t,x), \bar{\mu}(x))$ является решением задачи (29)-(31), (33) если и только если $\bar{\mu}(x)$ — неподвижная точка оператора A.

(P3) Обратная задача (29)-(31), (33) разрешима если и только если выполнено неравенство (35), и для некоторого допустимого показателя $\mu(x)$ справедливо неравенство

$$A\mu(x) \leqslant \mu(x), \qquad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{36}$$

(P4) Решение обратной задачи (29)-(31), (33) единственно.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 12, справедливы неравенства (35) и, дополнительно,*

$$\frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\lambda)T^{\lambda}} \geqslant G(x).$$

Тогда обратная задача (29)-(31), (33) однозначно разрешима.

Замечание 1. *На практике, вместо поиска функции, удовлетворяющей условию (36), следует начинать с функции $\mu(x) \equiv 0$. Тогда последовательные приближения будут возрастать. А значит, либо на некотором шаге уравнение (34) окажется неразрешимым, либо будет нарушено условие (32), либо будет получена монотонно возрастающая последовательность приближений, сходящаяся к решению обратной задачи $\bar{\mu}(x)$.*

Заключение

Основным результатом данной диссертационной работы стало доказательство теорем существования и единственности для ряда задач с вырождением и нелинейностью с помощью метода априорных оценок. В известном смысле можно утверждать, что этот метод не имеет альтернативы в случае произвольного вырождения и смены направления эволюции. Кроме того, для задач с монотонной нелинейностью, данный метод позволяет доказывать существование глобальных решений без ограничений роста и требования липшицевости. С его помощью можно сравнительно легко получать и такие качественные результаты, как принцип максимума и принцип сравнения решений.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в следующих направлениях.

1. Можно ли в задаче для нелинейного ОДУ применить метод монотонности?
2. Для задач с меняющимся направлением времени остался открытым вопрос единственности обобщенного решения в случае произвольного поведения вырождающегося коэффициента на торцах цилиндра. Эта задача тесно связана с возможностью повышения гладкости решения, при условии повышенной гладкости входных данных.
3. По-видимому, во все рассмотренные уравнения можно добавлять монотонные нелинейности.
4. В обратной задаче нет никаких оценок гладкости полученного решения $\mu(x)$. Можно ли при каких-то условиях получить оценки гладкости, устойчивости и, кроме этого, оценить скорость сходимости?

Публикации автора по теме диссертации в изданиях из списка ВАК РФ

1. *Артюшин, А. Н.* Интегральные неравенства с дробной производной и их приложение к вырождающимся дифференциальным уравнениям с дробной производной Капуто / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. — 2020. — Т. 61, № 2. — С. 266—282.

2. *Артюшин, А. Н.* Обратная задача определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии / А. Н. Артюшин // Сибирский математический журнал. — 2023. — Т. 64, № 4. — С. 675—686.

3. *Artyushin, A. N.* Differential equations with fractional derivatives and changing direction of evolution / A. N. Artyushin, S. Z. Dzhamalov // Journal of Mathematical Sciencies. — 2023. — Vol. 277, no. 3. — P. 366—374.

4. *Artyushin, A. N.* Fractional wave equation with changing direction of evolution / A. N. Artyushin, S. Z. Dzhamalov // Journal of Mathematical Sciencies. — 2024. — Vol. 284, no. 2. — P. 166—178.