

ОТЗЫВ

официального оппонента

о диссертации Гальта Алексея Альбертовича

”Свойство расщепляемости подгрупп в группах лиевого типа”,

представленной на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5.—

Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

В целом темой диссертации является изучение свойств подгрупп в простых алгебраических группах, определенных над алгебраически замкнутым полем, и тесно связанных с ними конечных простых группах лиевого типа. Эта тема давно является предметом активных исследований многих авторов по всему миру и весьма актуальна и в настоящее время.

Структурная теория выделяет среди всех подгрупп некоторые, играющие в этой теории ключевую роль. К их числу безусловно относятся максимальные торы. Факторами нормализаторов этих торов по самим торам являются конечные группы (группы Вейля), также играющие ключевую роль в структурной теории. Это приводит к естественной задаче об изучении структуры этих нормализаторов и, в частности, к вопросу о том, является ли такой нормализатор полупрямым произведением группы Вейля и максимального тора, т.е. расщепляется ли нормализатор как групповое расширение группы Вейля с помощью тора. Этот вопрос о расщеплении возникал не раз в различных задачах, касающихся алгебраических групп и их приложений. Впервые его сформулировал в статье 1966 года один из основателей теории алгебраических групп Ж. Титс, которой в этой же статье анонсировал, что во второй ее части будет дан ответ на этот вопрос. Однако, как сообщил автору настоящего отзыва Ж.-П. Серр в частном письме, эта вторая часть так никогда и не была опубликована. Будучи куратором поданной в Известия РАН. Серия математическая статьи А. А. Гальта, автор настоящего отзыва сообщил А. А. Гальту об этом письме Ж.-П. Серра. В диссертации эта рассмотренная Ж. Титсом задача называется

Проблема 1 (Ж. Титс). *Описать все связные простые алгебраические группы, в которых нормализатор максимального тора расщепляется над этим тором.*

Аналогичная задача возникает и для максимальных торов в конечных группах лиевского типа, т.е. в группах неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга связанных простых алгебраических групп, определенных над алгебраическим замыканием конечного поля. В диссертации она называется

Проблема 2. *Описать все конечные группы лиевского типа и их максимальные торы, в которых нормализатор этого тора расщепляется над этим тором.*

Полное решение указанных проблем является основным результатом этой диссертации. Ему посвящена большая ее часть. Помимо этого решения, в диссертации также получены результаты о минимальных порядках поднятий элементов группы

Вейля в нормализатор тора — их можно рассматривать как некоторую числовую характеристику отклонения от свойства расщепимости. Еще одна, стоящая более изолированно, тема, рассмотренная в диссертации, касается ряда усовершенствований, облегчающих применение теоремы Ашбахера о подгруппах в классических группах.

Глава 1 является вводной и содержит основные определения, сведения об аффинных алгебраических группах и группах лиевского типа, а также ряд предварительных результатов.

В главе 2 дано решение проблемы Ж. Титса о расщепимости (проблемы 1) для классических алгебраических групп, т.е. дана классификация тех из них, в которых нормализатор максимального тора расщепляется в полупрямое произведение этого тора и группы Вейля. Это сделано последовательно сначала для симплектических групп, затем для линейных и унитарных, а потом для ортогональных. В этой же главе для указанных групп решена проблема 2, т.е. в группах неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга классических алгебраических групп классифицированы такие максимальные торы, нормализатор которых расщепляется над тором.

В главе 3 проблема 1 решается для исключительных групп лиевского типа. Это сделано последовательно для групп типа E_6 , E_7 , E_8 , F_4 и G_2 . Вместе с результатами главы 2 это дает полное решение проблемы 1. В этой же главе полностью решается и проблема 2 за счет последовательного исследования проблемы расщепимости нормализаторов максимальных торов в группах $E_6^{\varepsilon}(q)$ (односвязных и присоединенных), $E_7(q)$ (односвязных и присоединенных), $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$. Кроме того, в главе 2 для всех конечных исключительных групп лиевского типа (односвязных и присоединенных) найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в нормализатор максимального тора. Эти порядки можно рассматривать как меру отклонения от свойства расщепимости.

В главе 4 тоже рассматриваются линейные и унитарные конечные группы, но в отношении другой задачи: результаты этой главы касаются проблемы описания подгрупп в этих группах. В них для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной примарной подгруппой, получено уточнение известной теоремы Ашбахера (согласно которой всякая подгруппа либо принадлежит одному из восьми явно описанных классов, либо, профакторизованная по пересечению с центром объемлющей группы, является почти простой).

Результаты диссертации опубликованы в 12 статьях в журналах, входящих в перечень изданий для публикации результатов, представленных к защите докторских диссертаций. Большая часть этих статей опубликована в таких журналах с высокой научной репутацией как Известия РАН. Серия математическая, Сибирский математический журнал, Алгебра и логика, Journal of Algebra and its Application. Центральная роль существенного личного вклада соискателя в те из этих работ, которые являются совместными (их 7), несомненна.

Представленные к защите результаты прошли основательную апробацию: начиная с 2013 г., они докладывались на 18 конференциях в России и за рубежом (большинство из которых являлись международными), а также неоднократно докладывалась на различных семинарах в России и Китае.

Все представленные к защите результаты являются новыми. Все они снабжены подробными доказательствами. Их достоверность не вызывает сомнений. Центральную часть этих результатов составляет полное решение старой проблемы, поставленной классиком теории алгебраических групп Ж. Титсом, и аналогичной проблемы для конечных групп лиевского типа. Эти важные результаты являются существенным достоинством диссертации А. А. Гальта. Достоинства такого уровня не часто встречаются в диссертациях. Без тонкого анализа, проведенного автором, получить эти важные результаты было бы невозможно.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация написана очень тщательно. Мелкие замечания, касающиеся очень редких опечаток и стилистических погрешностей изложения, нет смысла здесь указывать, поскольку они никак не снижают высокого уровня этой диссертации.

Считаю, что диссертация А. А. Гальта "Свойства расщепляемости подгрупп в группах лиевского типа" удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пп. 9–11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление 842 от 24 сентября 2013 г.), а ее автор Алексей Альбертович Гальт заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент

член-корреспондент РАН

доктор физико-математических наук

профессор

Попов Владимир Леонидович

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8

тел.: +7(495) 984 81 41

e-mail: popovvl@mi-ras.ru

федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

главный научный сотрудник

отдела алгебры

13 марта 2025 г.

В. Л. Попов