

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Тесемникова Павла Игоревича «Асимптотический анализ случайных блужданий с тяжелыми хвостами приращений по направленным случайными графам и смежные вопросы», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 -- теория вероятностей и математическая статистика.

В диссертационной работе П.И.Тесемникова изучаются две вероятностные модели. Диссертация включает введение, четыре главы, приложение и список литературы. В первой главе вводятся основные классы распределений с тяжелыми хвостами и предлагается современный обзор литературы по этой теме. Во второй главе рассматривается первая модель (описание и обсуждение модели, формулировка основных и вспомогательных результатов, примеры), а в третьей главе – вторая модель. Наконец, в четвертой главе приводятся доказательства основных утверждений, а в приложении – доказательства вспомогательных утверждений.

Первая модель, рассматриваемая в диссертации, – это ветвящееся случайное блуждание в неоднородной среде. Изучается асимптотика хвостового распределения самой правой точки на различных (конечных или бесконечном) интервалах времени фиксированной либо случайной длины и доказываются как индивидуальные теоремы (для конкретного интервала времени), так и равномерные теоремы по различным классам интервалов. Попутно изучаются свойства и некоторых других функционалов.

Ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) – это ветвящийся процесс, в котором частицы размещаются на числовой прямой. В диссертации предполагается, что время дискретно и что в каждую единицу времени n каждая имеющаяся частица (частица из поколения n) дает жизнь некоторому (фиксированному или случайному) числу потомков, каждый из которых размещается на прямой на некотором расстоянии от нее (это расстояние называется приращением или скачком случайного блуждания), после чего частица удаляется. В начальный момент времени (момент времени 0) ВСБ стартует с одной частицы, расположенной в точке 0 на числовой прямой. Предполагается, что количества потомков у разных частиц независимы в совокупности и не зависят от скачков, причем количества потомков у частиц из одного поколения одинаково распределены, а количества потомков в разных поколениях имеют, вообще говоря, различные распределения (т. е. среда неоднородна). Далее, предполагается, что с вероятностью единица каждая частица производит по крайней мере одного потомка и что ветвление затухает, т. е. вероятность произвести строго более одного потомка уменьшается от поколения к поколению, и, более того, начиная с некоторого (возможно, случайного) поколения, все частицы начинают производить ровно по одному потомку (это свойство в диссертации называется свойством строгого затухания), при этом общее число частиц Q_n перестает меняться, т. е. $Q_n = Q$ при всех больших n , и к тому же это предельное число частиц имеет конечное среднее EQ . В свою очередь, все скачки случайного блуждания предполагаются независимыми и одинаково распределенными, а их общее распределение имеет тяжёлый правый хвост (то есть среднее $E \exp(cX)$ принимает бесконечное значение при каждом $c > 0$, здесь X – типичный размер скачка) и, более того, является т.н. «строго субэкспоненциальным».

Отметим, что для «обычного» случайного блуждания, у которого ветвления нет (каждая частица производит ровно одного потомка и Q тождественно равно единице), индивидуальные и равномерные асимптотики максимума на случайных интервалах времени получены и изучены относительно недавно в работах Асмуссена (1998), Фосса, Пальмовски и Захари (2005) и в других работах, см. также монографию Фосса, Коршунова и Захари (2013). Введение ветвления существенно усложняет модель, делает ее много богаче и позволяет рассматривать различные варианты зависимости Q от других случайных величин, определяющих ВСБ. В диссертации П.И. Тесемникову удалось получить широкий набор свежих и важных утверждений об асимптотическом поведении хвоста распределения самой правой точки ВСБ в терминах новых характеристик, предложенных автором. Автору удалось преодолеть множество существенных технических препятствий и разработать и применить свежие идеи и подходы. Полученные утверждения естественным образом обобщают ранее известные факты для обычных случайных блужданий. Отметим, что в диссертации показано, что затухание процесса является в известном смысле необходимым условием для рассмотрения поведения на бесконечном интервале времени либо на случайном интервале времени с бесконечным средним, а также для получения равномерных утверждений.

Вторая вероятностная модель, рассматриваемая в диссертации – семейство направленных случайных графов с упорядоченными вершинами. А именно, при каждом $n=1,2,\dots$ рассматривается случайный граф с $n+1$ вершинами, занумерованными числами $0,1,\dots,n$, и для любой пары вершин $i < j$ ребро между ними существует с вероятностью p независимо от всего остального, где p – фиксированное число между 0 и 1. Граф называется графом Эрдеша-Реньи, если ребра не являются направленными, и графом Барака-Эрдеша, если каждое ребро направлено из меньшей вершины в большую. Рассматриваются и более общие модели, где ребрам дополнительно приписываются случайные веса (т.н. обобщенные графы Барака-Эрдеша). Графы Эрдеша-Реньи являются классическим объектом, изучаемым многие десятилетия. Графы Барака-Эрдеша были введены относительно недавно, они применяются при моделировании биологических и коммуникационных сетей, систем обслуживания и т.д. В последние годы такие графы изучались во многих работах, см., например, Фосс: Константинопoulos и Пяткин (2023), Константинопoulos, Логачев, Могульский и Фосс (2021), Малляйн и Рамассами (2019, 2021), Габриш (2016), Черныш и Рамассами (2017) и списки литературы в них. В этих работах в-основном изучались асимптотические свойства максимальной длины пути (или максимального веса пути, если ребра снабжены весами) и доказывались предельные теоремы и теоремы о больших отклонениях, исследовались аналитические свойства скорости роста таких путей и алгоритмы ее несмещенного моделирования и т.д. Следует сказать, что эти исследования достаточно тесно связаны с изучением перколяционных моделей и что максимальная длина пути является прямым аналогом т.н. the last passage percolation.

Другой важной характеристикой перколяционных моделей является the first passage percolation, и её аналогом в направленных графах является наименьшая длина всех путей, связывающих крайние вершины графа (или их наименьший вес – в более общей постановке). Именно эта характеристика и является предметом исследования в рассматриваемой работе.

Нетрудно видеть, что предельное распределение наименьшей длины пути имеет очень простой вид, если вероятность наличия ребра между двумя вершинами не зависит от расстояния между ними и равна одному и тому же числу $0 < p < 1$. Действительно, если это так, то с ростом n наименьшая длина пути с вероятностью

близкой к единице принимает лишь два значения, т. е. равна либо 1 – если ребро между крайними вершинами существует (т. е. с вероятностью p), либо 2 – если этого ребра нет (с вероятностью стремящейся к $1-p$, так как вероятность существования пути длиной 2 через одну из промежуточных вершин стремится к единице). Поэтому для того, чтобы получать содержательные утверждения об асимптотическом поведении распределения наименьшей длины пути, надо рассматривать схему серий, в которой вероятность p зависит от n и стремится к нулю с ростом n . Ещё больший интерес представляет модель, в которой вероятность p может зависеть не только от общего числа ребер, но и от конкретных номеров ребер или расстояния между ними. Именно такого рода модели и изучаются в диссертации. В работе получены предельные распределения для наименьшей длины пути для различных скоростей стремления вероятности p к нулю, а также изучены вопросы связности и другие структурные свойства рассматриваемой модели. Также рассмотрены частные случаи, в которых найдены выражения для констант, определяющих предельные распределения.

Помимо этого, в третьей главе диссертации рассмотрена модель обобщенного графа Барака-Эрдеша, где общее распределение весов ребер имеет тяжелый хвост, и изучена хвостовая асимптотика максимального веса пути, соединяющего крайние точки. Полученное утверждение примечательно тем, что при его доказательстве применяются как методы, развитые для исследования ветвящихся случайных блужданий, так и методы исследования направленных случайных графов.

В диссертации получен ряд новых и интересных результатов в двух областях современной теории вероятностей. Все основные результаты, вынесенные на защиту, были своевременно опубликованы в рецензируемых журналах. В ходе выполнения диссертационной работы Павел Игоревич Тесемников продемонстрировал отличное владение аппаратом современной теории вероятностей, желание и способность самостоятельно ставить и решать сложные вероятностные задачи, развивать новые вероятностные методы и подходы. Считаю, что диссертационная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Павел Игоревич Тесемников, заслуживает присвоения степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 --теория вероятностей и математическая статистика.

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор,
ведущий научный сотрудник лаборатории теории вероятностей
и математической статистики Института математики СО РАН

Фосс Сергей Георгиевич

(С. Г. Фосс)

E-mail: foss@math.nsc.ru

Телефон: 8-(383)-329-76-09, факс: 8-(383)-333-25-98

Адрес: 630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4

14 июня 2023 г.