

## Отзыв

на диссертацию *Дроздова Дмитрия Алексеевича*

**Анализ на самоподобных множествах с конечным пересечением,**

представленной на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 --

"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Диссертация Д.А. Дроздова принадлежит актуальному научному направлению фрактальной геометрии, связанному с изучением самоподобных множеств. С момента выхода книги Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы» началось бурное развитие фрактальной геометрии, поскольку фракталы обнаружили во многих естественных явлениях и процессах. Так, фрактальные модели применяют в медицине для ранней диагностики раковых опухолей, в материаловедении при изучении процессов разрушения изделий, в ядерной физике для изучения элементарных частиц, в информатике для сжатия данных и улучшения трафика в сети интернет и т.д.

В диссертации исследуется структура самоподобных множеств (в смысле определения Дж. Хатчинсона) на плоскости и в пространстве, самоподобных дендритов и фрактальных  $k$ -кубов. Эти исследования являются естественным продолжением исследований руководителя соискателя А.В. Тетенова, который занимался описанием структуры самоподобных жордановых дуг в своих более ранних работах. Для построения самоподобных множеств в диссертации используется метод "систем итерируемых функций" (СИФ), который появился в середине 80-х годов как простое средство получения фрактальных структур. Математические аспекты СИФ были разработаны Дж. Хатчинсоном в 1981 г., а сам метод стал широко известен благодаря М. Барнсли.

Отметим, что топологическое изучение дендритов и более общих одномерных локально связных континуумов восходит к П. Урысону и К. Менгеру. Дендриты имеют сложную топологическую структуру, поэтому ее изучали на протяжении последних 100 лет Д. Аревало, Х. Гехман, А. Лелек, Я. Харатоник, В. Харатоник и др. В случае самоподобных дендритов их структуру изучали М. Хата (1985), К. Бандт и К. Келлер (1992) и В. В. Тетенов (2018).

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы; содержит 85 страниц.

В первой главе формулируются необходимые определения, вспомогательные утверждения и основные результаты работы.

Вторая глава диссертации посвящена изучению самоподобных дендритов, которые являются аттракторами обобщенных  $P$ -полигональных систем подобий (Определение 2.1). Отметим, что аттрактор стягиваемой  $P$ -полигональной системы подобий является дендритом, в то время как аттрактор обобщенной  $P$ -полигональной системы подобий не всегда является дендритом. В Теореме 2.17 (о совпадении

параметров) получены необходимые условия того, что аттрактор обобщенной  $P$ -полигональной системы, являющейся  $\delta$ -деформацией стягиваемой  $P$ -полигональной системы, будет дендритом. А в Теореме 2.23 (о малых деформациях) доказываются достаточные условия, при которых аттрактор  $\delta$ -деформации стягиваемой  $P$ -полигональной системы будет дендритом. Указанные теоремы с весьма нетривиальными доказательствами относятся к главным достижениям диссертации.

В третьей главе изучаются фрактальные  $k$ -кубы, впервые введенные Л. Олсеном в 1998 г., структура пересечений их копий и пересечение пары фрактальных  $k$ -кубов. Доказана формула, выражающая пересечение двух фрактальных  $k$ -кубов в терминах их множеств единиц (Теорема 3.7). Найдены условия, при которых такое пересечение будет пустым, конечным, счётным и несчётным. Для конечного пересечения получена оценка мощности (Теорема 3.11). Разработан алгоритм, выявляющий среди фрактальных  $k$ -кубов дендриты с одноточечным пересечением. Результаты данной главы легли в основу результатов следующей четвертой главы.

В четвертой главе изучаются фрактальные квадраты, являющиеся дендритами, их самоподобные границы и главные деревья. Отметим, что фрактальные квадраты являются частным случаем фрактальных  $k$ -кубов (при  $k = 2$ ).

Доказано, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты являются дендритами со свойством одноточечного пересечения (Теорема 4.6). Следовательно, фрактальный квадрат является дендритом тогда и только тогда, когда его двудольный граф пересечений является деревом (Следствие 4.7).

Интересна и неожиданна Теорема 4.15 (о классификации односвязных фрактальных квадратов), в которой установлено, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты допускают ровно семь возможных топологических типов главного дерева. Указанные результаты входят в число главных достижений Д.А. Дроздова.

Замечания по диссертации:

- 1) на стр. 41 в формуле (2.14) необходимы пояснения, почему стоит строгое неравенство;
- 2) лемма 2.22 на стр. 42: для читателя удобнее будет, если определить число  $\lambda$  в самой формулировке леммы, а не в доказательстве;
- 3) первое утверждение Главы 4 начинается со Следствия 4.2, не указано следствие из какого утверждения;
- 4) в главе 4 встречаются некорректные ссылки на некоторые утверждения: на стр. 60 в доказательстве Следствия 4.4 дважды встречается ссылка на Следствие 3.11, а должно быть Следствие 4.3. На стр. 71 и 73 ссылки на Теорему 4.11 должны быть на Лемму 4.11.

Эти замечания нисколько не умаляют значения диссертации, выполненной на высоком научном уровне и содержащей глубокие теоремы и интересные примеры. Начиная с 2021 года результаты диссертации неоднократно докладывались на Международных математических конференциях и научных семинарах, опубликованы в

пяти центральных математических журналах, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает содержание диссертации.

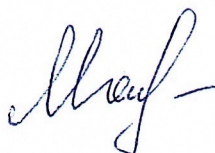
Результаты диссертации вносят существенный вклад в развитие фрактальной геометрии и могут быть полезны специалистам в теории динамических систем, по топологии, фрактальной геометрии, комплексному анализу и др. Результаты диссертации могут быть рекомендованы к использованию в учебном процессе при чтении специальных курсов, выполнении курсовых и дипломных работ.

Считаю, что диссертация соответствует требованиям ВАК, а ее автор Дроздов Дмитрий Алексеевич, достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 -- "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

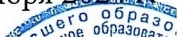
Официальный оппонент:


кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, доцент, научный сотрудник кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" 603022, г. Н. Новгород, проспект Гагарина, 23, корп. 6

Махрова Елена Николаевна  
[elena\\_makhrova@inbox.ru](mailto:elena_makhrova@inbox.ru)  
+79056693049



13 ноября 2024 г.



Подпись Махровой Е. Н.  
Заведующий. Ученый секретарь ННГУ  
 Л.Ю. Черноморская  
Тел. 462-30-21