

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор НИУ Высшая школа экономики
Старший директор по фундаментальным исследованиям
к.б.н. А.В.Балышев

26 ноября 2024 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
на диссертационную работу
Грюнвальд Лилии Александровны
«Аналитическая теория циркулянтных графов
и ее приложения к комбинаторному анализу»,
представленную к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Спектральная теория графов изучает связи структурных и спектральных свойств графов. Спектр графа представляет собой совокупность собственных чисел лапласиана графа – матрицы, строки и столбцы которой занумерованы вершинами графа, и которая равна разности диагональной матрицы, элементами диагонали которой являются валентности соответствующих вершин графа, и матрицы смежности графа. Лапласиан позволяет построить теорию дискретных гармонических функций. В классической работе Кельманса и Челнокова (1974) доказано, что коэффициенты характеристического многочлена лапласиана перечисляют корневые остовные леса в графе с данным количеством деревьев в них, т.е. представляют собой элементарные симметрические функции от элементов спектра. (В частности, свободный член характеристического многочлена лапласиана – количество корневых деревьев в графе.) Тем самым, спектральные свойства графа естественно выражаются в терминах количества корневых остовных лесов в нем. Поэтому перечисление корневых остовных лесов играет ключевую роль в понимании спектральных свойств графов. Отметим также, что перечисление корневых остовных лесов порождает гомоморфизм из алгебры Хопфа графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного набора переменных (С.~Чмутов, М.~Казарян, С.~Ландо, 2020).

Диссертационная работа Л.А.Грюнвальд посвящена изучению широкого класса графов – циркулянтным графам. Такой граф определяется количеством вершин n и набором скачков, задающих размеры шагов, через которые очередная вершина графа соединяется с другими его вершинами. Циркулянтные графы симметричны относительно действия группы вычетов по модулю n циклическими сдвигами и часто имеют и другие симметрии. В первой части диссертации соискатель разрабатывает подходы к задаче явного перечисления корневых остовных лесов в таких графах. В основе разрабатываемых подходов лежит метод, предложенный в 1986 г. в статье F.T.Boesch, H.Prodinger. Этот метод состоит в сведении задачи перечисления к вычислению произведения значений сдвинутого многочлена Чебышева первого рода, задаваемого количеством вершин n графа, в корнях линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода,

определяемой набором скачков; другими словами, речь идет о явном вычислении результатов указанных многочленов.

Для фиксированного набора скачков указанный метод дает эффективные способы перечисления корневых остовных лесов в бесконечных последовательностях циркулянтных графов, индексированных количеством вершин n . Причина эффективности в том, что указанная линейная комбинация многочленов Чебышева имеет фиксированную и, как правило, невысокую, степень, не зависящую от n .

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

В **первой главе** соискатель приводит определения основных понятий теории, которые используются в последующих главах.

Вторая глава является центральной в диссертации. В ней формулируются и доказываются основные результаты о перечислении корневых остовных лесов циркулянтных графов и циркулянтных расслоениях.

Формулируемая и доказываемая в первом параграфе Теорема 1.1 выражает количество корневых лесов в циркулянтном графе, все вершины которого имеют четную валентность, в виде результата сдвинутого на константу многочлена Чебышева с номером, равным числу вершин в графе, и линейной комбинации сдвинутых многочленов Чебышева с номерами, равными скачкам. Остальная часть первого параграфа содержит разнообразные применения Теоремы 1.1. Теорема 2.1 утверждает, что количество остовных лесов в циркулянтном графе с нечетным количеством вершин является точным квадратом, а с нечетным количеством вершин — точным квадратом, умноженным на свободное от квадратов целое число, определяемое набором скачков. Теорема 3.1 описывает асимптотику количества корневых остовных лесов в циркулянтном графе с фиксированными скачками при стремлении количества вершин к бесконечности. Старший член асимптотики является экспоненциальным, причем в основании экспоненты стоит мера Малера многочлена Лорана, определяемого набором скачков.

Во втором параграфе аналогичные результаты формулируются и доказываются для бесконечных последовательностей циркулянтных графов с нечетными валентностями вершин. Такие графы имеют четное число вершин, наибольший скачок равный половине числа вершин, а последовательность задается фиксированным набором остальных скачков. Существенным отличием случая графов с нечетными валентностями вершин от предыдущей ситуации является то, что ответ в этом случае выражается как произведение двух результатов, а не как один результат.

Третий параграф второй главы посвящен перечислению корневых лесов в циркулянтных расслоениях. Понятие циркулянтного расслоения обобщает понятие циркулянтного графа. Циркулянтное расслоение над данным графом представляет собой отображение из графа в данный граф, слой которого над каждой вершиной является циркулянтным графом, причем все слои имеют одинаковое количество вершин; Соответственные вершины двух слоев соединяются таким же количеством ребер, что и их образы при накрытии. Теорема 1.3 дает явную формулу для числа корневых лесов в циркулянтном расслоении в терминах результата двух многочленов. Эта теорема используется для доказательства арифметических и асимптотических свойств последовательностей циркулянтных расслоений, аналогичных свойствам последовательностей циркулянтных графов.

В **третьей главе** диссертации соискатель исследует свойства якобианов (лесных групп) циркулянтных графов и конусов над ними. Якобиан — конечная коммутативная группа, сопоставляемая графу. Это подгруппа кручения коядра лапласиана графа. Ее порядок равен количеству корневых остовных деревьев в графе. Как всякая конечная коммутативная группа, якобиан графа допускает каноническое представление в виде прямой суммы конечных циклических групп (разложение Смита). В третьей главе разработаны общие методы вычисления якобианов циркулянтных графов и приведено много примеров их вычисления для конкретных наборов скачков.

Все основные результаты диссертации иллюстрируются большим количеством полезных примеров, в которых общие формулы специфицируются для конкретных семейств циркулянтных графов и циркулянтных расслоений.

В **Заключении** описаны основные результаты диссертационного исследования.

Соискатель освоила большой пласт современной литературы, посвященной спектральным свойствам графов.

В диссертации имеется ряд недостатков:

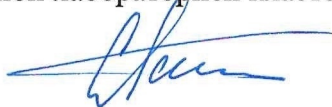
1. Целый ряд фраз описательного характера в диссертации не вполне математически точны. Вот несколько примеров:
на стр. 32 имеется фраза «Теорема 1.1 показывает, что число корневых остовных лесов $f(G)$ представляет собой целочисленную функцию от числа n вершин в циркулянтном графе G ». Это утверждение вытекает из постановки задачи, а не из Теоремы 1.1.
на стр. 43 фраза «Предположим, что $a(n)$ является числовой последовательностью для любого натурального n » не имеет математического смысла;
на стр. 66 фраза «Характеристический многочлен ... определяется как ...» не является определением характеристического многочлена, а лишь описывает его вид.
2. Было бы легче понимать содержание Таблиц 1 и 2 на стр. 85, 86, если бы они были снабжены подробными подписями, а не только заголовками столбцов, отсылающими к основному тексту.
3. Название статьи [15] в списке литературы на стр. 90 повторяет название статьи [14] других авторов. Правильное название Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials.

Впрочем, упомянутые недостатки не снижают научной ценности диссертационной работы и не могут служить препятствием к присвоению ее автору степени кандидата физико-математических наук.

В ходе диссертационного исследования Л.А.Грюнвальд проделана большая работа. Результаты, полученные в диссертации, представляют значительный интерес с научной точки зрения и могут быть использованы для дальнейших исследований в различных областях науки. В диссертации достаточно подробно описаны методы, разработанные автором, и полученные результаты, которые опубликованы в ведущих научных журналах, входящих в список ВАК, и неоднократно представлялись на российских и международных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация «Аналитическая теория циркулянтных графов и ее приложения к комбинаторному анализу», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Грюнвальд Лилия Александровна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составил
доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,
заведующий Международной лабораторией кластерной геометрии



Ландо Сергей Константинович,

кандидат физико-математических наук,
декан факультета математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,



Скрипченко Александра Сергеевна

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»
109028 г. Москва, Покровский бульвар, д.11
Тел. +7 (495) 771-32-32 e-mail hse@hse.ru

*Подписи Ландо С.К.; Скрипченко А.С.
заверяю.*

СПЕЦИАЛИСТ ПО ПЕРСОНАЛУ
УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛА
АЗОВЦЕВ Т. Д.

