

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Грюнвальд Лилии Александровны

«Аналитическая теория циркулянтных графов и ее приложения к комбинаторному анализу»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Грюнвальд Лилии Александровны посвящена исследованию спектральных и алгебраических свойств дискретного лапласиана для широкого семейства неориентированных циркулянтных графов и их обобщений. В работе введен новый объект — циркулянтное расслоение, который является обобщением конструкции циркулянтных графов. Под циркулянтным графом в диссертации понимается многослойный граф, каждый слой которого представляет собой произвольный циркулянтный граф. Такие графы находят широкое применение в разработке сетевых структур в компьютерных науках, теории квантовой информатики, химии, а также в теории графов и теории чисел.

В данной работе впервые представлены аналитические формулы для циркулянтных графов и циркулянтного расслоения, выраженные через многочлены Чебышева. Принципиально новыми результатами являются аналитические формулы для числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и их асимптотические свойства при бесконечном увеличении числа вершин. Предложенные методы упрощают вычисления структурных характеристик графов, что делает их полезными для приложений, таких как разработка сетевых структур или анализ квантовых систем.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 72 источников, пять из которых — публикации соискателя. Диссертация написана на 97 страницах.

В главе 1 приведены элементы спектральной теории циркулянтных графов: даны основные понятия и определения из теории графов, определено циркулянтное расслоение, представляющее собой частный случай многослойных графов, приведены яркие и содержательные примеры: I -граф, обобщенный граф Петерсона, граф-сэндвич, обобщенный Y -граф, обобщенный H -граф, дискретный тор. Показана связь характеристического многочлена матрицы Лапласа (матрицы Кирхгофа, лапласиана) с числом остовных деревьев графа (Теорема 1), а абсолютные значения его коэффициентов s_k связаны с числом корневых остовных лесов в графе, состоящем из k -деревьев (Теорема 2).

Глава 2 посвящена корневым остовным лесам в циркулянтных графах. В теореме 1.1 § 1 приведена интересная формула, выражающая число корневых остовных лесов в графе через многочлены Чебышева первого рода. В теореме 1.2 § 1 исследованы теоретико-числовые свойства числа остовных корневых лесов в графе, а в теореме 1.3 § 1 найдена их асимптотика при стремлении числа вершин к бесконечности. В § 2 представлены три теоремы, касающиеся числа корневых лесов в циркулянтных графах, арифметических свойств и асимптотики этого числа. § 3 является значительным расширением результатов двух предыдущих параграфов для корневых остовных лесов для циркулянтных графов более сложной структуры. Также отметим, что § 3.3 содержит достаточное количество примеров, иллюстрирующих построенную теорию.

Глава 3 посвящена критической группе конуса над циркулянтным графом. В частности, доказано, что число остовных деревьев в графе, который является конусом над произвольным графом, совпадает с числом корневых остовных лесов в графе (Теорема 1.1). Далее, в этой главе найдено свойство матрицы Лапласа графа для случая бимонического многочлена Лорана, т.е. многочлену с целыми коэффициентами специального вида. Отметим, что при бесконечном увеличении числа вершин графа, вычисление коядра матрицы Лапласа значительно упрощается. Также установлена связь между критической группой графа и числом остовных лесов в произвольном связном графе (Теорема 1.3). Особенно можно выделить § 4, посвященный изучению

критической группы конуса, основанием которого является циркулянтный граф: рассмотрены случаи циркулянтных графов с четным и нечетным числом вершин, а также изучены свойства лесной группы кобордизмов двух циркулянтных графов. В завершение главы приводятся примеры конусов: графа-колеса, конуса над лестницей Мебиуса и над графом-призмой.

Есть несколько пожеланий и рекомендаций по оформлению диссертации. В п. 1.5 автор определяет основные свойства, характерные для циркулянтных графов. Возможно, стоило бы представить основные свойства, играющие со слов автора, ключевую роль, более структурировано. Также автор использует одноуровневую нумерацию теорем в первой главе и двухуровневую нумерацию теорем, уникальную в пределах одной главы, во второй и третьей главе. Например, Теорема 1.1 есть как во второй, так и в третьей главе, что создает необходимость указывать местоположение теоремы всякий раз при ее упоминании. Более стандартизированная нумерация могла бы облегчить чтение диссертации.

Приведем еще мелкие опечатки, которые никак не влияют на значимость результатов:

- стр. 8, строка 6: заменить слово «группу» на «группы»;
- стр. 19, строка 7: заменить слово «обобщенный» на «обобщенный»;
- стр. 24, строка 15: вместо «коэффициент $|c_1|$ » написать «абсолютное значение коэффициента c_1 »;
- стр. 25, строка 14: заменить a_{d-1} на $a_{d-1}z$;
- стр. 27, строка 5: убрать повторяющееся слово «группа»;
- стр. 32, строка 4: запятая после слова «многочленов» лишняя;
- стр. 45, строка 10: заменить слово «примененить» на «применить»;
- стр. 47, строка 5: слово «Лапласиан» написать со строчной буквы;
- стр. 57, строки 3-4: выделить запятыми причастный оборот.

Указанные недостатки не снижают научных достоинств диссертации. Полученные в ней основные результаты являются новыми, строго обоснованными и представляют значимый вклад в развитие теории циркулянтных графов. Совокупность всех полученных автором результатов играет важную роль в дальнейшей разработке спектральной теории графов, особенно в области многослойных графов и их применений. Результаты могут быть использованы для более эффективного анализа сетевых структур, квантовых вычислений и других дисциплин, таких как теория чисел и комбинаторика. Разработанные методы также могут быть полезны в прикладных областях, связанных с вычислительными технологиями, например, при моделировании и оптимизации сложных сетевых топологий. Эти исследования значительно расширяют возможности для теоретического и практического применения циркулянтных графов и их обобщений в различных научных и инженерных задачах. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых Высшей школой экономики, Московским и Новосибирским государственными университетами, Сибирским федеральным университетом, а также в Институте математики им. Стеклова РАН, Институте математики им. Соболева СО РАН, Московском физико-техническом институте.

Автор продемонстрировал не только высокий уровень теоретической подготовки, но и исключительное мастерство в применении различных математических методов. Широкий математический кругозор автора позволяет успешно использовать богатую палитру инструментов, начиная от теории графов и линейной алгебры до теории чисел и комплексного анализа. Эти

качества свидетельствуют о высоком уровне научного мастерства и приверженности глубокому и всестороннему исследованию предмета.

Автореферат правильно и точно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации обоснованы и своевременно опубликованы в пяти научных статьях в ведущих российских и зарубежных журналах из перечня ВАК, из них четыре работы опубликованы в изданиях из международной базы Scopus. Отмечу, что автор также имеет несколько публикаций типа «тезисы», что говорит о продолжительном интересе автора к данной тематике.

Считаю, что диссертация Л. А. Грюнвальд удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Ляпин Александр Петрович,
кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — математический анализ,
доцент, доцент базовой кафедры вычислительных
и информационных технологий института
математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета

03 декабря 2024 г.

А. П. Ляпин

Адрес: 660041, Красноярск, пр. Свободный, д. 79, ауд. 34-12,
Сибирский федеральный университет
Адрес электронной почты: APLyapin@sfu-kras.ru
Телефон: +7 391 206 2087

