

**Отзыв научного руководителя**  
на диссертацию Артюшина Александра Николаевича  
«Метод априорных оценок для уравнений с дробными производными»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация А. Н. Артюшина посвящена исследованию новых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. В частности, в диссертации проведены исследования задач для уравнений дробной диффузии с вырождением и сменой направления времени, задач для дробно-волнового уравнения со сменой направления времени, некоторых обратных задач.

В первой главе сформулированы и доказаны некоторые интегральные неравенства с дробными производными, составляющие основу метода априорных оценок.

Во второй главе исследуются линейное и нелинейное вырождающиеся ОДУ с дробной производной. Следует отметить, что наличие вырождения и нелинейности создает специфические трудности для доказательства однозначной разрешимости даже в таком сравнительно простом случае. Для предельного перехода в нелинейном слагаемом нужны соответствующие оценки. Однако вырождение не позволяет рассчитывать на какую-нибудь содержательную оценку производной. Кроме того, в некоторых случаях даже слабую сходимость не удастся обосновать. Все это привело к необходимости построения специальной сильно сходящейся последовательности приближенных решений.

В третьей главе изучается уравнение дробной диффузии с вырождением и сменой направления времени. Для параболических уравнений с меняющимся направлением времени хорошо известны корректные постановки задач. Возникает вопрос: возможно ли ставить аналогичные задачи для уравнения дробной диффузии? Оказалось, что это возможно. Однако трудности возникают даже при формулировке определения обобщенного решения. Дело в том, что следы решения могут быть не определены, так что краевые условия нуждаются в корректном обосновании. Потребовалась специальная конструкция со вспомогательными функциями (формальными следами). Кроме этого, возникли и специфические технические трудности. В случае обычной производной решающая оценка получается с помощью

интегрирования по частям сложной функции от решения. Для дробных производных такой простой формулы нет. Поэтому простой перенос известной техники на такие уравнения невозможен. Для решения возникающей проблемы понадобилось эквивалентным образом преобразовать исходную задачу к виду, позволяющему провести требуемое интегрирование по частям.

В четвертой главе изучается дробно-волновое уравнение с вырождением и сменой направления времени. Техника доказательства разрешимости в основном аналогична технике из третьей главы. Однако на сей раз доказана технически непростая теорема единственности обобщенного решения. В доказательстве используется известный прием сглаживания решения с помощью усреднения. Но в случае дробных производных с ненулевыми краевыми условиями усреднение сталкивается с большими техническими трудностями. В работе эти трудности преодолены. В результате была доказана теорема единственности решения, при тех же условиях, что и в задачах с обычной производной.

В пятой главе рассмотрена обратная задача определения переменного показателя производной в уравнении дробной диффузии. Следует отметить, что даже прямая задача изучалась ранее лишь в немногих работах. Обратная же задача в такой полной постановке (с переменным показателем производной) ранее не рассматривалась. Изначально предполагалось получить хотя бы какую-нибудь локальную теорему существования. Однако, окончательный результат оказался довольно неожиданным. Удалось доказать единственность решения обратной задачи и предложить конструктивную процедуру поиска решения. Отдельно хочется отметить, что в доказательстве используется нешаблонная теорема о неподвижной точке Биркгофа-Тарского.

В заключение можно сказать следующее. Диссертационная работа А. Н. Артюшина показала высокую эффективность метода априорных оценок в применении к уравнениям с дробной производной. С его помощью вполне возможно достижение достаточно сложных и нетривиальных результатов.

Все исследования А. Н. Артюшиным выполнены на очень высоком уровне. Все результаты диссертации являются новыми и своевременно опубликованными.

В основном все результаты диссертации А. Н. Артюшина были доложены на крупных международных конференциях, и все они получили высокую оценку.

Сомнений у научного руководителя в высокой квалификации А. Н. Артюшина нет. Считаю, что диссертация «Метод априорных оценок для уравнений с дробными производными» соответствует всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Артюшин Александр Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Научный руководитель  
главный научный сотрудник  
лаборатории дифференциальных  
и разностных уравнений  
Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки  
Института математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
доктор физико-математических наук  
(по специальности 01.01.02), профессор  
**Кожанов Александр Иванович**

10.01.2025

Email: kozhanov@math.nsc.ru

Телефон: +7 (383) 3297683

Почтовый адрес: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, д. 4.

