

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

д.э.н., профессор Вадим Валерьевич Радаев

«17» марта 2025 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации

**Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики**

**на диссертационную работу**

**Грюнвальд Лилии Александровны**

**«Аналитическая теория циркулянтных графов**

**и ее приложения к комбинаторному анализу»,**

**представленную к защите на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук по специальности**

**1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Спектральная теория графов изучает связи структурных и спектральных свойств графов. Спектр графа представляет собой совокупность собственных чисел лапласиана графа – матрицы, строки и столбцы которой занумерованы вершинами графа, и которая равна разности диагональной матрицы, элементами диагонали которой являются валентности соответствующих вершин графа, и матрицы смежности графа. Лапласиан позволяет построить теорию дискретных гармонических функций. В классической работе Кельманса и Челнокова (1974) доказано, что коэффициенты характеристического многочлена лапласиана перечисляют корневые остовные леса в графе с данным количеством деревьев в них, т.е. представляют собой элементарные симметрические функции от элементов спектра. (В частности, свободный член характеристического многочлена лапласиана – количество корневых деревьев в графе.) Тем самым, спектральные свойства графа естественно выражаются в терминах количества корневых остовных лесов в нем. Поэтому перечисление корневых остовных лесов играет ключевую роль в понимании спектральных свойств графов. Отметим также, что перечисление корневых остовных лесов порождает гомоморфизм из алгебры Хопфа графов в алгебру Хопфа многочленов от бесконечного набора переменных (С.Чмутов, М.Казарян, С.Ландо, 2020).

Диссертационная работа Л.А.Грюнвальд посвящена изучению широкого класса графов – циркулянтным графам. Такой граф определяется количеством вершин  $n$  и набором скачков, задающих размеры шагов, через которые очередная вершина графа соединяется с другими его вершинами. Циркулянтные графы симметричны относительно действия группы вычетов по модулю  $n$  циклическими сдвигами и часто имеют и другие симметрии. В первой части диссертации соискатель разрабатывает подходы к задаче явного перечисления корневых остовных лесов в таких графах. В основе разрабатываемых подходов лежит метод, предложенный в 1986 г. в статье F.T.Boesch, H.Prodinger. Этот

метод состоит в сведении задачи перечисления к вычислению произведения значений сдвинутого многочлена Чебышева первого рода, задаваемого количеством вершин  $n$  графа, в корнях линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода, определяемой набором скачков; другими словами, речь идет о явном вычислении результатов указанных многочленов.

Для фиксированного набора скачков указанный метод дает эффективные способы перечисления корневых остовных лесов в бесконечных последовательностях циркулянтных графов, индексированных количеством вершин  $n$ . Причина эффективности в том, что указанная линейная комбинация многочленов Чебышева имеет фиксированную и, как правило, невысокую, степень, не зависящую от  $n$ .

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

В **первой главе** соискатель приводит определения основных понятий теории, которые используются в последующих главах.

**Вторая глава** является центральной в диссертации. В ней формулируются и доказываются основные результаты о перечислении корневых остовных лесов циркулянтных графов и циркулянтных расслоениях.

Формулируемая и доказываемая в первом параграфе Теорема 1.1 выражает количество корневых лесов в циркулянтном графе, все вершины которого имеют четную валентность, в виде результата сдвинутого на константу многочлена Чебышева с номером, равным числу вершин в графе, и линейной комбинации сдвинутых многочленов Чебышева с номерами, равными скачкам. Остальная часть первого параграфа содержит разнообразные применения Теоремы 1.1. Теорема 2.1 утверждает, что количество остовных лесов в циркулянтном графе с нечетным количеством вершин является точным квадратом, а с нечетным количеством вершин – точным квадратом, умноженным на свободное от квадратов целое число, определяемое набором скачков. Теорема 3.1 описывает асимптотику количества корневых остовных лесов в циркулянтном графе с фиксированными скачками при стремлении количества вершин к бесконечности. Старший член асимптотики является экспоненциальным, причем в основании экспоненты стоит мера Малера многочлена Лорана, определяемого набором скачков.

Во втором параграфе аналогичные результаты формулируются и доказываются для бесконечных последовательностей циркулянтных графов с нечетными валентностями вершин. Такие графы имеют четное число вершин, наибольший скачок равный половине числа вершин, а последовательность задается фиксированным набором остальных скачков. Существенным отличием случая графов с нечетными валентностями вершин от предыдущей ситуации является то, что ответ в этом случае выражается как произведение двух результатов, а не как один результат.

Третий параграф второй главы посвящен перечислению корневых лесов в циркулянтных расслоениях. Понятие циркулянтного расслоения обобщает понятие циркулянтного графа. Циркулянтное расслоение над данным графом представляет собой отображение из графа в данный граф, слой которого над каждой вершиной является циркулянтным графом, причем все слои имеют одинаковое количество вершин; Соответственные вершины двух слоев соединяются таким же количеством ребер, что и их образы при накрытии. Теорема 1.3 дает явную формулу для числа корневых лесов в циркулянтном расслоении в терминах результата двух многочленов. Эта теорема используется для доказательства

арифметических и асимптотических свойств последовательностей циркулянтных расслоений, аналогичных свойствам последовательностей циркулянтных графов.

В третьей главе диссертации соискатель исследует свойства якобианов (лесных групп) циркулянтных графов и конусов над ними. Якобиан – конечная коммутативная группа, сопоставляемая графу. Это подгруппа кручения коядра лапласиана графа. Ее порядок равен количеству корневых остовных деревьев в графе. Как всякая конечная коммутативная группа, якобиан графа допускает каноническое представление в виде прямой суммы конечных циклических групп (разложение Смита). В третьей главе разработаны общие методы вычисления якобианов циркулянтных графов и приведено много примеров их вычисления для конкретных наборов скачков.

Все основные результаты диссертации иллюстрируются большим количеством полезных примеров, в которых общие формулы специфицируются для конкретных семейств циркулянтных графов и циркулянтных расслоений.

В **Заключении** описаны основные результаты диссертационного исследования.

Соискатель освоила большой пласт современной литературы, посвященной спектральным свойствам графов.

В диссертации имеется ряд недостатков:

1. Целый ряд фраз описательного характера в диссертации не вполне математически точны. Вот несколько примеров:  
на стр. 32 имеется фраза «Теорема 1.1 показывает, что число корневых остовных лесов  $f(G)$  представляет собой целочисленную функцию от числа  $n$  вершин в циркулянтном графе  $G$ ». Это утверждение вытекает из постановки задачи, а не из Теоремы 1.1.  
на стр. 43 фраза «Предположим, что  $a(n)$  является числовой последовательностью для любого натурального  $n$ » не имеет математического смысла;  
на стр. 66 фраза «Характеристический многочлен ... определяется как ...» не является определением характеристического многочлена, а лишь описывает его вид.
2. Было бы легче понимать содержание Таблиц 1 и 2 на стр. 85, 86, если бы они были снабжены подробными подписями, а не только заголовками столбцов, отсылающими к основному тексту.
3. Название статьи [15] в списке литературы на стр. 90 повторяет название статьи [14] других авторов. Правильное название Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials.

Впрочем, упомянутые недостатки не снижают научной ценности диссертационной работы и не могут служить препятствием к присвоению ее автору степени кандидата физико-математических наук.

В ходе диссертационного исследования Л.А.Грюнвальд проделана большая работа. Результаты, полученные в диссертации, представляют значительный интерес с научной

точки зрения и могут быть использованы для дальнейших исследований в различных областях науки. В диссертации достаточно подробно описаны методы, разработанные автором, и полученные результаты, которые опубликованы в ведущих научных журналах, входящих в список ВАК, и неоднократно представлялись на российских и международных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Грюнвальд Лилии Александровны «Аналитическая теория циркулянтных графов и ее приложения к комбинаторному анализу», соответствует требованиям пунктов 9-10 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук, профессором факультета математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Ландо Сергеем Константиновичем.

Отзыв рассмотрен и одобрен на заседании факультета математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», протокол № 2.5-01/070325 от «07» марта 2025 года.

**Сведения о ведущей организации:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

Адрес: 101000 г. Москва, ул. Мясницкая, 20.

Тел.: (495) 771-32-32

Электронная почта: [hse@hse.ru](mailto:hse@hse.ru)

Сайт: <http://www.hse.ru>

Декан факультета математики  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,  
кандидат физико-математических наук,

Скрипченко Александра Сергеевна

Профессор факультета математики  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,  
заведующий Международной лабораторией кластерной геометрии  
доктор физико-математических наук,

Подпись заверяю

Ландо Сергей Константинович

СПЕЦИАЛИСТ ПО ПЕРСОНАЛУ  
УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛА  
АЗОВЦЕВ Т. Д.

Список основных работ составителя отзыва по теме диссертации

- 1 Chmutov, S., Kazarian, M., & Lando, S. (2020). Polynomial graph invariants and the KP hierarchy. *Selecta Mathematica, New Series*, 26(3) doi:10.1007/s00029-020-00562-w
- 2 Kazarian, M., & Lando, S. (2022). Weight systems and invariants of graphs and embedded graphs. *Russian Mathematical Surveys*, 77(5) doi:10.4213/rm10054e
- 3 Kodaneva N. & Lando S. (2025) Polynomial graph invariants induced from the gl-weight system, *Journal of Geometry and Physics*. Vol. 210. Article 105421. doi:10.1016/j.geomphys.2025.105421